TEMA 19: DETERMINANTES. PROPIEDADES. APLICACIONES AL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

TIEMPO: 105 — 92

Esquema

1) Introducción
   1.1) Antigüedad: Mesopotamia + Egipto
   1.2) Antigüedad: China
   1.3) ss.XVII-XVIII
   1.4) s.XIX
2 Determinantes
   2.1) Formas bilineales
      2.1.1) Definición + alternada
      2.1.2) Determinante 2×2
   2.2) Formas multilineales
      2.2.1) Definición + alternada
      2.2.2) Signatura
      2.2.3) Definición: determinante
3) Propiedades
   3.1) $\det(A) = \det(A^t)$
   3.2) Propiedades 2 a 10
4) Aplicaciones
   4.1) Cálculo del determinante
   4.2) Cálculo de la matriz inversa
   4.3) Rango de una matriz y aplicaciones

1) Introducción:

▷ Antigüedad: Mesopotamia y Egipto: desde la Antigüedad los hombres han intentado resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones (cuestiones de regadío, impuestos, repartos, cosechas,...). Ya en el Antiguo Egipto y en Babilonia se consiguieron resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

▷ Antigüedad: China: en las antiguas China e India también se plantean estas cuestiones y sabemos que en China se conocía la resolución de sistemas lineales de ecuaciones usando determinantes (ellos no los llamaban así). Esos tratados son más de mil años anteriores a la aparición en Europa de los resultados análogos.
Los chinos, además, siempre fueron muy aficionados a los diseños armónicos y no es de extrañar que el primer ejemplo de cuadrado mágico se lo debamos a ellos (según la leyenda estaba inscrito en el caparazón de una tortuga de río). El interés por este tipo de modelos es lo que llevó al método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Ellos operaban sobre las columnas (las filas no tenían el mismo tratamiento) del mismo modo que hacemos con el método de Gauss.

▷ ss.XVII-XVIII: el primero en intentar sistematizar los sistemas lineales de ecuaciones fue Leibniz en el s.XVII. Para ello introducirá el concepto de determinante. No sería hasta mediados del s.XVIII cuando Cramer daría la regla de resolución de esos sistemas mediante determinantes. Durante estos siglos los determinantes tuvieron un gran desarrollo gracias a las contribuciones de, entre otros, Lagrange, Gauss o Cauchy.

▷ s.XIX: antes de que Cayley, en el s.XIX, introdujera las nociones básicas sobre matrices, ya se habían descubierto muchas de sus propiedades. El mérito de Cayley estriba en extraer la idea de matriz a partir del determinante (él fue el primero en usar las dos barras para referirse al determinante) y, por ello, es considerado como el fundador de la teoría de matrices. Otros nombres importantes relacionados con los determinantes son Sylvester, Frobenius o Jacobi.

2) Determinantes:

▷ En temas anteriores se han estudiado las matrices así que los conceptos relativos a ellas se expondrán sin mucho detalle o demostración. Para la construcción de los determinantes se pueden seguir varios caminos: por **inducción** (sobre el orden de la matriz), el método **clásico** (usando permutaciones) o el método **geométrico** (basado en aplicaciones multilineales alternadas). Este último será el que usemos en este tema por parecernos el más sencillo para abordar las propiedades de los determinantes y sus demostraciones. Para ello empecemos con V un espacio vectorial bidimensional sobre $\mathbb{R}$.

▷ *Nota*: hemos elegido el cuerpo $\mathbb{R}$ por comodidad, pero cualquier cuerpo conmutativo nos valdría.

Formas bilineales:

▷ **Definición**: llamaremos forma bilineal sobre V a toda aplicación $g : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ cumpliendo que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$:

1) $g(v + w, u) = g(v, u) + g(w, u)$
2) $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$
3) $g(u, \alpha \cdot u) = \alpha \cdot g(u, v)$
4) $g(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot g(u, v)$

▷ **Definición**: decimos que la forma bilineal es simétrica si cumple $g(v, w) = g(w, v)$.

