TEMA 16: DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. TEOREMA DE ROUCHÉ. REGLA DE CRAMER. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

TIEMPO: 87 — 82

Esquema

1) Introducción
   1.1) Antigüedad:
      1.1.1) Egipto y Babilonia + China e India
   1.2) Árabes
2 Sistemas Lineales
   2.1) Def: sistemas de ecuaciones
   2.2) Def: coeficientes, t. independiente, solución, S.C., S.I.
   2.3) Def: equivalencia + criterios
   2.4) Sistema homogéneo
      2.4.1) Teorema
   2.5) Def: S.C.D., S.C.I., notación matricial
   2.6) Determinante, menor, rango
      2.6.1) Def: forma bilineal
         2.6.1.1) Propiedades
      2.6.2) Determinante: Def. 1, Def. 2
      2.6.3) Def: menor
      2.6.4) Rango: Def. 1, Def. 2
3) Rouché-Frobenius
   3.1) Teorema (de Rouché)
   3.2) Def: matriz de coeficientes, matriz ampliada
   3.3) Discusión de los rangos
   3.4) Sistemas homogéneos
      3.4.1) Def: solución trivial
      3.4.2) Teorema
      3.4.3) Teorema de Rouché-Frobenius
4) Resolución de Sistemas Lineales
   4.1) Sistemas cuadrados regulares
      4.1.1) Regla de Cramer
   4.2) Método de Gauss
      4.2.1) Transformaciones + discusión
   4.3) Gauss-Jordan
   4.4) Def: variedad lineal generada por las ecuaciones

1) Introducción:

▷ Antigüedad (Mesopotamia y Egipto): desde la Antigüedad los hombres han intentado resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones (cuestiones de regadío, impuestos, repartos, cosechas,...). Ya en el Antiguo Egipto y en Babilonia se consiguieron resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (e incluso algunas ecuaciones del tipo $x^2 + y^2 = a^2$).

▷ Antigüedad (China e India): en las Antiguas China e India también se plantean estas cuestiones y sabemos que en China se conocía la resolución de sistemas lineales de ecuaciones usando determinantes (ellos no los llamaban así). Esos tratados son más de mil años anteriores a la aparición en Europa de los resultados análogos.
Los chinos, además, siempre fueron muy aficionados a los diseños armónicos y no es de extrañar que el primer ejemplo de cuadrado mágico se lo debamos a ellos (según la leyenda estaba inscrito en el caparazón de una tortuga de río). El interés por este tipo de modelos es lo que llevó al método de resolución de ecuaciones lineales. Ellos operaban sobre las columnas (las filas no tenían el mismo tratamiento) del mismo modo que hacemos con el método de Gauss.

▷ Árabes: los árabes, quienes tuvieron una estrecha relación con China e India, adoptaron sus métodos de resolución de ecuaciones. Curiosamente, de los muchos tratados árabes que pasarían a Europa mediante traducciones y el intercambio cultural, no encontramos los "*Nueve Capítulos*" chinos donde aparecen los métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales.

2) Sistemas de ecuaciones lineales:

▷ **Definición**: llamamos sistema de “m” ecuaciones lineales con “n” incógnitas a “m” homomorfismos del espacio vectorial V en su propio cuerpo de forma que si fijamos “m” elementos el cuerpo, $b_1, \ldots, b_m$ buscamos para cada homomorfismo el vector de V que tenga por imagen ese elemento del cuerpo fijado de antemano. Si encontramos un vector (o vectores) en V que sean originales de todos y cada uno de los elementos fijos del cuerpo diremos que tenemos soluciones del sistema propuesto.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

▷ **Definición** (equivalente): dado $f : V \mapsto W$, homomorfismo con $dim(V) = n$, $dim(W) = m$, nos preguntamos si, dado $b \in W$, se cumple que $b \in f(V)$.

▷ **Definición**: a los elementos a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ los llamamos coeficientes.

▷ **Definición**: a los $b_1, \ldots, b_m$ los llamamos términos independientes.

▷ **Definición**: a todo vector $v \in V$, $v = (x_1, \ldots, v_n)$ que verifica todas las ecuaciones lo llamaremos solución.

▷ **Definición**: si el sistema tiene solución se llamará compatible. Si no tiene solución se llamará incompatible.

