Derivabilidad y teoremas relacionados.

M. Carmen Hurtado y David Matellano.

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

12 de febrero de 2020

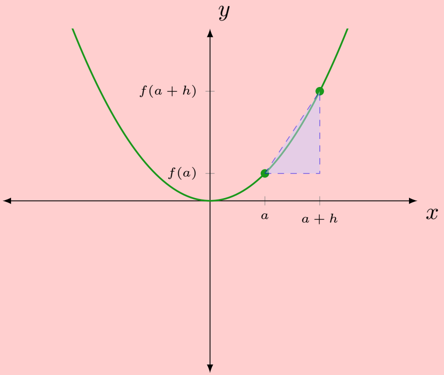
índice de contenidos I

Tasa de variación media.

- $T.V.M.[a,b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Definición de derivada.

Figuras.

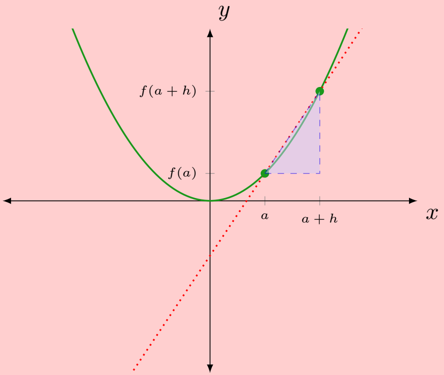


Tasa de variación media.

- $T.V.M.[a,b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Es la pendiente de la recta secante.

Definición de derivada.

Figuras.



Derivada de una función en un punto.

Definición e interpretación geométrica.

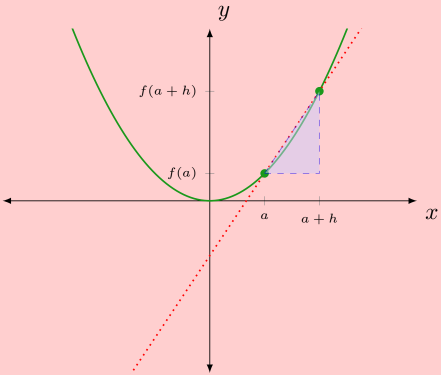
Tasa de variación media.

- $T.V.M.[a,b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Es la pendiente de la recta secante.

Definición de derivada.

- $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Figuras.



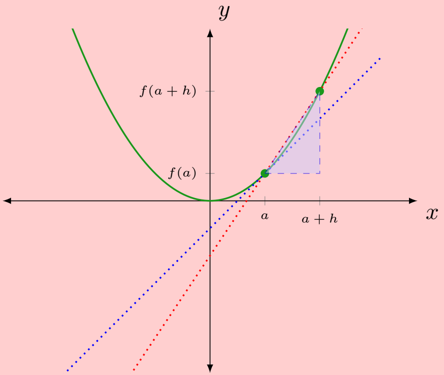
Tasa de variación media.

- $T.V.M.[a,b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Es la pendiente de la recta secante.

Definición de derivada.

- $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Es la pendiente de la recta tangente.

Figuras.



Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}; \quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:

Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.

Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Función no continua en un punto

Derivabilidad de una función en un punto

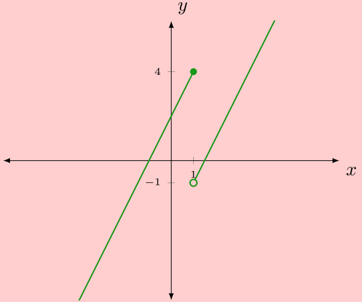
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Función no continua en un punto
   - $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 \; si \; x \leq 1 \\ 2x - 3 \; si \; x > 1 \end{cases}$

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

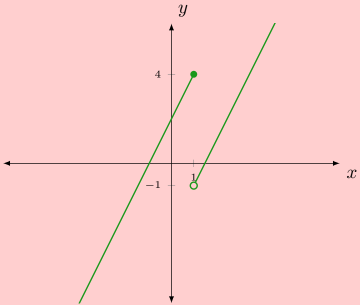
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Función no continua en un punto
   - $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 \ si \ x \leq 1 \\ 2x - 3 \ si \ x > 1 \end{cases}$
   - $f(x)$ no es continua en $x = 1$

