TEMA 25: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDADES. TEOREMA DE BOLZANO. RAMAS INFINITAS

TIEMPO: 90 — 87

Esquema

1) Introducción
   1.1) Antigua Grecia
   1.2) Análisis infinitesimal
   1.3) Fundamentos del Análisis
2 Límites
   2.1) Definición de límite
   2.2) Teorema
   2.3) Propiedades + álgebra de límites
   2.4) Infinitésimos
3) Asíntotas
   3.1) Definición + a. horizontal + a. vertical + a. oblicua
4) Continuidad
   4.1) Definición ($\times 3$)
   4.2) Discontinuidades
      4.2.1) Evitable
      4.2.2) Inevitable de primera especie
      4.2.3) Inevitable de segunda especie
5) Teorema de Bolzano
   5.1) Definición
   5.2) Teorema de acotación
   5.3) Teorema de Weierstrass
   5.4) Teorema de Bolzano
   5.5) Teorema de los Valores Intermedios
   5.6) Continuidad uniforme
      5.6.1) Definición
      5.6.2) Teorema de Heine

1) Introducción:

▷ Antigua Grecia: en la construcción de la teorías matemáticas en la Grecia Antigua muy temprano se diferencia una clase específica de problemas para la solución de los cuales resultaba necesario investigar los pasos al límite, los procesos infinitos,... . La revelación de la inconmensurabilidad de las magnitudes ya propuso la tarea de una explicación racional de problemas semejantes.
Un ejemplo de la búsqueda de solución a este problema fue la escuela atomística con Demócrito. Pero las paradojas de Zenón mostraron que hacía falta "algo más" que las consideraciones atomísticas simples.
Otro ejemplo consiste en el método de exhaustión (Eudoxo), herramienta fundamental del duodécimo libro de los "Elementos" (Euclides). Este método es, históricamente, la primera forma del método de límites.
El rigor lógico de este sistema no sería superado hasta el siglo XIX.

▷ Análisis infinitesimal: la aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de una largo proceso cuya esencia consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elemento del cálculo diferencial, integral y la teoría de las series.
Las causas que motivaron este proceso fueron las exigencias de la mecánica, la física y la astronomía. En la solución de estos problemas y en la búsqueda de métodos más generales está el germen del análisis infinitesimal y muchos de los elementos del Análisis.
El análisis infinitesimal y el concepto de límite se encuentran por primera vez relacionados en el libro de Newton "Elementos matemáticos de la filosofía natural", aunque de manera no muy rigurosa y oscura. Hacía falta seguir profundizando.

▷ Fundamentos del Análisis: el proceso de construcción de los fundamentos del Análisis Matemático sobre la teoría de los límites se reveló claramente en los años 20 del siglo XIX con las conferencias de Cauchy en la Escuela Politécnica de París. En éstas, el concepto de límite se convierte en algo puramente aritmético, sin apoyo geométrico.
Su definición de límite (que es la intuitiva, la que a todos nos cuentan) es más verbal que numérica. La continuidad se trata como la existencia de la correspondencia de un incremento infinitesimal de la función a un incremento infinitesimal del argumento.
Pero una investigación más profunda exigirá (como hoy sabemos) resultados de la Teoría de Conjuntos y Teoría de las Funciones de Variable Real. Los méritos en esta rama pertenecen a Bolzano (aunque sus trabajos verían la luz mucho después que los de Cauchy y Weierstrass).
Por ejemplo, Bolzano refutó la idea de que una función continua ha de tener derivada en todo punto salvo en un número finito de ellos.

▷ Karl Weiesrtrass (ss. XIX - XX): sus trabajos sobre la aritmetización del Análisis completaron los de Bolzano, Abel y Cauchy y serían conocidos por sus enseñanzas en la Universidad de Berlín. Fue él quien dio la definición "$\epsilon - \delta$" de límite y es menos ambigua (y por tanto más precisa) que las anteriores de Cauchy y Bolzano.
Weierstrass mostró a finales del s.XIX una función que no era diferenciable en ningún punto y continua en su dominio (las funciones de Bolzano y Riemann, aunque anteriores, no habían llamado la atención).
Estas funciones (y otras posteriores) volvieron a plantear un completo examen de los fundamentos del Análisis hasta los tiempos actuales.