▷ **Definición**: decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando toda solución del primero lo sea del segundo y viceversa (cuando ambos tengan solución).

▷ **Criterios de equivalencia**:

1) Si en un sistema lineal multiplicamos cualquier ecuación por un escalar no nulo del cuerpo $\mathbb{K}$, obtenemos un sistema equivalente (el recíproco también es cierto).
2) Podemos sustituir una ecuación cualquiera por la combinación lineal de la misma con otras cualesquiera.
3) Obtenemos un sistema equivalente a uno dado si eliminamos una ecuación que sea combinación lineal de otra(s).
4) Si en una ecuación despejamos una incógnita y sustituimos en las otras ecuaciones, el sistema resultante es equivalente al primero.

▷ Decimos que un sistema es homogéneo si el vector elegido en V es en el vector nulo $\{0_V\}$, es decir, el neutro para la suma. Dadas dos soluciones del sistema homogéneo, su combinación lineal también será solución.

$\triangleright$ **<u>Teorema</u>**: el conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo puede obtenerse sumando a una solución particular todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Proof. Se requiere probar dos puntos:
1) La suma de S_p, solución del no homogéneo, y S_0, solución del homogéneo, también es solución:
$f(S_p + S_0) = \ \{\text{f lineal}\} \ = f(S_p) + f(S_0) = \vec{b} + \vec{0}_{\hat{V}} = \vec{b} \longleftrightarrow S_0 + S_p$ es solución.
2) Toda solución del no homogéneo puede expresarse como suma de una particular y otra del homogéneo:
Sean S_q, $S_p \longrightarrow f(S_q - S_p) = \vec{0}_{\hat{V}} \longrightarrow S_q - S_p \in \text{Ker}f \longleftrightarrow S_q - S_p = S_0 \longleftrightarrow S_q = S_p + S_0$

$\square$

$\triangleright$ Si tenemos un sistema compatible las soluciones del mismo pueden obtenerse sumando una solución particular con las soluciones del sistema homogéneo asociado.

$\triangleright$ **<u>Definición</u>**: el sistema compatible tendrá solución única si $\text{Ker}f = \{0_V\}$. En este caso lo llamaremos <u>compatible determinado</u>. Si $\text{Ker}f \neq \{0_V\}$, lo llamaremos <u>compatible indeterminado</u>.

$\triangleright$ **<u>Notación matricial de un sistema lineal</u>**: si llamamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ el sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ quedará como $A \cdot \mathbb{X} = B$

Determinantes, menores y rango

$\triangleright$ Necesitaremos una serie de conceptos previos para abordar de una forma coherente apartados como el Teorema de Rouché, la regla de Cramer o la resolución de ciertos sistemas mediante la matriz inversa. Vamos a empezar con el concepto de determinante. Para ello empecemos con V un espacio vectorial bidimensional sobre $\mathbb{R}$.

$\triangleright$ **<u>Definición</u>**: llamaremos <u>forma bilineal</u> sobre V a toda aplicación $g : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ cumpliendo que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$:

1) $g(v + w, u) = g(v, u) + g(w, u)$

2) $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$

3) $g(u, \alpha \cdot u) = \alpha \cdot g(u, v)$

4) $g(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot g(u, v)$

▷ **Definición**: decimos que la forma bilineal es simétrica si cumple $g(v, w) = g(w, v)$.

▷ **Definición**: decimos que es alternada/antisimétrica si $g(w, v) = -g(v, w)$.

▷ **Proposición**: g es alternada $\longleftrightarrow \forall v \in V,\ g(v, v) = 0$.

Proof. $\Longrightarrow$: $g(v, v) = -g(v, v) \longrightarrow 2g(v, v) = 0 \longrightarrow g(v, v) = 0$
$\Longleftarrow$: $0 = g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, v) + g(w, w) = g(v, w) + g(w, v) = 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow g(v, w) = -g(w, v)$

□

▷ Supongamos una base de $B = \{e_1, e_2\}$ de V, los vectores $\{v = v_1e_1 + v_2e_2, w = w_1e_1 + w_2e_2\}$. Se verifica que $g(v, w) = (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \cdot g(e_1, e_2)$. Es decir, la forma bilineal alternada queda perfectamente determinada cuando se conoce $g(e_1, e_2) \in \mathbb{R}$.