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

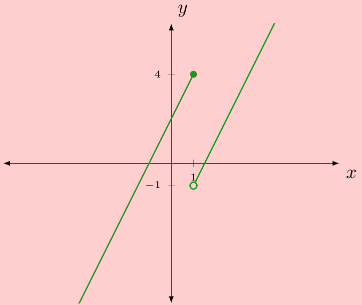
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Función no continua en un punto
   - $f(x) = \begin{cases} 2x+2 \ si \ x \leq 1 \\ 2x-3 \ si \ x > 1 \end{cases}$
   - $f(x)$ no es continua en $x = 1$
   - $f(x)$ no es derivable en $x = 1$ aunque $f'(1^-) = f'(1^+)$

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

2. Punto anguloso

Derivabilidad de una función en un punto

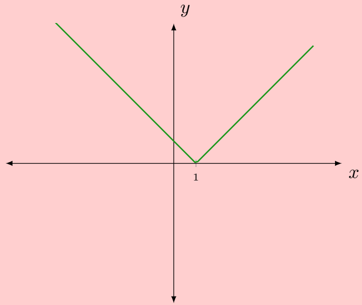
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

2. Punto anguloso
   - $f(x) = |x - 1|$

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

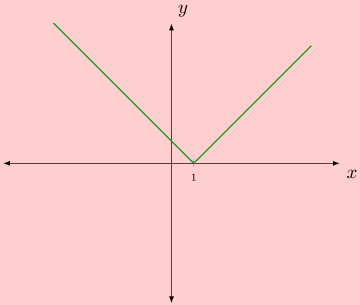
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

2. Punto anguloso
   - $f(x) = |x-1|$
   - $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

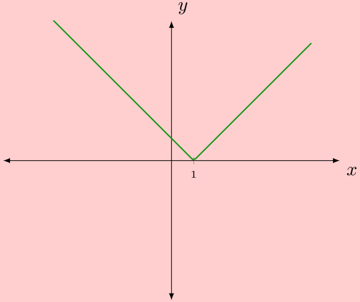
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x=a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x=a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

2. Punto anguloso
   - $f(x) = |x-1|$
   - $f(x)$ es continua en $x=1$.
   - $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=1$.

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

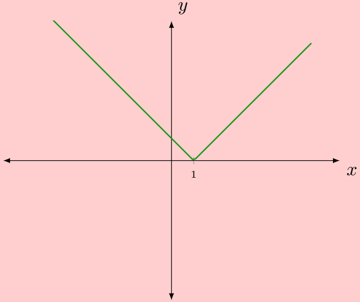
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

2. Punto anguloso
   - $f(x) = |x - 1|$
   - $f(x)$ es continua en $x = 1$.
   - $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$.
   - $\nexists f'(1)$.

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

3. Punto de tangente vertical

Derivabilidad de una función en un punto

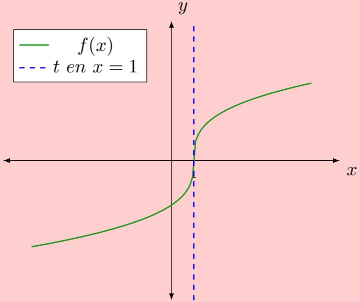
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

3. Punto de tangente vertical
   - $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

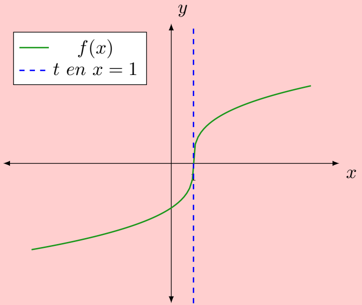
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

3. Punto de tangente vertical
   - $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$
   - $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

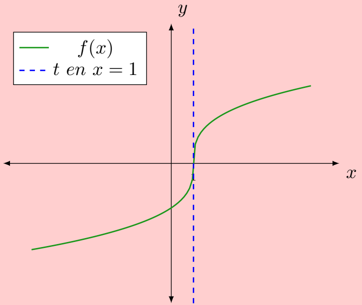
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

