TEMA 1: NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

TIEMPO: 90 — 88

Esquema

1) Introducción

    1.1) Sistemas de contar

    1.2) Invención de las cifras

2 Números naturales

    2.1) Construcción axiomática

    2.2) Método constructivo

        2.2.1) Teorema 1
        2.2.2) Teorema 2
        2.2.3) Definición de $\mathbb{N}$

    2.3) Adición

        2.3.1) Definición
        2.3.2) Proposición
        2.3.3) Propiedades

    2.4) Multiplicación

        2.4.1) Definición
        2.4.2) Proposición
        2.4.3) Propiedades

    2.5) Orden

        2.5.1) Definición
        2.5.2) Orden total
        2.5.3) Propiedades

3) Sistemas de numeración

    3.1) Introducción

        3.1.1) Principio posicional
        3.1.2) El cero

    3.2) Teorema fundamental de la numeración

    3.3) Cambio de sistemas de numeración

1) Introducción:

▷ A lo largo de la Historia de la Humanidad surgen nuevos problemas, nuevas necesidades que requieren respuestas más o menos adecuadas. Uno de los grandes "inventos humanos" son los números (otros son la rueda, el dominio del fuego,...) en atención a tres conceptos básicos:

a) Interés del invento.

b) Herramienta: que resuelve ciertos problemas (eficacia del invento).

c) Proyección del invento: en cuanto a nuevas aplicaciones, en atención a dos bifurcaciones

   c.1) herramienta que, una vez establecida, sirve para resolver nuevos planteamientos que van surgiendo.

   c.2) el estudio de los números y su manejo crea el germen de nuevas aplicaciones en el campo del conocimiento y en el desarrollo de problemas que se plantearán con el tiempo.

▷ El primer paso hacia al invención de los números es aprender a contar o comparar dos magnitudes/cantidades. Pero esto ya lo pueden hacer algunos animales (algunos pájaros distinguen hasta cuatro unidades) y el ser humano desde sus comienzos, también. Al principio sólo distinguía entre uno-dos-muchos y poco a poco va siendo capaz de ir más allá. Sin embargo, esto no significa en absoluto el conocimiento de los números (esto ocurre incluso hoy en día con tribus muy primitivas). Entonces, ¿cómo aprende el hombre a contar? Se establece lo que podemos llamar "correspondencia unidad por unidad" (número de muescas con número de ovejas, un caballo equivale a un guijarro, etc. También se utilizaban partes del cuerpo como las dedos o la muñeca). Al establecer una correspondencia unidad a unidad se empieza a introducir el concepto de orden. Añadir que la percepción de diversas cantidades se da entre otras especies vivas pero la facultad de contar es exclusivamente humana. Contar objetos es atribuir a cada uno de ellos un símbolo (palabra, gesto), así a cada objeto le corresponde una sucesión de símbolos ordenados. La mano del hombre se presenta como la máquina de calcular más sencilla y más natural que existe (y que dará lugar a nuestro sistema de numeración actual).

▷ Pero al principio las personas no contaban de manera abstracta y a agrupar los objetos en relación a una base dada; se recurría al trueque y a ciertos patrones fijos de cambio: "el precio de la novia", ovejas por grano, etc. y no hemos de olvidar que las primeras monedas aparecen en el s.VII a.C. pero el valor de éstas ni siquiera es constante hoy en día, así que a distintas zonas corresponderán distintas concepciones del "cuánto es". Antes de la invención de las cifras podemos observar diversas "máquinas de calcular":

▷ La mano: con los dedos se pueden contar hasta varios millones, pero muy lejos de eso es el uso frecuente que se hace de la mano al contar: se puede llevar un calendario menstrual usando las falanges de los dedos, los niños pequeños suman y restan con los dedos de la mano,....

▷ Cuerdas y nudos: el color de las cuerdas, la posición de los nudos, su grosor,... servían para llevar estadísticas, calendarios, menajes, etc. Muy usados sobre todo como sistema contable en base 10 por los Incas y los Persas.

▷ Muescas: desde muy antiguo (Prehistoria) tenemos restos en lo que hay grupos de muescas hechos sobre hueso que representan cantidades (en Inglaterra el sistema se abolió en el s.XIX).

▷ Guijarros: cálculo viene del latin "*calculus*". Al principio cada guijarro valía por uno, posteriormente el grosor importaría. Este método llevaría a la invención del ábaco.

▷ Invención de las cifras: como hemos visto, cada vez estamos más cerca de que aflore el concepto abstracto de número. Éste vendrá en una sociedad bastante compleja, urbana, que requiere un control de las actividades de la población. De hecho el nacimiento de la escritura y las cifras es el mismo: tener controlados la producción, el comercio y a las personas de la ciudad. Por ello no es de extrañar que los primeros vestigios de escritura no sean poemas (aún faltaría para ello) sino las llamadas *facturas* (tablillas de arcilla en las que se cuentas objetos, animales o personas). Estamos hablando del $\approx$ 3.300 a.C. donde ya los sumerios descubren el concepto abstracto de cifra y de que que tener "un palito vertical" significa x unidades y es más que tener "un palito horizontal".