▷ **Definición**: al número real $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$ lo llamaremos determinante de los vectores "v" y "w" respecto de la base $\{e_1, e_2\}$. Lo notaremos por $\det(v, w)$.

▷ Si consideramos el espacio vectorial de las matrices cuadradas de segundo orden, $\mathcal{M}_2$, dado que se pueden considerar formadas por las componentes de dos vectores de V, podemos hablar de su determinante como una aplicación $\det : \mathcal{M}_2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por:
$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

▷ **Definición**: dada $M \in \mathcal{M}_2$, a la aplicación $\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ la llamaremos determinante de M.

▷ *Nota*: ambas definiciones son, trivialmente, equivalentes. Todas las propiedades de los determinantes van a proceder de las propiedades de las formas bilineales alternadas donde $g(e_1, e_2) = 1$ (si una fila es cero el determinante es cero, si una es combinación lineal de la otra también será cero el determinante,...).

▷ Para extender a cualquier dimensión el concepto de determinante se puede usar el concepto de forma n-lineal y razonar igual que en el caso $n = 2$ o definirlo directamente como:

▷ Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces: $|A| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j1}(-1)^{j+1}|A_{j1}|$ donde A_{j1} es la submatriz de A a la que se le ha quitado la fila "j" y la columna "1" ($A_{j1} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}$).

▷ **Definición**: llamamos menor de orden "k" de una matriz al determinante de una submatriz de A formada por la intersección de "k" filas y "k" columnas.

$\triangleright$ **Definición 1**: llamamos rango de A al orden del mayor menor no nulo de A y lo notamos por $rg(A)$.

$\triangleright$ Decimos que orlamos un cierto valor de orden "k" de una matriz cuando formamos un nuevo menor de orden $(k+1)$ añadiendo al menor inicial los elementos de una fila y una columna que no formen parte del menor dado.

$\triangleright$ Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ de orden $m \times n$ y $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Consideramos las matrices fila de orden $(1 \times n)$ y tendremos "m" vectores: $F_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$, $\cdots$, $F_m = (a_{m1}, \cdots, a_{mn})$. Sea $S =< F_1, \cdots, F_m >$. Tenemos dos posibilidades:

1) Si $n \geq m \longrightarrow$ todos los $F_j, j = 1, ..., m$ pueden ser linealmente independientes.

2) Si $n < m \longrightarrow$ no todos los $F_j, j = 1, ..., m$ pueden ser linealmente independientes $\longrightarrow$ son linealmente dependientes.

$\triangleright$ **Definición 2**: llamamos rango de A, $rg(A)$, al número de filas (columnas) linealmente independientes.

$\triangleright$ **Proposición**: ambas definiciones son equivalentes.

Proof. 1) $\Longrightarrow$ 2): Sea A de orden $m \times n$ donde todos los menores de orden $(k+1)$ son cero y tal que existe un menor de orden (k) no nulo. Así, al menos todas las filas que intervienen en el menor son linealmente independientes $\longrightarrow rg(A) \geq k$. Al ser todos los mejores de orden $(k+1)$ nulos, si añadimos a las "k" filas una más, las filas serán linealmente dependientes y, por lo tanto, el máximo número de filas independientes es exactamente "k".
2) $\Longrightarrow$ 1): Sea A tal que tiene como máximo (k) filas independientes. Si añadimos una fila serían linealmente dependientes $\longrightarrow$ todos los menores de orden $(k+1)$ son cero. Naturalmente, existe un menor de orden (k) no nulo pues si no existiera tendríamos a lo sumo $(k-1)$ filas independientes, en contra de la hipótesis. $\square$

3) Rouché-Frobenius:

$\triangleright$ Sea un sistema lineal de "m" ecuaciones y "n" incógnitas $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ cuya aplicación lineal asociada es $f(x) = b$; $f(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ **Teorema**: la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución es que el vector $b \in \hat{V}$ pertenezca a la imagen de "f". O, lo que es lo mismo, que el vector "b" sea combinación lineal de los $f(v_j)$. O bien, que el vector columna "b" sea combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

$\triangleright$ **Definición**: llamamos matriz de coeficientes a la matriz A.

$\triangleright$ **Definición**: llamamos matriz ampliada a la matriz de orden $(m \times (n+1))$ formada por la matriz A junto con la columna "vector b".