▷ **Definición**: decimos que es alternada/antisimétrica si $g(w, v) = -g(v, w)$.

▷ **Proposición**: g es alternada $\longleftrightarrow \forall v \in V$, $g(v, v) = 0$.

Proof. $\Longrightarrow$: $g(v, v) = -g(v, v) \longrightarrow 2g(v, v) = 0 \longrightarrow g(v, v) = 0$
$\Longleftarrow$: $0 = g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, v) + g(w, w) = g(v, w) + g(w, v) = 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow g(v, w) = -g(w, v)$

□

▷ Supongamos una base de $B = \{e_1, e_2\}$ de V, los vectores $\{v = v_1 e_1 + v_2 e_2, w = w_1 e_1 + w_2 e_2\}$. Se verifica que $g(v, w) = (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \cdot g(e_1, e_2)$. Es decir, la forma bilineal alternada queda perfectamente determinada cuando se conoce $g(e_1, e_2) \in \mathbb{R}$. En este caso, queremos que la aplicación alternada valga $g(e_1, e_2) = 1$.

▷ **Definición**: al número real $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$ lo llamaremos determinante de los vectores "v" y "w" respecto de la base $\{e_1, e_2\}$. Lo notaremos por $\det(v, w)$.

$\triangleright$ Si consideramos el espacio vectorial de las matrices cuadradas de segundo orden, $\mathcal{M}_2$, dado que se pueden considerar formadas por las componentes de dos vectores de V, podemos hablar de su determinante como una aplicación $\det : \mathcal{M}_2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por:
$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\triangleright$ **Definición**: dada $M \in \mathcal{M}_2$, a la aplicación $\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ la llamaremos determinante de M.

$\triangleright$ *Nota*: ambas definiciones son equivalentes. Todas las propiedades de los determinantes van a proceder de las propiedades de las formas bilineales alternadas donde $g(e_1, e_2) = 1$ (si una fila es cero el determinante es cero, si una es combinación lineal de la otra también será cero el determinante,...).

Formas multilineales:

$\triangleright$ En esta sección consideremos V un espacio vectorial de dimensión "n" sobre $\mathbb{R}$.

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos forma multilineal sobre V a toda aplicación $g : V^n \mapsto \mathbb{R}$ cumpliendo que es lineal en cada una de sus componentes. Es decir, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V$:

1) $g(v_1, \ldots, \sum_{j=1}^{m} w_j, \ldots, v_n) = \sum_{j=1}^{m} g(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_n)$

2) $g(\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots, \alpha_n v_n) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdot g(v_1, \ldots, v_n)$

$\triangleright$ **Definición**: decimos que la forma multilineal es simétrica si cumple $g(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = g(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ con $i \neq j$.

$\triangleright$ **Definición**: decimos que es alternada/antisimétrica si

$$g(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = -g(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \text{ con } i \neq j$$

$\triangleright$ **Proposición**: g es alternada $\longleftrightarrow$, $g(v_1, \ldots, v_n) = 0$ si $v_i = v_j$ con $i \neq j$.

Proof. Análoga a la del caso bidimensional.
$\Longrightarrow$: Sea $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ entonces: $g(v, v) = -g(v, v) \longrightarrow 2g(v, v) = 0 \longrightarrow g(v, v) = 0$

$\Longleftarrow$: $0 = g(v_1, \ldots, v_k + v_j, \ldots, v_k + v_j, \ldots, v_n) = g(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) +$
$+ g(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k, \ldots, v_n) + g(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + g(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_k, \ldots, v_n)) =$
$= g(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_k, \ldots, v_n) + g(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow g(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = -g(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$

$\square$

▷ **Definición**: dada una permutación σ de "n" elementos, $\sigma \in \mathcal{P}_n$, definimos la signatura/signo de σ y lo notamos por $S(\sigma)$ como la paridad del número de trasposiciones que presenta.
Si $\sigma = t_m \circ t_{m-1} \circ \cdots \circ t_1 \longrightarrow S(\sigma) = (-1)^m$.