3. Punto de tangente vertical
   - $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$
   - $f(x)$ es continua en $x = 1$.
   - $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

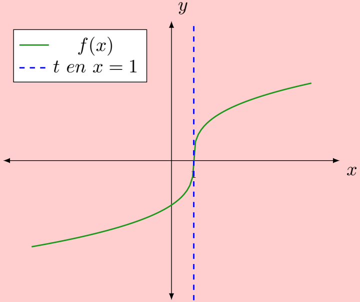
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

3. Punto de tangente vertical
   - $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$
   - $f(x)$ es continua en $x = 1$.
   - $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$.
   - $\nexists f'(1)$.

Gráficas



Derivabilidad de una función en un punto

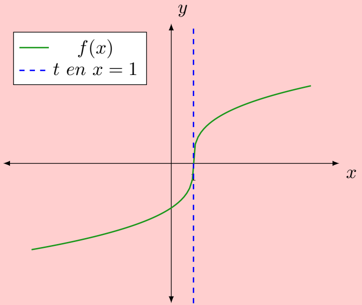
Derivadas laterales

- $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $\quad f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Una función es derivable en un punto $x = a$ cuando:
  - $f(x)$ es continua en $x = a$.
  - Las derivadas laterales son finitas e iguales: $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

3. Punto de tangente vertical
   - $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$
   - $f(x)$ es continua en $x = 1$.
   - $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$.
   - $\nexists f'(1)$.
   - En la web: https://www.geogebra.org/m/tkhgmvdz

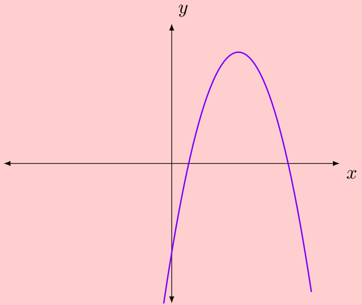
Gráficas



Teorema de Rolle. ✍

- Sea f una función que cumple:

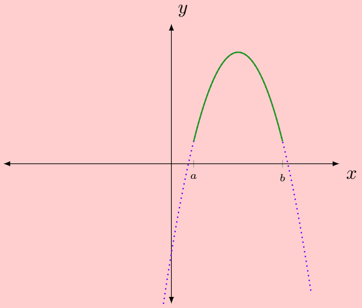
Figuras.



Teorema de Rolle. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$

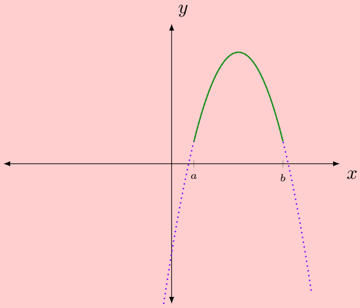
Figuras.



Teorema de Rolle. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)

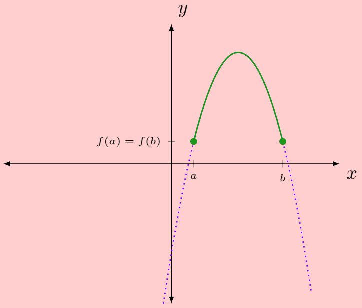
Figuras.



Teorema de Rolle. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
  - ☞ $f(a) = f(b)$

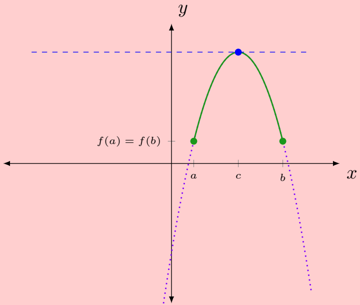
Figuras.



