TEMA 3: TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA
TIEMPO: 84 — 82

Esquema

1) Introducción
   1.1) Principios para contar
      1.1.1) Principio de adición
      1.1.2) Principio multiplicativo
   1.2) Tres claves para la combinatoria
   1.3) Historia de la combinatoria
2 Variaciones
   2.1) Variaciones sin repetición
      2.1.1) Definición
   2.2) Variaciones con repetición
      2.2.1) Definición
3) Permutaciones
   3.1) Permutaciones sin repetición
      3.1.1) Definición
      3.1.2) Factorial
   3.2) Permutaciones con repetición
      3.2.1) Cálculo de $\mathrm{PR}_n^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$
4) Combinaciones
   4.1) Combinaciones sin repetición
      4.1.1) Definición
   4.2) Número combinatorio
      4.2.1) Propiedades
   4.3) Combinaciones con repetición
   4.4) Cálculo de $\mathrm{CR}_{m,n}$
5) Potencias de binomio y polinomio
   5.1) Potencia de un binomio
   5.2) Potencia de un polinomio
   5.3) Fórmula de Leibnitz

1) Introducción:

▷ Al estudiar matemáticamente situaciones donde intervengan la enumeración o el conteo nos podemos plantear las preguntas ¿cómo realizar la tarea propuesta?, ¿de cuántas formas diferentes?, etc. Si manejamos pocos objetos podemos hacer las cuentas directamente, pero cuando hay muchos o es desconocido su número, necesitamos de otras herramientas más potentes.
La Combinatoria es el instrumento a emplear cuando no es factible contar directamente; proporciona métodos para averiguar la cantidad de agrupaciones que, bajo determinadas condiciones, se pueden formar con los elementos de un conjunto.

Llamamos principios para contar a las técnicas o procedimientos básicos que nos facilitan el hecho de contar. Tenemos dos principios:

1) Principio de adición: para dos o más conjuntos que tomados dos a dos no tengan elementos comunes, el número total de elementos es la suma de los elementos que por separados tiene cada uno.

2) Principio multiplicativo o principio fundamental del cálculo: si un procedimiento puede separarse en k etapas o pruebas tales que cada una tiene $n_1, ..., n_k$ resultados posibles sin que el resultado de una influya en el resultado de las otras, entonces el número total de maneras diferentes en que el procedimiento global se puede realizar es $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$. Como aplicación de este principio tenemos:

   a) Diagramas en árbol: son grafos finitos conexos, sin circuitos y con al menos dos vértices.
   b) Diagramas en cajas: distintas formas en que se pueden "llenar" una serie de cajas independientement unas de otras, calculando las múltiples probabilidades del "llenado" total.

▷ Las tres claves de la combinatoria son las respuestas correctas a las preguntas: ¿cuáles y cuántos elementos iniciales podemos elegir?, ¿se puede repetir?, ¿influye el orden? El tema clave es el desarrollo de métodos para determinar el número de resultados posibles de un cierto experimento. Estos métodos o técnicas se conocen con el nombre de análisis combinatórico.

▷ El origen más remoto de a Combinatoria nos lleva a finales del tercer milenio a.C. con los cuadrados mágicos: cuadrados con cierto numero de casillas de forma que, sin repetir números, sumen igual en fila, columna o diagonal (y que existen $\forall \mathbb{N} - \{2, 6\}$).

▷ En el siglo XII d.C. en la India, Bhaskara en su tratado "Lilavati" escribe que la combinatoria es útil en la poesía, la música y la medicina.

▷ En la Edad Media europea la combinatoria tuvo cierto auge en relación con los místicos judíos y en la relación entre los números y la teología.

▷ Se puede considerar a Blaise Pascal (s. XVII) como el iniciador de la combinatoria moderna, relacionando los números combinatorios con la potencia de un binomio.