2) Límites:

$\triangleright$ sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$, entonces:

$\triangleright$ **Definición**: decimos que la función $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ tiene por límite $L \in \mathbb{R}$ cuando "x" tiende a "x_0" si: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $0 \leq |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$

$\triangleright$ Esta definición viene a decir que para cualquier entorno del límite existe un entorno reducido de "x_0" tal que las imágenes de todos los puntos del entorno de la variable que estén en A, se encuentren en el entorno del límite. Escribiremos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\triangleright$ *Nota*: "x_0" no tiene por qué pertenecer al dominio A de la función, sólo con que haya una sucesión de puntos que converja a él nos basta. También podríamos haber definido los límites por la izquierda y derecha y decir que hay límite cuando ambos son iguales a L.

$\triangleright$ **Teorema**: sea $x_0 \in A'$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \{x_n\} \in A$ tq $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \mapsto x_0$ tenemos $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$

Dem. Primero $\Rightarrow$: sea $|f(x) - L|\epsilon$ para $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$. Como $\{x_n\} \mapsto x_0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq m$, $|x_n - x_0| < \delta$, por lo que $|f(x_n) - L| < \epsilon \leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$
Segundo $\Leftarrow$: supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L \leftrightarrow \exists x \in A$ tq $0 < |x - x_0| < \delta$ tq $|f(x) - L| \geq \epsilon$ para ciertos $\epsilon > 0$ y $\forall \delta > 0$. Sea $\delta = 1/n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y consideramos "x_n" tal que para $\delta = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ se verifique que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Por un lado $\{x_n\} \mapsto x_0$ y por otro lado $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en contradicción con la hipótesis, entonces: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\square$

$\triangleright$ *Nota*: este teorema nos simplifica mucho las cosas pues, si llamamos $a_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$, $\{x_n\} \mapsto x_0$, ahora no tenemos más que ver la sucesión $\{a_n\}$ de las imágenes de f. Es decir, es equivalente decir que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, a la convergencia $\{a_n\} \mapsto L$. Esto nos permite aplicar todos los conocimientos de sucesiones y después leerlos en clave de funciones.

$\triangleright$ **Propiedades**:

1) Si existe el límite de $f(x)$ en $x_0 \in A$, entonces dicho límite es único.

2) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \to \exists \mathcal{V}(x_0)$ tq $f(x)$ está acotada en $\mathcal{V}(x_0) \cap A$

3) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\exists \mathcal{V}(x_0)$ tq $f(x) \cdot L > 0$, $\forall x \in \mathcal{V}(x_0)$

4) Si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x)$ y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}(x_0) \to$ ambos límites coinciden.

5) Lema del sándwich: si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}(x_0) \cap A$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$ $\to \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

6) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists \mathcal{V}(x_0)$ tq $\forall x_1$, $x_2 \in \mathcal{V}(x_0) \cap A \to |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

▷ Álgebra de Límites: es la misma que el álgebra de límites para sucesiones reales con el añadido del punto **(5)**:

1) El límite de la suma es la suma de los límites.

2) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \to \lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot L$, $\forall k \in \mathbb{R}$

3) El límite del producto es el producto de los límites.

4) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0 \to \lim_{x \to x_0} 1/f(x) = 1/L$

5) Si "f" es una función continua: $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f\big(\lim_{x_n \to x_0} x_n\big) = f(\{x_n\}) = f(x_0) = L$

▷*Nota*: obviamente, todas las indeterminaciones que surgen con sucesiones van a surgir aquí también: 0^0, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$,...

▷ Infinitésimos:

▷ **Definición**: decimos que $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \mapsto x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

▷ Dos infinitésimos son del mismo orden cuando $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ es una constante finita no nula. Si dicha constante es **1** diremos que son equivalentes. Si el límite es **cero** se dice que el primero es de orden superior y si el cociente tiende a **infinito** que el primero es de orden inferior. Podemos establecer una relación de equivalencia entre infinitésimo diciendo que $f(x) \sim g(x)$ si son del mismo orden.

▷*Nota*: un límite no se ve afectado si se sustituye un infinitésimo por otro equivalente.

3) Asíntotas:

$\triangleright$ Podemos aumentar el concepto de límite y considerarlo en $[-\infty, +\infty]$. A partir de aquí podemos desarrollar el tema de qué entendemos por límites infinitos pero sería redundante con la teoría de sucesiones que ya conocemos. Sin embargo quiero destacar unas situaciones que se dan con sucesiones y no les prestamos mucha atención.