▷ La primera división conocida (un reparto de cebada) se encuentra en una tablilla en Shuruppak hacia el 2.650 a.C.

▷ Obviamente habrán de pasar miles de años para tener el sistema estructurado de números que tenemos hoy en día (naturales-enteros-racionales-reales-etc.), pero ya se habían puesto las bases para ello.

2) Números naturales:

Para definir los números naturales existen varios caminos. Empecemos por el método axiomático de Peano y después veamos otro partiendo de la Teoría de Conjuntos.

▷ Construcción de los naturales con la axiomática de Peano:

1) El cero ("0") es un número, es decir, $\mathbb{N}$ es no vacío.

2) $\forall x \in \mathbb{N}$ existe uno, y solo un número natural llamado siguiente o sucesor de "x" (en particular, al sucesor de cero lo llamaremos uno "1").

3) $\forall x \in \mathbb{N}$, cero no es su siguiente.

4) Si los siguientes de dos números son iguales, entonces esos números son iguales.

5) Axioma de inducción completa: si un cierto subconjunto de $\mathbb{N}$ contiene al cero y al siguiente de cualquier número de dicho subconjunto, entonces ese subconjunto es, de hecho, todo $\mathbb{N}$.

▷ Otro método para la construcción de los números naturales: está basado en correspondencias entre conjuntos con la misma cantidad de elementos.

▷ **Definición**: dados dos conjuntos, A y B decimos que A es equipotente a B si existe una biyección entre A y B. Lo notaremos por $A\omega B$

▷ **Proposición**: la relación de equipotencia es una relación de equivalencia (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

▷ **Teorema 1**: Si $A\omega B$ y $C\omega D$ con $A \cap C = \emptyset = B \cap D$, se tiene que:

a) $(A \cup C)\omega(B \cup D)$

b) $(A \times C)\omega(B \times D)$

▷ **Teorema 2**: sean dos conjuntos A y B. Se verifica siempre, al menos, una de las siguientes situaciones:

1) A es equipotente a una parte de B

2) B es equipotente a una parte de A

3) Y, si se producen simultáneamente, A y B son equipotentes.

▷ **Definición**: el cardinal o potencia de un conjunto A es una medida del tamaño del conjunto. Dados A y B, se tendrá que $card(A) = card(B) \longleftrightarrow A\omega B$.

▷ **Definición de $\mathbb{N}$**: si tomamos el conjunto de los números que se forman al definir los conjuntos equipotentes (y tomando clases de equivalencia) y nos quedamos con los cardinales finitos, obtenemos el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

▷ **Adición**:

▷ **Definición**: $\forall, b \in \mathbb{N}$ tomamos dos conjuntos A y B disjuntos, siendo $card(A) = a, card(B) = b$. Llamamos suma/adición de "a y b", que denotamos por $a + b$, al cardinal del conjunto $A \cup B$.

▷ **Proposición**: la definición es independiente de los conjuntos tomados.

Dem. Si $A\omega C$ y $B\omega D$ tq $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, entonces $card(A \cup B) = card(C \cup D)$

□

▷ **Nota**: podemos definir la suma a partir de una ley de composición interna, pero es equivalente a la dada.

▷ Propiedades:

1) Asociativa: se verifica por ser asociativa la unión de conjuntos.

2) Elemento neutro: $card(\emptyset) = 0$, $A \cup \emptyset = A \longrightarrow \forall a \in \mathbb{N}, 0 \in N : a + 0 = 0 + a = a$

3) Conmutativa: se verifica por ser conmutativa la unión de conjuntos.

▷ **Multiplicación**:

▷ **Definición**: $\forall, b \in \mathbb{N}$ tomamos dos conjuntos A y B disjuntos, siendo $card(A) = a, card(B) = b$. Llamamos producto de "a y b", que denotamos por $a \cdot b$, al cardinal del conjunto $A \times B$ (el producto cartesiano de A y B).

▷ **Proposición**: la definición es independiente de los conjuntos A y B elegidos.

Dem. Consecuencia del apartado **b)** del **Teorema 1**

□

▷ Propiedades:

1) Asociativa: $\forall a, b \in \mathbb{N}, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Consecuencia de: $A \times (B \times C)\omega(A \times B) \times C$

2) Elemento neutro (llamado unidad): $\forall a \in \mathbb{N}, 1 \in N : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

3) Conmutativa: $\forall a, b, \in \mathbb{N}, a \cdot b = b \cdot a$ pues $(A \times B)\omega(B \times A) \leftrightarrow card(A \times B) = card(B \times A)$

4) Distributiva del producto con respecto a la suma:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Consecuencia de que,tomando $B \cap C = \emptyset, A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

▷ **Orden**:

▷ **Definición**: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tomamos dos conjuntos A y B disjuntos con $card(A) = a, card(B) = b$. Decimos que "$a \leq b$" si podemos construir una aplicación inyectiva de A en B.