▷ Leibniz (s. XVII - s. XVIII) en su obra "*Ars Combinatorica*" supuso que un concepto debe de ser descomponible en los conceptos primitivos que lo integran y las combinaciones entre proposiciones estarían sometidas a reglas fijas lo que daría lugar a un lenguaje universal. Podemos considerar el comienzo de la sistematización de la Combinatoria con Jakob Bernoulli (s. XVII - s. XVIII).

▷ En las primeras décadas del s. XIX tienen lugar un nuevo auge de la misma con Hindenburg, Kamp y Ettinghausen. En el s. XX podemos destacar la Escuela Inglesa.

▷ Actualmente son muchas las ramas de la Matemática (entre otras ciencias) que utilizan técnicas combinatóricas para su desarrollo: álgebra abstracta, topología, teoría de juegos, programación lineal, geometría combinatórica, teoría de la decisión,...

2) Variaciones:

▷ Variaciones sin repetición: consideramos dos conjuntos A y B con cardinales n y m respectivamente. Sea f: A $\to$ B inyectiva (esto implica que $n \leq m$). Al número de aplicaciones inyectivas entre A y B lo notaremos por $V_{m,n}$.

▷ Supongamos $n = 1$, es decir, A $= \{a\}$. Entonces la imagen de a se puede elegir de m maneras distintas, lo que implica: $V_{m,1} = m$.
Tomemos $n = 2$, es decir A $= \{a_1, a_2\}$. La imagen de a_1 se puede elegir de m maneras. Una vez elegida, quedan $m-1$ posibilidades para a_2. Así pues, $V_{m,2} = m \cdot (m-1) = (m-1) \cdot V_{m,1}$.
Supongamos conocidas $V_{m,n-1}$, es decir, el conjunto de aplicaciones inyectivas de $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ en $\{b_1, ..., b_m\}$. Como $|B| = m$ y hemos elegido $n-1$ elementos quedan $m-n+1$ libres, luego tenemos esas posibilidades para a_n. Esto nos dice que el número buscado es:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \ \{\text{notación factorial}\} \ = \frac{m!}{(m-n)!}$$

▷ **Definición**: llamamos variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n, al conjunto formado por las imágenes de todas las aplicaciones inyectivas de un conjunto de n elementos en otro conjunto de m elementos.
Equivalentemente: llamamos..., al conjunto de todas las colecciones de n elementos elegidos entre los m elementos, considerando distintas dos colecciones que difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos. El número de esas variaciones será:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

▷ Variaciones con repetición: consideramos dos conjuntos A y B con cardinales n y m respectivamente. Queremos establecer cuántas aplicaciones en total podemos establecer entre A y B.

▷ **Definición**: llamamos variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, al conjunto formado por las imágenes de todas las aplicaciones de un conjunto de n elementos en otro conjunto de m elementos.
Equivalentemente: llamamos..., al conjunto de todas las colecciones de n elementos elegidos entre los m elementos, repetidos o no, considerando distintas dos colecciones que difieren en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos. El número de esas variaciones será:

$$VR_{m,n} = m^n$$

3) Permutaciones:

▷ Permutaciones sin repetición: consideramos dos conjuntos A y B con n elementos cada uno. Toda aplicación inyectiva f: A $\rightarrow$ B es biyectiva. Luego el número de aplicaciones inyectivas será igual al numero de inyectivas ($V_{m,n}$) y por lo tanto: $V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

▷ **Definición**: llamamos permutaciones sin repetición de n elementos a las variaciones sin repetición de n elementos tomados de n en n. Si el conjunto A tiene n elementos, cada permutación estará formada por los n elementos ordenados, luego dos permutaciones serán diferentes si el orden de sus elementos es distinto.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