$\triangleright$ <u>**Definición**</u>: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq \pm\infty \longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists k > 0$ tq $\forall x > k, |f(x) - L| < \epsilon$

$\triangleright$ <u>**Definición**</u>: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \neq \pm\infty \longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists k > 0$ tq $\forall x < -k, |f(x) - L| < \epsilon$

$\triangleright$ *Nota*: si L vale $\pm\infty$ se formula igual que con las sucesiones divergentes. Ahora podríamos hablar de las indeterminaciones, pero sería volver sobre sucesiones reales y nosotros queremos hablar sobre funciones. También puede darse el caso de que haya límites que no existan como $\lim_{x\to+\infty} \cos(x)$

$\triangleright$ <u>Asíntotas</u>: se trata de rectas particulares que son tangentes a la función cuando $x \mapsto \pm\infty$ o $f(x) \mapsto \pm\infty$ (todavía no hemos definido el concepto de derivada, así que la noción de recta tangente no puede ser muy precisa). Hay tres clases de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

$\triangleright$ <u>Asíntotas verticales</u>: son rectas de ecuación $x = a$ que se obtienen cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Por ejemplo, $\tan(x)$ para $a = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Una función no puede cortar a sus asíntotas verticales.

$\triangleright$ <u>Asíntotas horizontales</u>: son rectas de ecuación $y = a$ que se obtienen cuando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$. Por ejemplo, $\frac{1}{x}$ tiene una asíntota horizontal $(y = 0)$ cuando $x \mapsto +\infty$ o $x \mapsto -\infty$.
Una curva puede tener hasta dos asíntotas horizontales $(x \mapsto +\infty, x \mapsto -\infty)$ y puede cortarlas sin problemas: $sen(x)$ tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal y la corta infinitas veces.

$\triangleright$ <u>Asíntotas oblicuas</u>: son rectas de ecuación $y = m \cdot x + n$ $(m \neq 0)$ tales que:
$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - m \cdot x - n\big) = 0$. Los valores "$m$" y "$n$" vienen dados por:
$m = \lim_{x\mapsto\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\mapsto\infty}\big(f(x) - m \cdot x\big)$

Dem. Primero "m": $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - m\cdot x - n\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\big(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\big) = 0 \longleftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$
Segundo "n": de lo anterior, $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - m \cdot x - n\big) = 0 \longleftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x) - m \cdot x\Big) = n$

$\square$

$\triangleright$ Puede ocurrir que $m \neq 0$ y $n = \infty$ (para $f(x) = \sqrt{x} + x$ por ejemplo) en cuyo caso no presenta asíntota.
Una función puede tener a lo sumo dos asíntotas oblicuas, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$. Obviamente, si una función presenta una asíntota oblicua en un extremo no puede presentar una asíntota horizontal en dicho extremo y viceversa.

4) Continuidad:

$\triangleright$ Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, decimos que "$f$" es continua en $x_0 \in A$ si para cualquier entorno de $f(x_0)$, $]f(x_0) - \epsilon,\, f(x_0) + \epsilon[$, existe un entorno de x_0, $]x_0 - \delta,\, x_0 + \delta[$ tal que todos los elemento los elementos del entorno $\cap A$ tengan su imagen en $]f(x_0) - \epsilon,\, f(x_0) + \epsilon[$. En otras palabras:

$\triangleright$ **Definición**: f es continua en x_0 si $\forall V(f(x_0), \epsilon)$, $\exists V(x_0, \delta)$ tal que $\forall x \in V(x_0, \delta) \cap A \rightarrow f(x) \in V(f(x_0), \epsilon)$

$\triangleright$ **Definición ($\epsilon - \delta$)**: f es continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta \rightarrow$ $\rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$\triangleright$ **Definición**: f es continua en x_0 si $\forall x \in A$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\triangleright$ **Definición**: f es continua por la izquierda (derecha) en $x_0 \in A$ si:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x - x_0 < \delta$ $(x_0 - x < \delta) \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$\triangleright$ **Proposición**: f continua en $x_0 \longleftrightarrow f$ continua por la derecha y por la izquierda en x_0

$\triangleright$ **Propiedades**:

1) f continua en $x_0 \in A \longleftrightarrow \forall \{x_n\} \in A$ tq $\{x_n\} \rightarrow x_0$, se cumple que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$
2) Si f es continua en $x_0 \in A \rightarrow \exists V(x_0)$ tal que $f(x)$ está acotada.
3) Si f es continua en $x_0 \in A$, no es un punto aislado y $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno de x_0 donde $f(x_0) \cdot f(x) > 0$