$\triangleright$ Si el sistema tiene solución quiere decir que la nueva columna de la matriz ampliada debe depender de las "n" columnas restantes, por lo que el rango de la matriz de coeficientes y el tango de la ampliada han de ser iguales. En este caso el sistema sería compatible.

$\triangleright$ Si no fuesen iguales, la nueva columna es independiente de las anteriores, por lo que el sistema no tiene solución. En este caso el sistema sería incompatible.

$\triangleright$ Veamos qué pasa si los rangos son iguales. Como "n" es el número de columnas, $rg(A) \leq n$.

a) Sea $rg(A) = n \longrightarrow rg(A) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$ y como se cumple el teorema de las dimensiones: $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\} \longrightarrow$ tiene solución única $\longleftrightarrow$ es compatible determinado. Esto equivale a que $\{f(v_j)\}$ es base de $f(V)$ y, por tanto, podemos escribir $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j)$ de forma única.

b) Sea $rg(A) < n \longrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = rg(A) < n \longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) > 0 \longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}_V\} \longrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones $\longleftrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado. Esto equivale a que $\{f(v_j)\}$ no es base de $f(E)$ pues son linealmente dependientes y, por tanto, "b" se puede escribir de infinitas formas como combinación lineal de ellos.

$\triangleright$ **Sistemas homogéneos**: supongamos el sistema homogéneo $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

▷ Aplicando el teorema anterior, como ambos rangos son iguales, siempre hay solución.

▷ **Definición**: a la solución $0_V = (0, \dots, 0)$ del sistema homogéneo se la conoce como trivial o impropia.

▷ Tendremos $rg(A) = n \longleftrightarrow$ la solución trivial es la única solución.

▷ **Proposición**: un sistema lineal homogéneo tiene solución distinta de la trivial si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas.

Proof. $\Longrightarrow$: sea $x_1 f(v_1) + \ldots + x_n f(v_n) = 0_{\hat{V}}$. Si tenemos una solución $s = (s_1, \dots, s_n) \neq 0_V$, entonces $s_1 f(v_1) + \ldots + s_n f(v_n) = 0_{\hat{V}} \longleftrightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ son linealmente dependientes $\longleftrightarrow rg(A) < n$.
$\Longleftarrow$: si $rg(A) < n \longrightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ son linealmente dependientes $\longrightarrow \exists \lambda_j$ no todos nulos tales que $\lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0_{\hat{V}}$ Así pues, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es nuestra solución.

□

▷ **Teorema**: el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo constituyen el $\mathrm{Ker}(f)$ y, por tanto, tienen estructura de subespacio vectorial. Además, si $rg(A) = p$, entonces $\dim \mathrm{Ker}(f)) = n - p$. Equivalentemente: dado un sistema lineal homogéneo de "m" ecuaciones y "n" incógnitas tal que el rango de la matriz de coeficientes es $p \leq n$, el conjunto de soluciones constituye un subespacio vectorial o variedad lineal de dimensión $n - p$.

Proof. Sea $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$. Tomemos las filas del sistema correspondiente a ese menor. Podemos desechar las otras $(n - p)$ pues son combinación lineal de éstas:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = -a_{1p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pp}x_p = -a_{pp+1}x_{p+1} - \ldots a_{pn}x_n \end{cases}$. Sea $\{s_1, \cdots, s_n\} = H$ el conjunto de soluciones.
Para ver que es subespacio vectorial hemos de ver que si $s_1, s_2 \in H$, $\alpha, \because\!\in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha s_1 + \beta s_2 \in H$. Pero esto es trivial pues tenemos un sistema lineal (no es más que sustituir, agrupar y todo se anula). Para hallar la dimensión sea: $x_1 f(v_1) + \cdots + x_p f(v_p) = 0_{\hat{V}}$, donde los vectores $f(v_1), \cdots, f(v_p)$ son linealmente independientes y el resto son linealmente dependientes de los primeros (pues los vectores "v_p" son los vectores columna). Es claro que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = p$, que es justo la hipótesis que teníamos $\longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - p$.

□

▷ Podemos unir todo lo visto en este apartado en el siguiente teorema:

▷ **Teorema de Rouché-Frobenius**: un sistema de ecuaciones lineales con "n" incógnitas tiene solución si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada coinciden. Si hay solución al sistema, éstas forman una variedad de dimensión $n - rg(A)$.