▷ Propiedades de los factoriales:

a) $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$

b) $n! \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m = m!$

c) $V_{m,n} = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

d) **Convenio**: $0! = 1! = 1$

▷ Permutaciones con repetición: dada una colección de n objetos entre los que hay α_1 iguales entre sí, α_2 iguales entre sí, ..., α_k iguales entre sí, tales que $\alpha_1 + \ldots \alpha_k = n$, llamamos permutaciones con repetición de n elementos entre los que hay α_1 iguales entre sí,..., α_k iguales entre sí, a los diferentes grupos que se pueden formar con los n objetos en los que aparecen repetidos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ elementos, siendo distintas dos permutaciones cuando guardan distinto orden en sus elementos. A estas permutaciones las notaremos por $PR_n^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$

▷ Cálculo de los valores $PR_n^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$:

- Supongamos que los n objetos son todos diferentes. Entonces obtendríamos un total de $n!$ permutaciones diferentes entre sí.
- Fijemos $n - \alpha_1$ elementos de un cierta permutación. Permutamos los α_1 elementos restantes obteniendo "$\alpha_1!$" permutaciones. Si a continuación sustituimos los α_1 objetos diferentes por α_1 objetos iguales, esas "$\alpha_1!$" permutaciones se convierten en la misma permutación de n objetos entre los que hay α_1 objetos iguales. Por lo tanto, cada "$\alpha_1!$" permutaciones de n objetos se convierte en una misma permutación con repetición de n objetos entre los que hay α_1 iguales. Así pues: $PR_n^{\alpha_1} = \dfrac{n!}{\alpha_1!}$
- Si, además, hay otros α_2 objetos iguales entre sí, por el mismo razonamiento: $PR_n^{\alpha_1,\alpha_2} = \dfrac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2!}$

▷ Y así, pues, en general:

$$PR_n^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!}$$

4) Combinaciones:

$\triangleright$ Combinaciones sin repetición: sea A un conjunto finito de cardinal n. Ahora vamos a considerar el conjunto $P = \{1, 2, ..., p\}$ $(p \leq n)$. Toda inyección de P en A tiene por imagen un subconjunto B de p elementos de A.
El numero total de inyecciones es $V_{n,p}$. Tendremos pues $V_{n,p}$ subconjuntos de p elementos de A. Pero no todos ellos son diferentes en cuanto a los elementos que los componen. Si consideramos el subconjunto B, sus elementos los podemos variar de $p!$ maneras y todas ellas formarán el mismo subconjunto B.

Al número de partes o subconjuntos distintos de A lo notaremos por $C_{n,p}$ o por $\binom{n}{p}$

$$C_{n,p} = \frac{V_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \quad (p \leq n)$$

$\triangleright$ **Definición**: llamamos combinaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p, al conjunto de todas las colecciones de p elementos que pueden formarse con los n elementos dados considerando distintas dos colecciones cuando difieran en uno o más elementos.
Cada combinación sin repetición sera un subconjunto de p elementos formado a partir de los n elementos iniciales, luego el número total de las mismas coincidirá con:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

$\triangleright$ **Definición**: lamamos número combinatorio al numero $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$, donde $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$. Al número n lo llamaremos numerador o base del número combinatorio y al numero p se le llama denominador u orden del número combinatorio.

$\triangleright$ **Convenio**: $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1$

$\triangleright$ **Propiedades**:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c) Fórmula de Stieffel: $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$. **Dem**: se desarrolla la segunda parte y sale el resultado.

d) $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + ... + \binom{p}{p-1} + \binom{p-1}{p-1}$

$\triangleright$ Combinaciones con repetición: al igual que con las permutaciones y las variaciones podemos hablar de combinaciones con repetición. La diferencia es que podremos elegir el mismo elemento varias veces.

