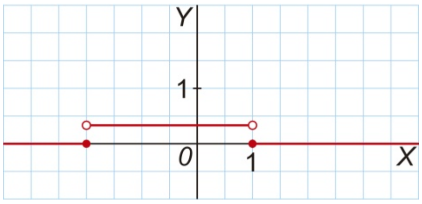
CONSOLIDACIÓN

Ficha: Funciones de densidad

1. a)



b) Observando la gráfica, $f(x) \geq 0$, para cualquier valor de x y el área encerrada bajo la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = -0{,}5$ y $x = 1$ corresponde con la de un rectángulo:

Por tanto: $\text{Área} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ u}^2$.

c) $P(-0{,}5 < X < 1) = \frac{1}{3} \cdot (1 - (-0{,}5)) = \frac{1}{3} \cdot 1{,}5 = 0{,}5$.

2. Utilizando la función de densidad *f* se tiene que la probabilidad vale 0,2343, es decir, un 23,43 % de los tornillos producidos son aceptables. Utilizando la función de densidad *g* la probabilidad vale 0,1042, es decir, el 10,42 % de los tornillos son aceptables. Por lo tanto, el proceso de producción con el que se obtiene un mayor porcentaje de tornillos aceptables es el que tiene por función de densidad *f*.

3. a) Se cumplen las dos condiciones porque $f(x) \geq 0$, para cualquier valor de *x,* ya que se trata de una recta con pendiente positiva para $1 < x < 4$ y el recinto es un triángulo rectángulo con área es uno. Fuera de este intervalo la función toma el valor cero.

b) El recinto es un triángulo rectángulo, por tanto, $P(1{,}75 < X < 2{,}86) = \frac{1{,}11 \cdot 0{,}25}{2} = 0{,}13875$.

4. a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3 - x) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 < x < 2 \\ 3 - x & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

5. El recinto es un trapecio rectángulo: $\text{Área} = \frac{(10k + 5k) \cdot 5}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{25}$.

$$P(-1 < X < 2) = \frac{\left(\frac{12}{25} + \frac{11}{25}\right) \cdot 3}{2} = \frac{33}{50}$$

6. El recinto es un trapecio rectángulo: $\text{Área} = \frac{\left(2k - \frac{1}{4} + 6k - \frac{1}{4}\right) \cdot 4}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$.

$$P(2{,}5 < X < 4{,}5) = \frac{\left(\frac{1}{8} \cdot 2{,}5 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot 4{,}5 - \frac{1}{4}\right) \cdot 3}{2} = \frac{9}{16}$$

Ficha: Manejo de la tabla de la normal

1. **a)** 0,0064 **b)** 0,0853 **c)** 0,6517 **d)** 0,9808 **e)** 0,488 **f)** 0,0277 **g)** 0,0977 **h)** 0,2924 **i)** 0,089

2. **a)** 0,8624 **b)** 09864 **c)** 0,4286 **d)** 0,0089 **e)** 0,5359 **f)** 0,0517 **g)** 0,0216 **h)** 0,3801 **i)** 0,2236

3. **a)** $k = 1{,}25$ **b)** $k = -0{,}75$ **c)** $k = 0{,}75$ **d)** $k = 1{,}43$ **e)** $k = -0{,}03$ **f)** $k = 1{,}61$

4. Sea *X*: “número de horas de duración del televisor”. $X \sim N(\mu = 50\,000, \sigma = 10\,000)$

Como 7 años = 61 320 horas, entonces se calcula $P(X > 61\,320)$:

$$P(X > 61\,320) = P\left(Z > \frac{61\,320 - 50\,000}{10\,000}\right) = P(Z > 1{,}132) = 1 - \Phi(1{,}132) = 1 - 0{,}8708 = 0{,}1292$$

Luego, aproximadamente el 12,92 % se espera que no cumplan la garantía.

Ficha: Más ajustes

1. El ajuste es bueno en b), d) y f), porque $np > 5, nq > 5$ y no es bueno en a), c) y e), porque $np < 5, nq < 5$.

2. Se considera la variable *Y*: "número de opositores, de los 70 seleccionados, que estudian en la biblioteca". Entonces $Y \sim \text{Bin}(n = 70, p = 0{,}48)$. Hay que calcular $P(Y \geq 40)$. Como $np = 33{,}6$ y $nq = 36{,}4$, se puede aproximar la distribución binomial de Y por $X \sim N(\mu = 33{,}6, \sigma = 4{,}18)$. Por tanto:

$$P(Y \geq 40) \approx P(X \geq 39{,}5) = P\left(Z \geq \frac{39{,}5 - 33{,}6}{4{,}18}\right) = P(Z \geq 1{,}41) = 1 - \Phi(1{,}41) = 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793$$

3. a) Como $Y \sim \text{Bin}\left(n = 3, p = \frac{1}{2}\right)$, entonces $P(Y = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$.

b) $Y \sim \text{Bin}\left(n = 240, p = \frac{1}{2}\right)$. Como $np = 120$, $nq = 120$, se puede aproximar por $X \sim N(\mu = 120, \sigma = 7{,}75)$.