Teorema de Rolle. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
  - ☞ $f(a) = f(b)$
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in (a, b)/\ f'(c) = 0}$

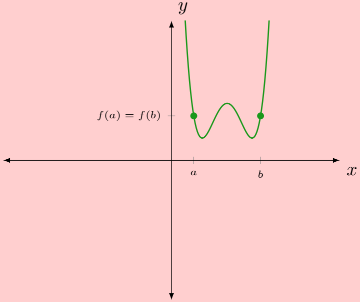
Figuras.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:

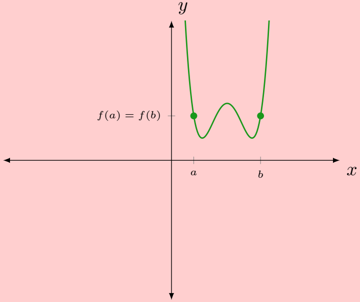
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$

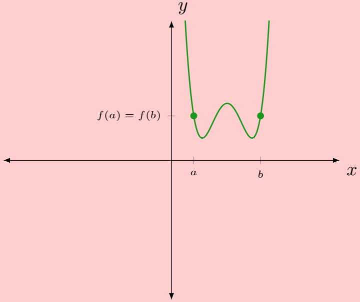
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:
  - Es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)

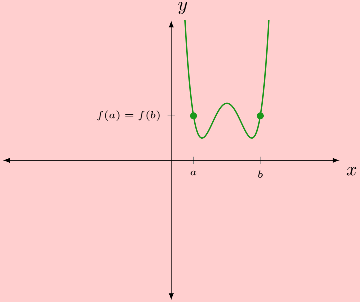
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:
  - Es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$

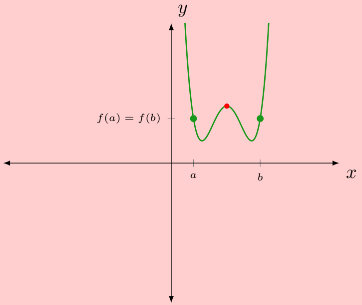
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
  - ☞ $f(a) = f(b)$
- El teorema garantiza la existencia de un punto de abscisa $c \in (a, b) / f'(c) = 0$.

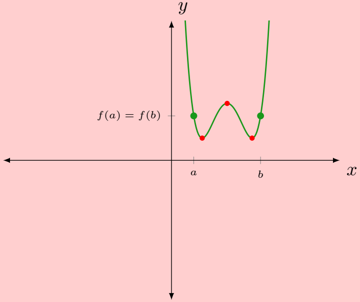
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:
  - Es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$
- El teorema garantiza la existencia de un punto de abscisa $c \in (a, b) / f'(c) = 0$.
- Pero puede haber más.

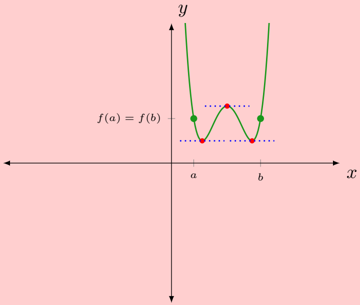
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 1.

- Sea f una función que cumple:
  - Es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$
- El teorema garantiza la existencia de un punto de abscisa $c \in (a, b) / f'(c) = 0$.
- Pero puede haber más.

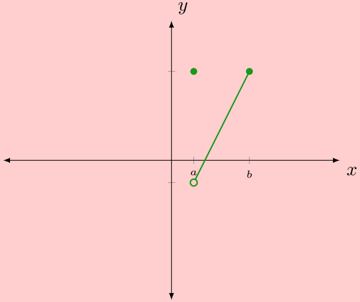
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 2.

- Sea f una función que cumple:

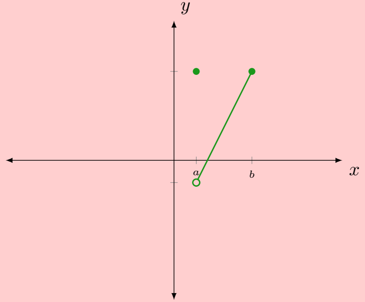
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 2.

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ **No** es continua en $[a, b]$

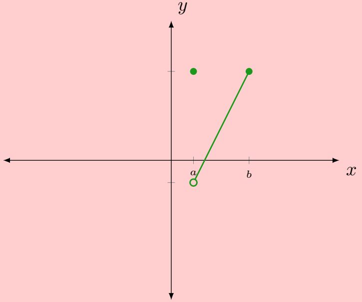
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 2.