▷ **Definición**: llamamos combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, a las diferentes colecciones de n elementos, iguales o distintos, que se pueden formar con los m elementos dados de modo que dos colecciones serán diferentes si difieren en, al menos, un elemento.
Al número de dichas combinaciones lo notaremos por $CR = \binom{m+n-1}{n}$

▷ *Nota*: en este tipo de combinaciones n puede ser mayor que m. Cuando $n \leq m$ las combinaciones sin repetición forman parte de las combinaciones con repetición. Ejemplo: dado el conjunto A $=\{a, b\}$, $CR_{2,3} = \# \left|\{aaa, aab, abb, bbb\}\right| = \binom{2+3-1}{3} = 4$

▷ Cálculo de $CR_{m,n}$: consideramos cada una de las $CR_{m,n}$ formadas a partir de los elementos $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Cada combinación la formamos de manera que los índices sigan el orden natural. Podemos expresar cualquiera de esas combinaciones de la siguiente forma:

Utilizaremos dos símbolos: w y k. Para representar a a_1 en dicha combinación escribiremos w seguida de tantos k como veces se presente a_1 en dicha combinación. Después escribimos otro w que representará a a_2 seguido de tantos k como veces figure a_2 y así sucesivamente, teniendo en cuenta que si algún a_j no se presenta escribiremos solamente w.
Por ejemplo: $\{a_1, \ldots, a_4\}$ y tenemos $a_1a_1a_3$. Escribiremos: $\dfrac{wkk}{a_1}\,\dfrac{w}{a_2}\,\dfrac{wk}{a_3}\,\dfrac{w}{a_4}$

De esta forma, cada combinación viene representada por una expresión que empieza por w y la contiene m veces y tendrá tantas k como el valor de n (y de forma ordenada).

Por otra parte, nos fijamos que si escribimos el primer w quedan por situar los $m-1$ restantes y los k en número igual a n. Luego, en total, quedan por situar $(m-1+n)$ elementos, de los cuales $m-1$ son iguales entre sí y n son iguales entre si también. Según lo que hemos visto en el tema:

$$CR_{m,n} = PR_{m-1+n}^{m-1,n} = \frac{(m-1+n)!}{(m-1)!\; n!} = C_{m-1+n,n} = \binom{n+m-1}{n}$$

5) Potencias de binomio y polinomio:

$\triangleright$ Potencia de un binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, la conocida fórmula de Newton que fue quien la generalizó y, sin embargo, se debe a Niccolo Fontana.

Dem:

n=1: $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a+b$

n=2: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} b^2$

n=3: $(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = \left[\binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} b^2\right] \cdot (a+b) = \binom{2}{0} a^3 + \left[\binom{2}{0} a^2 b + \binom{2}{1} ab^2\right] +$

$+\left[\binom{2}{1} ab^2 + \binom{2}{2} ab^2\right] + \binom{2}{2} b^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$

n$-$1: Supongámosla cierta para $n-1$

n: $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b) = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ y razonamos de manera análoga a como hicimos para $n=3$ para obtener el resultado.

$\triangleright$ **Corolario**: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

Dem:

Se hace $a=b=1$ en el binomio de Newton.

$\triangleright$ Potencia de un polinomio: tratamos de calcular la potencia n-ésima de un polinomio de k sumandos.

$$(a_1 + \ldots a_k)^n = \overbrace{(a_1 + \ldots + a_k) \cdot \ldots \cdot (a_1 + \ldots + a_k)}^{\text{n veces}}$$

Al efectuar los productos obtendremos una sumatoria de factores del tipo:

$a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots a_k^{\alpha_k}$ con $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = n$ donde si a_j no interviene su exponente será cero. Cada factor tendrá un cierto coeficiente, es decir, cuántas veces aparece repetido. Veamos cuál es:

$a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots a_k^{\alpha_k} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \ldots \cdot a_k$ donde, en total, hay n números multiplicándose y, por lo tanto, se trata de:

$$PR_m^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!}$$

Si ahora queremos el número de términos a formar, tendremos que construir todos los términos de la forma $a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\alpha_k}$ donde hay n potencias tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = n$. Tenemos pues que descomponer n en k sumandos de todas las formas posibles, con lo que llegamos a la:

$\triangleright$ Fórmula de Leibniz: $(a_1 + \ldots a_k)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots \alpha_k = n \\ \alpha_j \geq 0}} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!} \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\alpha_k}$