Función 2 $F(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x-4)}$

Ejercicio 01

Asíntotas verticales: límites infinitos $\lim_{x\to p} F(x)=\pm\infty \quad x=p$

Tenemos dos asíntotas verticales en $x=2$ y $x=4$ dado que ambos valores anulan el denominador $\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}=\pm\infty$ y

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}=\pm\infty$.

Asíntotas horizontales:límites en el infinito $\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad y=A$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}=1$. La asíntota vertical es $y=1$.

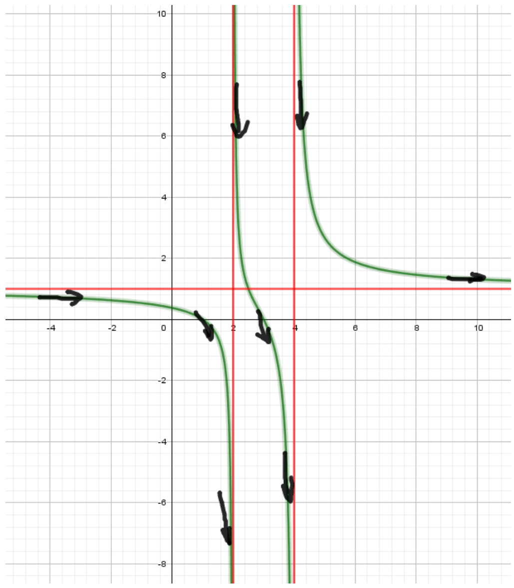
No hay asíntotas oblicuas dado que hay asíntotas horizontales.

Ejercicio 02:

1. **Ceros de la función**: como se trata de una función racional, esta se anula cuando cuando se anula el numerador en $x=1$ y $x=3$.
2. **Singularidades**: como se trata de una función racional, las singularidades (o puntos donde la función no es continua) son aquellos en los que se anula el denominador $x=2$ y $x=4$.
3. **A.V.**: calculado anteriormente $x=2$ y $x=4$.
4. **A.H.**: calculado anteriormente $y=1$.
5. **A.O.**: no hay porque hay horizontales.
6. **Tabla de signos y valores**: ver siguiente hoja.

6. Tabla de signos:

	$(x-1)$	$(x-2)$	$(x-3)$	$(x-4)$	$F(x)$	Representación **A.H.** $y=1$
$(-\infty,1)$	-	-	-	-	+	**+**
1	0	-	-	-	0	**0**
$(1,2)$	+	-	-	-	-	**-**
2	+	0	-	-	n.e.	$-\infty$ **A.V.** $x=2$ $+\infty$
(2,3)	+	+	-	-	+	**+**
3	+	+	0	-	0	**0**
(3,4)	+	+	+	-	-	**-**
4	+	+	+	0	n.e.	$-\infty$ **A.V.** $x=4$ $+\infty$
$(4,+\infty)$	+	+	+	+	+	**+**
						A.H. $y=1$



En las gráficas indicamos con flechas el viaje de la función desde $x=-\infty$ hasta $x\to+\infty$, de izquierda a derecha:

1. Desde $x\to-\infty$ la función viene pegada a la asíntota horizontal $y=1$, tomando valores positivos.
2. Cruza el eje de las x en x=1 tomando valores negativos y se marcha al $-\infty$ pegada a izquierda la asíntota vertical $x=2$.
3. La función viene desde $+\infty$ pegada a la derecha de la asíntota vertical $x=2$, cruza el eje de las x en x=3, tomando valores negativos, y se marcha al $-\infty$ pegada a la derecha de la asíntota vertical $x=4$.
4. La función viene desde $+\infty$ pegada a la derecha de la asíntota vertical $x=4$ y, tomando valores positivos,cuando $x\to+\infty$ la función se pega a la asíntota horizontal $y=1$.

Ejercicio 03:

Calculamos la derivada como cociente de dos funciones

$F(x)=\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x-4)}=\frac{f}{g}$. Sabemos que $F'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$. En nuestro caso:

$f=(x-1)(x-3) \quad f'=(x-1)+(x-3)=2x-4$

$g=(x-2)(x-4)=x^2-6x+8 \quad g'=(x-2)+(x-4)=2x-6$

$$F'(x)=\frac{(2x-4)\cdot(x^2-6x+8)-(2x-6)\cdot(x^2-4x+3)}{(x-2)^2\cdot(x-4)^2}=$$

$$=\frac{(2x^3-12x^2+16x-4x^2+24x-32)-(2x^3-8x^2+6x-6x^2+24x-18)}{(x-2)^2\cdot(x-4)^2}=$$

$$=\frac{(2x^3-16x^2+40x-32)-(2x^3-14x^2+30x-18)}{(x-2)^2\cdot(x-4)^2}=\frac{-2x^2+10x-14}{(x-2)^2\cdot(x-4)^2}$$