- Sea f una función que cumple:
  - **No** es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)

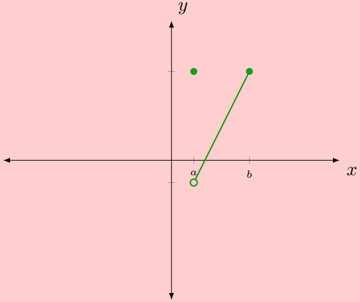
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 2.

- Sea f una función que cumple:
  - **No** es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$

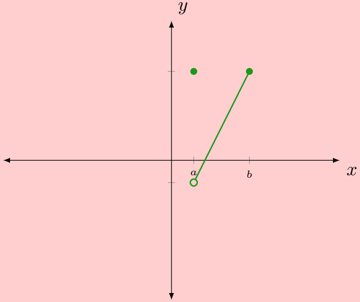
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 2.

- Sea f una función que cumple:
  - **No** es continua en $[a, b]$
  - Es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$
- No cumple la 1.ª hipótesis y no cumple la tesis.

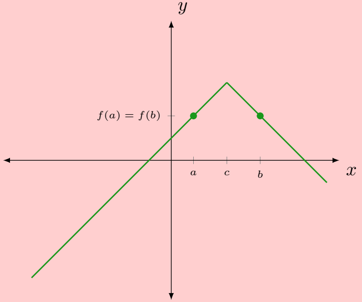
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 3.

- Sea f una función que cumple:

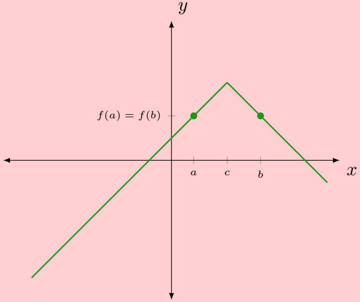
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 3.

- Sea f una función que cumple:
  - Es continua en $[a, b]$
  - No es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$

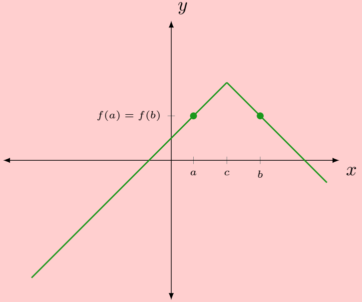
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 3.

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a,b]$
  - ☞ No es derivable en (a,b)
  - ☞ $f(a)=f(b)$
- No cumple la 2.ª hipótesis y no cumple la tesis.

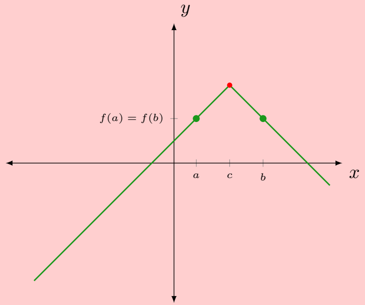
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 3.

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ No es derivable en (a, b)
  - ☞ $f(a) = f(b)$
- No cumple la 2.ª hipótesis y no cumple la tesis.
- Hay un máximo relativo en $x = c$.

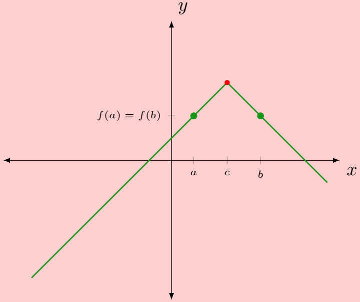
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 3.

- Sea f una función que cumple:
  - Es continua en $[a, b]$
  - No es derivable en (a, b)
  - $f(a) = f(b)$
- No cumple la 2.ª hipótesis y no cumple la tesis.
- Hay un máximo relativo en $x = c$.
- Sin embargo $\nexists f'(c)$.

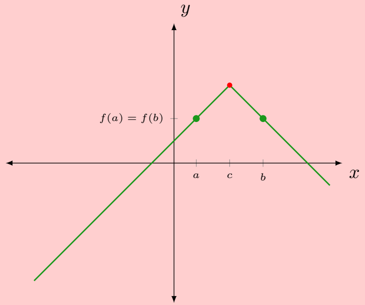
Gráfica de $f(x)$.