▷ **Lema**: si $g : V^n \longmapsto \mathbb{R}$ es una forma alternada y $\sigma \in \mathcal{P}_n$ con signatura $S(\sigma)$, entonces:

$$g(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = S(\sigma) \cdot g(v_1, \ldots, v_n)$$

▷ Al igual que hicimos para dimensión 2, se puede probar que, dada una base de $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V la forma multilineal alternada queda perfectamente determinada cuando se conoce el valor $g(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}$ y, en particular, que podemos elegir una (única) forma alternada con $g(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

▷ **Definición**: dados V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión "n", $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V, $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $g : V^n \longmapsto \mathbb{R}$ la forma multilineal alternada tal que $g(B) = 1$, se llama determinante de los "n" vectores a la imagen de los mismo a través de "g".
Si $v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, su determinante es:

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

▷ **Definición**: sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, llamamos determinante de A y lo notamos por $\det(A)$ o por $|A|$, al número real dado por:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

3) Propiedades:

▷ Como se ha dicho anteriormente, todas las propiedades de los determinantes van a proceder de las propiedades de las formas multilineales alternadas donde $g(e_1, \dots, e_n) = 1$. Veamos algunas:

Propiedad 1: el determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden: $\det(A) = \det(A^t)$.

Proof. Sean $A = (a_{ij})$ y $A^t = (\hat{a}_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ cumpliendo que $\hat{a}_{ij} = a_{ji}$. Por la definición de determinante:

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot \hat{a}_{1\sigma(1)} \hat{a}_{2\sigma(2)} \cdots \hat{a}_{n\sigma(n)}$$

Dado que $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo podemos ordenar la permutación de fila de forma que $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ tenga el orden natural $\{1, \dots, n\}$. Esta reordenación se consigue mediante la permutación $\theta = \sigma^{-1}$ con el siguiente criterio:
Si para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ es $\sigma(j) = k$, entonces $\theta(k) = j$ y, por tanto, $\hat{a}_{j\sigma(j)} = \hat{a}_{\theta(k)k} = a_{k\theta(k)}$ de lo cual, recordando que $S(\sigma) = S(\theta)$, resulta que el término genérico del desarrollo del $\det(A)$ está dado por:

$$S(\theta) \cdot a_{1\theta(1)} a_{2\theta(2)} \cdots a_{n\theta(n)}$$

Además, sumar σ cuando recorre $\mathcal{P}_n$ es equivalente a sumar cuando $\sigma^{-1} = \theta$ recorre $\mathcal{P}_n$ por lo que, finalmente:

$$\det(A^t) = \sum_{\theta \in \mathcal{P}_n} S(\theta) \cdot a_{1\theta(1)} \cdots a_{n\theta(n)} = \det(A)$$

□

▷ *Nota*: como consecuencia de lo anterior, toda propiedad referida a las filas de un determinante es válida también para las columnas.

Propiedad 2: si todos los elementos de una fila son nulos $\longrightarrow \det(A) = 0$.

Proof. Consecuencia inmediata de la definición de determinante. Sea $v_i = (0, ..., 0) = \overrightarrow{0}_V$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots 0_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

□

Propiedad 3: si intercambiamos entre sí dos filas de A para construir la matriz $\hat{A}$,entonces: $\det(A) = -\det(\hat{A})$.

Proof. Consecuencia directa de la definición de forma multilineal alternada:
$g(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = g(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$ con $i \neq j$. Entonces:
$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$
$= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \cdot (-1) =$
$= -\det(A) = \det(\hat{A})$ □

Propiedad 4: el determinante de una matriz con dos filas iguales es cero.

Proof. Consecuencia directa de la definición de forma multilineal alternada pues "g" es alternada $\longleftrightarrow$, $g(v_1,\ldots,v_n)=0$ si $v_i=v_j$ con $i\neq j$. Entonces:

$$0=g(v_1,\ldots,v_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}S(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}=\det(A)$$

□

Propiedad 5: si se multiplica una fila por un escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ para construir la matriz $\hat{A}$ entonces: $\det(\hat{A})=\lambda\det(A)$.