▷ En otros países se lo conoce como Teorema de Rouché-Capelli, Rouché-Fontené o Kronecker-Capelli. El nombre que usamos es debido a que el matemático Julio Rey Pastor se refirió a él de esta forma en sus trabajos.

4) Resolución de sistemas lineales:

▷ **Sistemas cuadrados regulares**: el conjunto de las matrices cuadradas de orden "n" tiene estructura de anillo no conmutativo y no tiene la propiedad del simétrico para el producto. A las matrices que sí lo tienen las llamaremos regulares. Es de sobra conocido que $\exists A^{-1} \longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.
Si tenemos un sistema cuadrado donde la matriz de coeficientes es regular, entonces tenemos inmediatamente que es compatible determinado y para resolverlo operamos como sigue:
$A \cdot X = B$, donde $X = (x_1, \cdots, x_n)$ es el vector de incógnitas y $B = (b_1, \cdots, b_n)$ el de términos independientes. Entonces: $X = A^{-1} \cdot B$.

▷ **Regla de Cramer**: en las mismas condiciones de antes tenemos que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} =$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como $X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow x_j = \dfrac{A_{1j}b_1 + \ldots + A_{nj}b_n}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overbrace{b_1}^{(j)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$
Y así cualquier incógnita "x_j" es igual al cociente del determinante de A sustituyendo la columna "j" por el vector B y por denominador el determinante de A.

▷ **Método de Gauss**: la idea es construir sistemas equivalentes al inicial mediante las posibles transformaciones que comentamos al principio del tema.

▷ Dado el sistema Sea $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = bm \end{cases}$ de orden $m \times n$ tomamos su matriz ampliada $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots a_{1n} & b_1 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ y seguimos los siguientes pasos:

1) Cambiando el orden de las ecuaciones o aplicando el primer criterio de equivalencia de ecuaciones, hacemos $a_{11} = 1$.

2) A partir del segundo criterio, sumando a una ecuación combinaciones lineales de los demás conseguiremos que sean cero los a_{ij}, $\forall j > i_0$. Llegaremos a una matriz del estilo:
$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & w_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} & w_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & \dots & & w_m \end{pmatrix}$ de la que podemos deducir lo siguiente:

   A) Si obtenemos alguna fila donde todos los elementos son cero salvo el correspondiente a la columna de los términos independientes, entonces el sistema es **incompatible** (vendría a decir que $f(0_V) \neq 0_{\hat{V}}$ lo que es una contradicción).

   B) Si el número de filas de la matriz de coeficientes donde no todos los elementos son cero es igual al número de incógnitas, "n", el sistema es **compatible determinado**.

   C) Si el número anterior es menor que "n" el sistema es **compatible indeterminado**.

▷ *Nota*: el método de Gauss nos sirve para discutir un sistema comparando los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada. En el caso de que el sistema sea compatible podemos obtener las soluciones por sustitución regresiva, es decir, de la última ecuación independiente se despeja una incógnita y se sustituye en la anterior y así sucesivamente.

▷ **Método de Gauss-Jordan**: se trata de evitar la sustitución regresiva. Para ello eliminaremos de la matriz, en cada ecuación, todas las incógnitas salvo una, tratando de conseguir que la matriz de coeficientes se convierta en diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots c_{1n} & w_1 & & \\ 0 & 1 & & & \dots & w_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donde, si el sistema anterior es compatible determinado tenemos directamente la solución. Si el sistema es compatible indeterminado obtendremos más columnas no nulas que filas. Despejaremos unas incógnitas en función de las otras.

▷ Al resolver sistemas compatibles indeterminados nos encontramos con unas incógnitas en función de otras que tomaremos como parámetros, de forma que al ser los rangos "r", iguales pero menores al número de incógnitas, "n", nos resultarán "$n - r$" parámetros.

▷ **Definición**: el conjunto de valores que verifican las ecuaciones paramétricas constituyen la variedad lineal del espacio vectorial o afín, cuyas ecuaciones explícitas (o paramétricas) son precisamente las soluciones del sistema compatible indeterminado. A esta variedad lineal la llamaremos variedad lineal generada por las ecuaciones.