1. Del numerador, $1 - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$
Del denominador: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, luego $D(f) = (-1, 0) \cup (0, 1)$
Solución: D

2. La función no está definida cuando $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = -3$. $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$
No es continua en $x = -3$ ni en $x = 2$.
En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x+3)} = \frac{4}{5}$.
Solución: A

3. $f'(x) = -\frac{8}{x^3} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente.} \\ x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente.} \end{cases}$
Solución: D

4. $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a \rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$. Si $a = 3$ hay un extremo relativo en $x = 1$.
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1) \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente.} \\ f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ es creciente.} \end{cases}$
Como $f(x)$ pasa de decreciente a creciente en $x = 1$, es un mínimo.
Solución: C

5. El precio de los collares es $540 + 30x$ y el de collares vendidos $50 - x$, donde x es el número de clientes perdidos.
$B(x) = (540 + 30x)(50 - x) = -30x^2 + 960x + 27\,000$
$B'(x) = -60x + 960 \rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow x = 16$
Por tanto, el precio final para que el beneficio sea máximo es 540 + 30 · 16 = 1020 €. La A.
Solución: A

6. $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 e^x \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{e} \\ f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{e} \end{array}\right\} \rightarrow y - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{1}{e}x$$
Solución: A

7. Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{1 - x} = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{1 - x} = +\infty$. $x = 1$ es asíntota vertical.
Asíntotas horizontales:
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{1 - x} = +\infty;\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{1 - x} = -\infty$. No existen asíntotas horizontales.
Asíntotas oblicuas
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 3x}{1 - x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x - x^2} = -1;\ n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - 3x}{1 - x} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x}{1 - x}\right) = 2 \Rightarrow y = -x + 2$$
Solución: B

8. $$\int \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = \int (1+x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}(1+x)^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{1+x} + C$$

Haciendo el cambio: $\begin{cases} t = \sqrt{1+x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx \to 2dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} \\ t^2 = 1+x \Rightarrow x = t^2 - 1 \end{cases}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int (t^2-1)2dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\sqrt{1+x} + C$$

Por tanto:

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 + 2\sqrt{1+x} + C = 4\sqrt{1+x} - \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + C$$

$$\int_0^3 \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}dx = \left(4\sqrt{1+x} - \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right)\Bigg]_0^3 = \left(8 - \frac{16}{3}\right) - \left(4 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

Solución: D

9. Se integra por partes. Tomando:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx$$

La segunda integral vuelve a hacerse por partes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right] = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Solución: C

10. Puntos de corte: $\frac{2}{x} - \frac{5}{2} = 2 - x \Rightarrow x = \frac{1}{2};\ x = 4$

En $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $g(x) > f(x)$, luego:

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{4}\left((2-x) - \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{2}\right)\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{4}\left(\frac{9}{2} - x - \frac{2}{x}\right)dx = \left[\frac{9}{2}x - \frac{x^2}{2} - 2\ln|x|\right]_{\frac{1}{2}}^{4} =$$

$$= (18 - 8 - 2\ln 4) - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{8} - 2\ln\frac{1}{2}\right) \simeq 3{,}7161\ \text{u}^2$$

Solución: B