Teorema de Rolle. Ejemplo 3.

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ No es derivable en (a, b)
  - ☞ $f(a) = f(b)$
- No cumple la 2.ª hipótesis y no cumple la tesis.
- Hay un máximo relativo en $x = c$.
- Sin embargo $\nexists f'(c)$.
- $x = c$ no es punto de tangente horizontal.

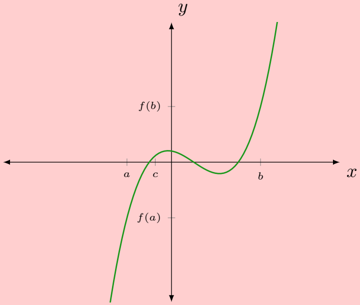
Gráfica de $f(x)$.



Teorema del valor medio. ✍

- Sea f una función que cumple:

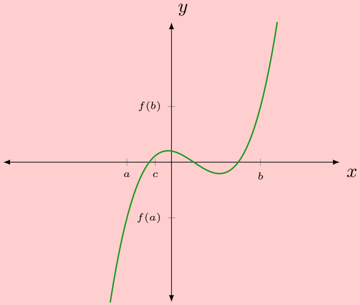
Figuras.



Teorema del valor medio. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$

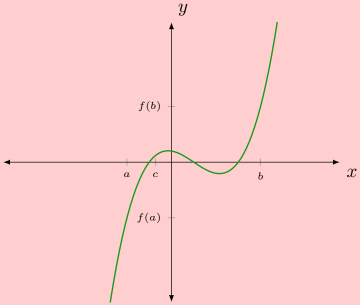
Figuras.



Teorema del valor medio. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)

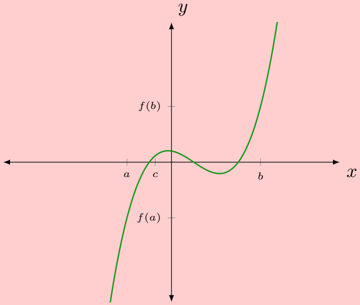
Figuras.



Teorema del valor medio. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
- $\boxed{\Rightarrow \exists\, c \in (a, b) /\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Figuras.



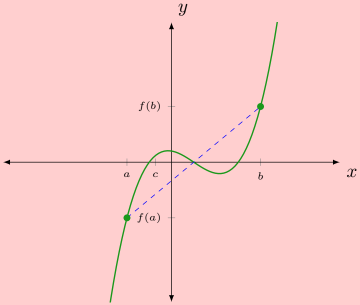
Teorema del valor medio. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in (a, b) /\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Interpretación geométrica

☞ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Figuras.



Teorema del valor medio. ✍

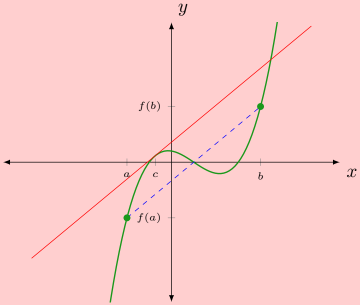
- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
- $\boxed{\Rightarrow \exists\, c \in (a, b) /\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Interpretación geométrica

☞ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

- El teorema asegura que en c la recta tangente es paralela a dicha recta secante.

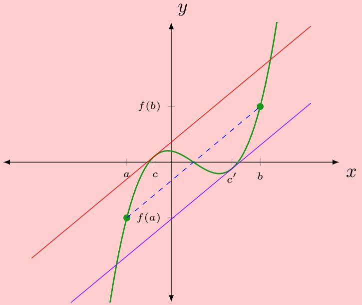
Figuras.



Teorema del valor medio. ✍

- Sea f una función que cumple:
  - ☞ Es continua en $[a, b]$
  - ☞ Es derivable en (a, b)
- $\boxed{\Rightarrow \exists\ c \in (a, b) /\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Figuras.



Interpretación geométrica

- ☞ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$
- El teorema asegura que en c la recta tangente es paralela a dicha recta secante.
- Puede existir más de un punto donde se cumpla la tesis.