TRABAJO 1º BCS 21 DE MAYO

1º EJERCICIOS PÁGINA 103: 6 y PÁGINA 179: 33

2º SOLUCIÓN PÁGINA 169: 1

Página 169

1 Determina las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{3x+1}{x-2}$ **b)** $y = \frac{3x^2-7}{x-2}$ **c)** $y = \frac{1}{x}$ **d)** $y = -\frac{1}{x^2}$ **e)** $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1,99 \rightarrow \frac{3 \cdot 1,99+1}{1,99-2} = -697 \rightarrow \lim_{x \to 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2,01 \rightarrow \frac{3 \cdot 2,01+1}{2,01-2} = 703 \rightarrow \lim_{x \to 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

Por tanto, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Para saber la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, debemos tener en cuenta que $y = \frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}$.

Cuando $x \rightarrow +\infty$ el cociente $\frac{7}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

CONTINUA...

b) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 7}{x - 2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \rightarrow \dfrac{3 \cdot 1{,}99^2 - 7}{1{,}99 - 2} = -488{,}03 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2 - 7}{x - 2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \rightarrow \dfrac{3 \cdot 2{,}01^2 - 7}{2{,}01 - 2} = 512{,}03 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2 - 7}{x - 2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 7}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 7}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas de este tipo.

Ahora estudiamos las asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{3x^2 - 7}{x - 2} = 3x + 6 + \frac{5}{x - 2}$$

La recta $y = 3x + 6$ es una asíntota oblicua ya que $\dfrac{5}{x - 2}$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Cuando $x \rightarrow +\infty$ el cociente $\dfrac{5}{x - 2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota oblicua.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

CONTINUA...

c) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{1}{-0{,}01} = -100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{1}{0{,}01} = 100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, la función es positiva y está por encima de la asíntota horizontal. Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función es negativa y está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

d) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{-x^2} = \dfrac{1}{0} = -\infty$ porque la función siempre toma valores negativos.

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Como la función siempre toma valores negativos, está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

CONTINUA...

e) La función está definida cuando $x^2 - 9 > 0$, es decir, cuando $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En los puntos -3 y 3 se producen divisiones entre 0. Vamos a estudiar en ellos la existencia de asíntotas, pero solo podremos calcular límites por uno de los lados en cada punto.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Porque la función siempre es positiva. Luego las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es claramente una asíntota horizontal porque $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$.

Tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$, la función queda por encima de la asíntota horizontal por tomar valores positivos.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.