$\triangleright$ Discontinuidades: dada $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, no tiene por qué ser continua; hay funciones que son discontinuas en todos sus puntos como la función de Dirichlet: $f(x) = \{0$, si $x \in \mathbb{Q}$, 1 si $x \notin \mathbb{Q}\}$

$\triangleright$ **Definición**: diremos que una función es discontinua en x_0 si no es continua en x_0

$\triangleright$ Podemos clasificar las discontinuidades en tres categorías: evitables, inevitables de primera especie e inevitables de segunda especie.

$\triangleright$ Discontinuidades evitables: supongamos que los límites laterales en x_0 existen, son finitos y son iguales (aquellos límites que tengan sentido y $x_0 \neq \pm\infty$), pero $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. En este casi diremos que f presenta una discontinuidad evitable en x_0. En este caso podemos definir $g : A \mapsto \mathbb{R}$ continua por: $g(x) = \{f(x)$ si $x \neq x_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)\}$. Por ejemplo: $f(x) = \{x,\, x \neq 0$, 1 si $x = 0\}$

$\triangleright$ Discontinuidades inevitables de primera especie: si existen los límites laterales (finitos o infinitos) en x_0 pero no son iguales decimos que la discontinuidad es de primera especie, La distancia entre ambos se llama salto de $f(x)$ en x_0. Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x < 0, \\ \\ 0, \text{ si } x \geq 0, \end{cases}$

$\triangleright$ Discontinuidades inevitables de segunda especie: cuando alguno (o ambos) de los límites laterales no exista. $f(x) = \begin{cases} sen(\frac{1}{x}), \text{ si } x \neq 0, \\ \\ 6, \text{ si } x = 0, \end{cases}$

5) Teorema de Bolzano:

▷ **Definición**: decimos que $f(x)$ es continua en $[a,\, b]$ si se verifica:

1) Es continua para cualquier punto del interior del intervalo.

2) Es continua por la derecha en a y por la izquierda en b. Es decir, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

▷ **Teorema de acotación**: toda función continua $f(x)$ en $[a,\, b]$ está acotada en $[a,\, b]$

Dem. supongamos que no está acotada y dividimos $[a,\, b]$ en dos partes. En alguna de ellas no estará acotada. Tomamos esa mitad y la llamamos: $[a_1,\, b_1] \subset [a,\, b]$. Como en $[a_1,\, b_1]$ no está acotada repetimos el proceso obteniendo una sucesión de intervalos encajados en los que la función no está acotada. Sea $\alpha \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [a_j,\, b_j]$. Aquí la función es continua y, por construcción, cualquier entorno suyo no está acotada, pero eso contradice que $f(x)$ sea continua (pues continua $\to$ acotada en un entorno por la **propiedad 2**).

□

▷ *Nota*: no se puede debilitar ninguna de las hipótesis, por ejemplo:

a) Si no exigimos $[a,\, b]$ compacto: $f(x) = 1/x$ en $]0,\, 1]$ es continua pero no acotada.

b) $sen(1/x)$ en $[-1,\, 1]$ está acotada pero no es continua en $x = 0$

▷ **Teorema de Weierstrass**: toda función continua en un intervalo cerrado $[a,\, b]$, alcanza su máximo y mínimo absolutos.

Dem. Probémoslo para el máximo y el mínimo se hace de manera análoga.
f continua en $[a,\, b] \to f$ acotada en $[a,\, b]$. Sea $M =$Sup$(f(x)$ tq $x \in [a,\, b])$ y veamos que, de hecho, es un máximo. Supongamos que $\nexists \alpha \in [a,\, b]$ tq $f(\alpha) = M \to g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ es continua en $[a,\, b]$ (y positiva además) $\to g$ está acotada en $[a,\, b] \to \exists K > 0 :\ 0 < g(x) < K,\ \forall x \in [a,\, b]$
$\frac{1}{K} < \frac{1}{g(x)} = M - f(x) \to f(x) < M - \frac{1}{K} < M$, entonces, $M - \frac{1}{K} <$ Sup$(f(x) :\ x \in [a,\, b]) = M$ y $f(x) < M - \frac{1}{K} \Rightarrow$ contradicción con que M sea el supremo de $f(x)$.