Proof. Consecuencia directa de la definición de forma multilineal alternada tomando los $\alpha_j=1$ salvo el que queramos que valga λ. Tenemos:

$$g(v_1,\ldots,\lambda\cdot v_j,\ldots,v_n)=\det(\hat{A})=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}S(\sigma)\cdot\lambda\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdot a_{n\sigma(n)}=\lambda\cdot\det(A)$$

□

Propiedad 6: si dos filas de una matriz son proporcionales $\longrightarrow\det A=0$.

Proof. Supongamos que $\text{Fila}_j=\lambda\cdot\text{Fila}_j$. Extrayendo el factor λ de esa fila nos quedará un determinante, multiplicado por λ, con dos filas iguales. Por la propiedad **(4)**, ese determinante es nulo.

□

Propiedad 7: si los elementos de una fila de una matriz $A\in\mathcal{M}_n$ son de la forma: $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$, $\forall j=1,\ldots,n\longrightarrow\det(A)=\det(B)+\det(C)$ donde B es la matriz con todas sus filas iguales a las de A salvo la fila "i" que estará formada por elementos "b_{ij}" y C es la análoga donde los elementos de la fila "i" son los "c_{ij}".

Proof. Sea $A\in\mathcal{M}_n$ con cierta fila: $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$, $\forall j=1,\ldots,n$. A la hora de desarrollar el determinante tendremos:

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}S(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}S(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots(b_{i\sigma(i)}+c_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\{\text{propiedad distributiva}\}=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}S(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}S(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots c_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\det(B)+\det(C)$$

□

Propiedad 8: si una fila es combinación lineal de otra(s) $\longrightarrow\det(A)=0$.

Proof. Usando las propiedades **(5)** y **(7)** podemos hacer que esa fila valga cero usando combinaciones lineales de las otras. Aplicamos la propiedad **(2)** para concluir que $\det(A)=0$. □

Propiedad 9: si a una fila se le suma una combinación lineal de otras para crear la matriz $\hat{A}$, entonces, $\det(A) = \det(\hat{A})$.

Proof. Sea la fila $\hat{v}_i = v_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j$.
Por la propiedad **(7)** podemos separar el determinante en dos sumas: una en la que aparece v_i y otra en la que aparece $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j$. La segunda suma será cero por la propiedad **(8)** y el sumando restante no es más que las filas originales de la matriz A. Así pues: $\det(\hat{A}) = \det(A)$ como queríamos.

$\square$

Propiedad 10: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

4) Aplicaciones:

▷ Primero explicaremos cómo calcular determinantes de una forma más sencilla que usando la definición y después veremos algunas aplicaciones de los determinantes como son el cálculo de la matriz inversa o el rango de una matriz.

Cálculo del determinante:

▷ **Cálculo práctico del determinante**: para calcular determinantes no se usa la definición anterior, sino que usamos sus propiedades y la teoría de los menores complementarios.

▷ **Definición**: llamamos menor de orden "k" al determinante de una submatriz de A formada por la intersección de "k" filas y "k" columnas de A.

▷ **Definición**: sea $A \in \mathcal{M}_n$, llamamos menor complementario de $a_{ij} \in A$ al menor de orden "$(n-1)$" donde hemos suprimido la fila "i" y la columna "j". Lo notamos por $[a_{ij}]$.

▷ **Definición**: llamamos adjunto del elemento a_{ij} al número: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot [a_{ij}]$.