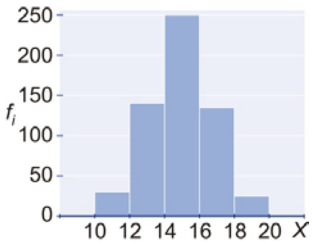
Luego: $P(Y = 130) \approx P(130 - 0{,}5 \leq X \leq 130 + 0{,}5) = 0{,}0208$

4. a) $Y \sim \text{Bin}\left(n = 4, p = \frac{1}{2}\right)$, entonces $P(Y \geq 2) = 0{,}6875$.

b) $Y \sim \text{Bin}\left(n = 100, p = \frac{1}{2}\right)$, $np = 50$ y $nq = 50$, entonces $X \sim N(\mu = 50, \sigma = 5)$.

Por tanto, $P(Y > 60) \approx P(X > 60{,}5) = 0{,}0179$.

5. a) Se representa el diagrama de frecuencias absolutas. Se observa que tiene una forma simétrica parecida a la normal.



Se calcula la media y la desviación típica de la muestra: $\bar{x} = 14{,}95$, $s = 1{,}83$. La distribución de frecuencias de la variable *X* se aproxima mediante una normal $N(\mu = 14{,}95, \sigma = 1{,}83)$.

Probabilidades teóricas	$580 \cdot P(L_i \leq X < L_{i+1})$	Frecuencias teóricas
$P(10 \leq X < 12) = P(-2{,}7 \leq Z < -1{,}61) = 0{,}052$	30,16	30
$P(12 \leq X < 14) = P(-1{,}61 \leq Z < -0{,}52) = 0{,}2478$	143,72	144
$P(14 \leq X < 16) = P(-0{,}52 \leq Z < 0{,}57) = 0{,}4142$	240,24	240
$P(16 \leq X < 18) = P(0{,}57 \leq Z < 1{,}67) = 0{,}2368$	137,34	138
$P(18 \leq X < 20) = P(1{,}67 \leq Z < 2{,}76) = 0{,}0355$	20,59	21
	572,05	573

b) La aproximación es buena porque las diferencias entre las frecuencias teóricas y las frecuencias observadas son pequeñas.

c) $P(16{,}5 < X < 19{,}3) = P\left(\frac{16{,}5 - 14{,}95}{1{,}83} < Z < \frac{19{,}3 - 14{,}95}{1{,}83}\right) = P(0{,}84 < Z < 2{,}38) = 0{,}1917$.

PROFUNDIZACIÓN

Ficha: Aproximación y corrección

1. a) $Y \sim \text{Bin}(n = 5,\ p = 0{,}5)$

$\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}118$

b) $P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}3125$

c) $P(X = 3) = 0$

d) $P(2{,}5 \le X \le 3{,}5) = P\left(\frac{2{,}5 - 2{,}5}{1{,}118} \le \frac{X - 2{,}5}{1{,}118} \le \frac{3{,}5 - 2{,}5}{1{,}118}\right) = P(0 \le z \le 0{,}8945) = P(0{,}89) - 0{,}5 = 0{,}3133$

Los valores no son muy próximos ya que $n \cdot p = 2{,}5 < 5$.

2. a) $Y \sim \text{Bin}(n = 50,\ p = 0{,}5)$

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}5 = 25$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 3{,}536$

b) $P(Y = 22) = \binom{50}{22} \cdot 0{,}5^{22} \cdot 0{,}5^{28} = 0{,}0788$

c) $P(X = 22) = 0$

d) $P(21{,}5 \le X \le 22{,}5) = P\left(\frac{21{,}5 - 25}{3{,}536} \le \frac{X - 25}{3{,}536} \le \frac{22{,}5 - 25}{3{,}536}\right) = P(-0{,}99 \le z \le -0{,}71) = P(0{,}71 \le z \le 0{,}99) =$

$= P(z \le 0{,}99) - P(z \le 0{,}71) = 0{,}8389 - 0{,}7611 = 0{,}0778$

Los valores son muy próximos ya que $n \cdot p = 25 > 5$ y $n \cdot q = 25 > 5$.

3. a) $Y \sim \text{Bin}\left(n = 1000,\ p = \frac{1}{36}\right)$

$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot \frac{1}{36} = 27{,}78$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36}} = 5{,}197$

b) $P(Y = 27) = \binom{1000}{27} \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^{27} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{973} = 0{,}0767$

c) $P(X = 27) = 0$

d) $P(26{,}5 \le X \le 27{,}5) = P\left(\frac{26{,}5 - 27{,}78}{5{,}197} \le \frac{X - 27{,}78}{5{,}197} \le \frac{27{,}5 - 27{,}78}{5{,}197}\right) = P(-0{,}25 \le z \le -0{,}05) =$

$= P(z \le 0{,}25) - P(z \le 0{,}05) = 0{,}5987 - 0{,}5199 = 0{,}0788$

Los valores son muy próximos ya que $n \cdot p = 27{,}78 > 5$ y $n \cdot q = 972{,}22 > 5$.