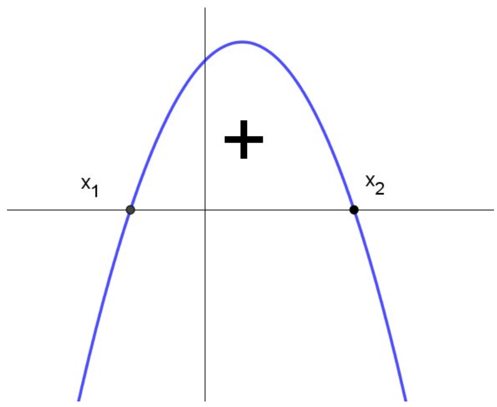
Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, debemos de analizar los signos del numerador y del denominador de F' .

<u>Signo del denominador de</u> F' :

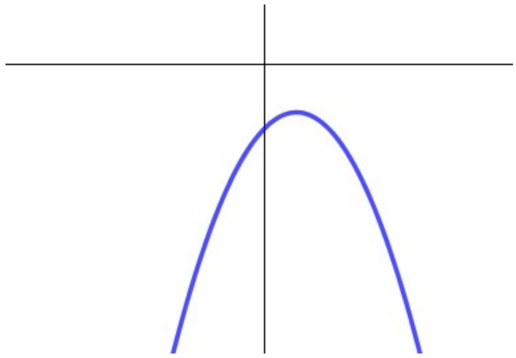
$(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$, dado que el cuadrado de cualquier número es siempre positivo. El **denominador es siempre postivo**.

<u>Signo del numerador de</u> F' :

$-2x^2+10x-14=-2\cdot(-x^2+5x-7)$



Al tratarse de un polinomio de segundo grado con coeficiente negativo en x^2 , se trata de una parábola triste. La función es positiva en el intervalo entre las dos raíces. Calculamos las raices: $x=\frac{5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}$. Como el discriminante (el radicando resultante de aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado) es negativo, el polinomio no tiene raices reales.



Nos encontramos en este caso, en el que el polinomio es siempre negativo dado que la parábola no corta nunca el eje de las x.

Llegamos a la conclusión de que el **numerador es siempre negativo** $-2x^2+10x-14<0$.

Con numerador siempre negativo y denominador siempre positivo la **derivada es negativa** $F'=\dfrac{-2x^2+10x-14}{(x-2)^2\cdot(x-4)^2}<0$. $F'(x)<0$ implica que $F(x)$ es siempre decreciente. Podemos así completar la siguiente tabla:

	$(x-1)$	$(x-2)$	$(x-3)$	$(x-4)$	$F(x)$	Representación **A.H.** $y=1$	Derivada/ crecimiento
$(-\infty,1)$	-	-	-	-	+	**+**	↘
1	0	-	-	-	0	**0**	↘
$(1,2)$	+	-	-	-	-	**-**	↘
2	+	0	-	-	n.e.	$-\infty$ **A.V.** $x=2$ $+\infty$	
(2,3)	+	+	-	-	+	**+**	↘
3	+	+	0	-	0	**0**	↘
(3,4)	+	+	+	-	-	**-**	↘
4	+	+	+	0	n.e.	$-\infty$ **A.V.** $x=4$ $+\infty$	
$(4,+\infty)$	+	+	+	+	+	**+**	↘
						A.H. $y=1$	

Conocer el crecimiento y el decrecimiento nos ayuda a afinar la gráfica cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, es decir, saber si función va por encima o por debajo de la asíntota horinzontal (observa las gráficas):

1. Para que la gráfica cuando $x\to+\infty$ venga por encima de la asíntota horizontal $y=1$ tendría que venir pegada encima de ella, alcanzar un máximo sobre ella y cruzarla en el camino hacia el cero en x=1. Hemos visto que la función no tiene máximos ni mínimos, por lo que **la gráfica cuando** $x\to+\infty$ **va por debajo** de la asíntota horizontal.

2. Para que la gráfica cuando $x\to-\infty$ vaya por encima de la asíntota horizontal tendría cruzarla, tener un mínimo bajo ella y luego se irse pegando poco a poco por debajo. Hemos visto que la función no tiene máximos ni mínimos, por lo que la gráfica **cuando** $x\to-\infty$ **va por encimade** la asíntota horizontal.