▷ **Teorema**: si $A \in \mathcal{M}_n$ entonces su determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos respectivos, es decir:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} S(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Proof. Sean $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n$, V un espacio vectorial y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V.
Entonces, dados $w_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, $j = 1, \dots, n$ tenemos que, con relación a B, $\det(w_1, \dots, w_n) = \det(A)$
Como el determinante es una forma multilineal, será lineal para cada índice. Si sustituimos para un w_i su expresión en la base:
$\det(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) = \det(w_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det(w_1, \dots, v_j, \dots, w_n)$
Y nos fijamos que cada uno de esos determinantes no son más que los adjuntos A_{ij} (pues en la fila "i" de la matriz todos los elementos son cero salvo el de la posición "j" - que es $= 1$ - para cada v_j). Así pues:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

□

▷ Todos los determinantes se pueden calcular usando la definición o el teorema anterior. Sin embargo, en algunos casos concretos tenemos fórmulas específicas.

a) Si $A \in \mathcal{M}_2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces:
$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

b) Si $A \in \mathcal{M}_3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, podemos usar la Regla de Sarrus:
$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

c) Para $a \in \mathcal{M}_n$ con $n \geq 4$ usamos el Teorema anterior usando las propiedades de los determinantes para obtener filas donde todos los elementos (salvo uno a lo sumo) sean cero.

d) Determinante de Vandermonde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, entonces:
$\det(A) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})$

Cálculo de la matriz inversa:

▷ **Matriz inversa**:

▷ Dado V espacio n-dimensional sobre $\mathbb{R}$, sea $f : V \longmapsto V$ homomorfismo. Al ser la representación respecto a la base única, existe una biyección entre las matrices cuadradas de orden n y los homomorfismos entre un espacio vectorial.

▷ **Definición**: a los homomorfismos biyectivos de V en sí mismo los llamaremos automorfismos de V, que representaremos por $Aut(V)$ o $GL(V)$ (grupo lineal de V).

▷ **Teorema**: cada automorfismo de V tiene asociado una matriz cuadrada de orden "n", A, que tiene simétrico para el producto. A dicha matriz, asociada a "f^{-1} la llamaremos A^{-1}.

▷ **Teorema**: sea $A \in \mathcal{M}_n$. Entonces A es invertible $\longleftrightarrow |A| \neq 0$.

Proof. $\Longrightarrow$: Sea $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ tq $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathrm{Id}_n \longrightarrow |A \times A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |\mathrm{Id}_n| = 1 \longrightarrow |A| \neq 0$
$\Longleftarrow$: Sea $A \in \mathcal{M}_n$ asociada a $f \in End(V)$ respecto de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$.
Por hipótesis $|A| = |f(v_1), \dots, f(v_n)| \neq 0 \longrightarrow \{f(v_j), j = 1, \dots, n\}$ forman una base de $V \longrightarrow$ "f" es biyectivo $\longrightarrow f \in Aut(V) \longrightarrow \exists f^{-1} \longrightarrow \exists A^{-1}$

□

▷ **Proposición**: si A es una matriz invertible, su inversa, A^{-1}, es igual a la matriz adjunta de A, traspuesta y multiplicada por el inverso del determinante. Es decir:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$$

Proof. Como la inversa es única, multiplicamos directamente y comprobamos que nos sale la identidad:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & |A| \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} = \mathrm{Id}_n$$

$\square$

Rango de una matriz y aplicaciones:

$\triangleright$ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>rango</u> de A al orden del mayor menor no nulo de A y lo notamos por $rg(A)$.

$\triangleright$ Sea un sistema lineal de "m" ecuaciones y "n" incógnitas $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ cuya aplicación lineal asociada es $f(x) = b$; $f(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>matriz de coeficientes</u> a la matriz A.

$\triangleright$ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>matriz ampliada, A^*</u> a la matriz de orden $(m \times (n+1))$ formada por la matriz A junto con la columna "vector b".

Entonces, como aplicación del rango tenemos:

a) Si $rg(A) \neq rg(A^*) \longrightarrow$ el sistema es <u>incompatible</u>.

b) Si $rg(A) = rg(A^*) = n \longrightarrow$ el sistema es <u>compatible determinado</u>.

c) Si $rg(A) = rg(A^*) < n \longrightarrow$ el sistema es <u>compatible indeterminado</u>. En este caso, las soluciones forman una variedad de dimensión $n - rg(A)$.