□

▷ **Teorema de Bolzano**: sea $f : [a,\, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe, al menos un valor $\alpha \in [a,\, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$

Dem. Sea $A = \{x \in [a,\, b]$ tq $f(x) < 0\}$, que no es vacío ($a \in A$) y está acotado superiormente (por b por ejemplo). Entonces $\exists s =$ Sup(A). Si $f(s) < 0 \to \exists \delta > 0$ tq $f(s + \delta) < 0$ (por ser f continua, es la **propiedad 3**) $\to$ contradiciendo que s es el supremo $\to f(s) \geq 0$.
Sea $B = \{x \in [a,\, b]$ tq $f(x) > 0\}$, que no es vacío ($b \in B$) y está acotado inferiormente (por a por ejemplo). Entonces $\exists m =$ Ínf(B). Si $f(m) > 0 \to \exists \delta > 0$ tq $f(m - \delta) > 0$ (por ser f continua, es la **propiedad 3**) $\to$ contradiciendo que m es el ínfimo $\to f(m) \leq 0$.
Pero, entonces, $m \leq s$ por un lado y, por otro, $m \geq s \to m = s \to f(s) = f(m) = 0$.
Hemos supuesto $f(a) < 0 < f(b)$. Si fuera al revés razonaríamos igual o tomaríamos $-f$ y aplicaríamos lo anterior.

□

▷ **<u>Teorema de los Valores Intermedios</u>**: si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua, entonces recorre todos los valores entre su máximo y su mínimo absolutos. Es decir, $\exists \alpha \in [a, b]$ tq $\forall t \in [m, M]$, $f(\alpha) = t$

Dem. Por el Tª de Weierstrass, $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = M$, $f(\beta) = m$.
$\forall t \in]m, M[$ construimos $g(x) = f(x) - t$ y, como es continua, $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $g(\beta) < 0$ y $g(\alpha) > 0 \rightarrow$ aplicamos el Tª de Bolzano para obtener $x_0 \in [a, b]$ tq $g(x_0) = 0 \longleftrightarrow f(x_0) = t$

□

▷ **<u>Definición</u>**: $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es un <u>homeomorfismo</u> si cumple:

a) $f(x)$ es biyectiva entre $A \longleftarrow f(A)$

b) $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son continuas en A y $f(A)$ respectivamente.

▷ **<u>Proposición</u>**: sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Equivalen:

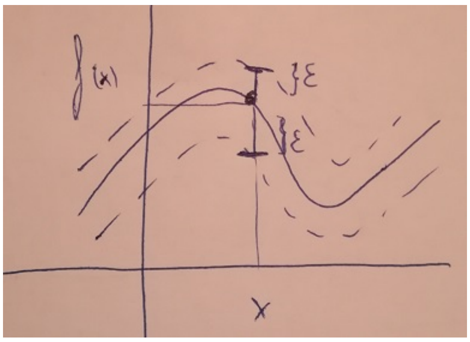
1) f es homeomorfismo.

2) f es estrictamente monótona.

▷ Si representamos $C\big([a, b]\big)$ al conjunto de todas las funciones continuas en $[a, b]$, podemos dotarlo de la estructura de espacio vectorial definiendo $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ (además, podemos definir el producto de dos funciones como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$) y se observa que "$f + g$", "$\lambda f$"$\in C\big([a, b]\big)$ y que se cumplen todas las propiedades para que sea espacio vectorial. Si le añadimos el producto de funciones (que claramente $(f \cdot g) \in C\big([a, b]\big)$) lo dotamos de estructura de álgebra conmutativa con elemento unidad. También se podrían definir otras operaciones, cuando tuvieran sentido, como la composición "$f \circ g$" o la división f/g que pertenecen a $C\big([a, b]\big)$.

▷ **<u>Definición</u>**: sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función. Decimos que <u>f es uniformemente continua en I</u> si: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq si $|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, $\forall x, y \in I$

▷ *Nota*: toda función uniformemente continua en $A \subseteq \mathbb{R}$ es continua en A. Esta noción no depende del punto así pues no tiene sentido hablar de la continuidad uniforme en un punto. No toda función continua es uniformemente continua (por ejemplo, $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$).



▷ **<u>Teorema de Heine</u>**: toda función continua definida en un compacto es uniformemente continua.

Dem. Consecuencia del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue (compacto en $\mathbb{R} \longleftrightarrow$ cerrado y acotado)

□