▷ **Proposición**: la relación "$\leq$" es una relación de orden en $\mathbb{N}$

Dem. Probemos las tres propiedades que ha de cumplir toda relación de orden.
a) Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \leq a$ pues tenemos la aplicación identidad $\mathrm{Id} : A \longmapsto A$
b) Antisimétrica: $\forall a, b \in \mathbb{N}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$ ¿$\longrightarrow$? $a = b$
Si $a \leq b \longrightarrow \exists f$ inyectiva de A en B.
Si $b \leq a \longrightarrow \exists g$ inyectiva de B en A.
Por tanto, ambas son biyecciones entre A y $B \longleftrightarrow A \omega B \longleftrightarrow a = b$
c) Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, $b \leq c$ ¿$\longrightarrow$? $a \leq c$
Sean $a = card(A)$, $b = card(B)$ y $c = card(C)$
Como $a \leq b \longrightarrow \exists f : A \longmapsto B$ inyectiva.
Como $b \leq c \longrightarrow \exists g : B \longmapsto C$ inyectiva.
Entonces, $g \circ f : A \longmapsto C$ es inyectiva $\longrightarrow a \leq c$

□

▷ **Proposición**: la relación "$\leq$" es una relación de orden total en $\mathbb{N}$, es decir, $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$ o $b \leq a$. Esto nos dice que $(\mathbb{N}, \leq)$ está totalmente ordenado.

Dem. El **Teorema 2** aplicado a $= card(A), b = card(B)$ nos asegura que, al menos, existe una de las inyecciones.

□

▷ Otras propiedades involucrando al orden:

1) $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b \longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$

2) $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b \longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a + k \leq b + k$

3) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$ con $a \leq b$, $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

4) $\forall a, b \in \mathbb{N}$ con $a \leq b \longleftrightarrow a \cdot k \leq a \cdot k$

5) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$ con $a \leq b$, $c \leq d \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d$

▷ **Nota**: el principal problema de construir un sistema axiomático que sea capaz de codificar la aritmética de los naturales son los Teoremas de Incompletitud de Gödel.

3) Sistemas de numeración:

▷ Actualmente expresamos los números en base 10 y además aprovechamos el principio posicional y la existencia del cero para representar grandes números (y operar con ellos) de manera muy cómoda y efectiva. Pero no siempre ha sido así (ni siquiera en la actualidad todas las personas trabajan en base 10). Hagamos un breve repaso de estos otros sistemas de numeración:

▷ Base 5: comerciantes de Bombay y algunos pueblos de África y Oceanía la usan.

▷ Base 20 (vigesimal): los esquimales, mayas, aztecas, tribus de Centroáfrica,...

▷ Base 12: considerada "mejor" que la base 10 en el sentido de que tiene más divisores. Primero por sumerios y presente en muchos pueblos europeos en vísperas de la Revolución Francesa. 1 pie = 12 pulgadas, 1 pulgada = 12 líneas, etc. Hoy en día todavía compramos los huevos por docenas.

▷ Base 60 (sexagesimal): no se sabe si su origen fue la combinación de las 12 y 5 o que $60 = m.c.c(12, 10)$. Lo que se sabe es que los sumerios la empleaban ya y después pasaría al resto de Mesopotamia. Hoy día medimos el tiempo y los ángulos en esta base.

▷ Base 10: usada por los antiguos egipcios, griegos, romanos,...

En los sistemas jeroglífico egipcio, griego, romano y hebreo las cifras tienen un valor fijo, independiente de su posición. Es por esto (falta del principio posicional) que los contables romanos y medievales utilizaban el ábaco para las cuentas. En este sentido, el sistema de numeración romano es un retroceso en comparación con otros.

▷ **El principio posicional**: descubierto hace unos 4.000 años en Mesopotamia, se basa en que el valor de las cifras viene dado por su posición en la escritura del número correspondiente. Esto permite representar cualquier número (por grande que sea) con un número muy pequeño de cifras.

Sólo tres civilizaciones lo descubrieron: chinos, mayas y en Mesopotamia. Los chinos hace unos 2.000 años con una base decimal y los mayas en los siglos III,IV d.C. Mayas y mesopotamios, además, inventaron el cero. Los mayas no le dieron ninguna posibilidad operacional, pero en Mesopotamia si se la dieron (aunque no lo concibieran como un número).

▷ **El cero**: no seria hasta el s.V d.C. cuando los hindúes le dieron al cero el valor de número (cantidad nula) que tiene hoy en día y en la obra del s. VII de Brahmagupta observamos que ya aparece en las operaciones como un número más.

En el s.XVII Blaise Pascal da, por primera vez, una definición general de los sistemas de numeración en base m con $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

▷ **Definición**: llamamos sistema de numeración al conjunto de normas y convenios que se utilizan para escribir cualquier número con un conjunto pequeño de símbolos. En nuestro caso (base 10):

a) Utilizamos 10 símbolos/guarismo/cifras: los 10 primeros números naturales (del cero al nueve). Los llamaremos unidades de primer orden.

b) Llamamos decena o unidad de segundo orden a cada agrupación de los diez primeros números naturales sin contar el cero.

   b.1) Llamamos centena o unidad de tercer orden a diez decenas y así sucesivamente.

   b.2) Nuestra base es la base 10. La unidad de orden "n" se expresa como 10^{n-1}.

c) Cualquier número se expresa como unidades de diversos órdenes. El número de unidades de cada orden nunca es superior a 9 (sin contar el 0 para el orden cero).

d) Toda cifra escrita a la izquierda de una dada, representa a las unidades del orden inmediatamente superior (principio posicional).

$\triangleright$ **Teorema Fundamental de la Numeración** (expresión polinómica de cualquier numero): sea $b \geq 2$ base de nuestro sistema de numeración. $\forall a \in \mathbb{N}$ se tiene que $a = a_0 \cdot b^0 + \ldots + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_n \cdot b^n$ de manera que $a_p \neq 0$ y $a_j < b, \forall j$. Esta expresión es, además, única.

Dem. Si $a < b \rightarrow a = a \cdot b^0$
Si $a \geq b$, dividimos a entre b y vamos dividendo sucesivamente los cocientes que van resultando hasta que obtengamos un último cociente que sea menor que b.

$$\begin{aligned}
&a = q_1 \cdot b + a_0 \text{ con } a_0 < b \\
&q_1 = q_2 \cdot b + a_1 \text{ con } a_1 < b \\
&\vdots \\
&q_n = a_n \text{ con } a_n < b
\end{aligned}$$

y obtenemos la fórmula sin más que eliminar los q_j. La expresión polinómica es única pues si hubiese dos distintas: $a = a_0 \cdot b^0 + \ldots + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_n \cdot b^n = a = \widehat{a_0} \cdot b^0 + \ldots + \widehat{a_{n-1}} \cdot b^{n-1} + \widehat{a_n} \cdot b^n$ sacamos factor común b y nos damos cuenta de que se ha de cumplir que $a_0 = \widehat{a_0}$. Después sacamos factor común b^2 e implica que $a_1 = \widehat{a_1}$ y así hasta probar que $a_j = \widehat{a_j}, \forall j$

$\square$

$\triangleright$ Como $a = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b^j$ podemos escribirlo en forma de $(n+1)$-upla: $a = (a_0, \ldots, a_n) = (a_n, \ldots, a_0)$.

$\triangleright$ **Propiedades**:

a) Sea $a = (a_0, \ldots, a_n)$ en base $b \Longrightarrow b^k \cdot a = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{\leftarrow k \rightarrow}, a_0, \ldots, a_n)$

b) Todo número a de n cifras cumple que $b^{n-1} \leq b^n$ (y también se cumple el reciproco).

c) Sean $a, \widehat{a}$ dos números en base b de n y m cifras respectivamente y tal que $m < n$. Entonces se cumple que $\widehat{a} < a$.

d) Sean $a, \widehat{a}$ dos números en base b. Supongamos que tienen el mismo número de cifras. Entonces $\widehat{a} < a \longleftrightarrow$ la primera cifra, empezando por la izquierda, de $\widehat{a}$ que sea distinta a la de la correspondiente en "a" es menor que la de "a".

$\triangleright$ Cambio de sistema de numeración: se trata de pasar de una base a otra, es decir, de expresar un número dado en una base distinta a la inicial.

$\triangleright$ 1) Paso a base decimal: operamos en la expresión polinómica del número dado en base b.
Por otra parte, conocemos que el valor numérico de un polinomio para $x = k$ es el resto de la división

del polinomio entre $x - k$. Luego, si el número (expresado polinómicamente en la variable "x") lo dividimos entre $x - b$ el resto obtenido será ese número en base 10. Por ejemplo:

▷ 2) Paso de base decimal a base b: se trataría de obtener la expresión polinómica en b del número dado. Usando el Tª Fundamental de la Numeración dividimos sucesivamente el numero dado entre b hasta obtener un cociente menor que b. El número en base b es el formado por el último cociente obtenido y los restos escritos en orden inverso a su obtención. Por ejemplo:

▷ 3) Paso entre dos bases distintas de la decimal: se puede pasar de la primera a la decimal y de ésta a la segunda base.