TEMA 71: LA CONTROVERSIA SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA. LAS LIMITACIONES INTERNAS DE LOS SISTEMAS FORMALES.

TIEMPO: 88 — 84

Esquema

1) Introducción
   1.1) "Verdad matemática"
   1.2) Definiciones
2 Paradojas
   2.1) Paradojas lógicas
   2.2) Paradojas semánticas
3) Principales escuelas matemáticas
   3.1) Formalismo
      3.1.1) Definición
      3.1.2) Objetivo
      3.1.3) Críticas
   3.2) Logicismo
      3.2.1) Definición
      3.2.2) Principia Mathematica
      3.2.3) Críticas
   3.3) Intuicionismo
      3.3.1) Definición
      3.3.2) Críticas
4) Limitaciones
   4.1) Definiciones: consistencia, completitud
   4.2) Teoremas de Gödel y demostración
   4.3) Discusión
5) Desarrollos posteriores
   5.1) Gentzen

1) Introducción:

▷ La actividad que más preocupó a los matemáticos de finales del s.XIX y principios del s.XX fue la investigación sobre la noción de "verdad matemática" y los fundamentos de la Matemática. La aparición de las geometrías no euclídeas (donde lo único que se cambió fue el postulado de las paralelas - por un punto exterior a una recta pasa una, y sólo una, recta paralela), el descubrimiento de funciones continuas no diferenciables en ningún punto, las curvas que llenaban el plano y, sobre todo, las paradojas de la Teoría de Conjuntos de Cantor, provocaron que las miradas de los matemáticos se volvieran hacia la fundamentación misma de las ramas de las Matemáticas en vista de esos resultados tan contrarios a la intuición. Destacaremos a Frege, Russell, Brouwer, Kronecker, Hilbert y Gödel.

▷ Expondremos a continuación una serie de definiciones que nos serán útiles a lo largo del desarrollo del tema.

▷ **Definición**: diremos que T es una teoría aritmética si a partir de sus axiomas se pueden deducir los naturales y demostrar algunas de sus propiedades básicas. Diremos que una teoría es recursiva si las reglas de uso de sus signos para las demostraciones se pueden codificar en un algoritmo.

▷ **Definición**: decimos que una teoría es consistente si no tiene contradicciones, es decir, si no se puede demostrar como verdaderos, a la vez, un teorema y su contrario. Debido al principio de explosión, que básicamente dice que a partir de una contradicción puede demostrarse lo que uno quiera, una teoría no consistente es inútil para razonamientos matemáticos.

▷ **Definición**: una teoría es completa si puede responder a cualquier pregunta que se haga dentro de esa teoría. Es decir, o bien se puede probar todo teorema o bien se puede probar su negación.

2) Paradojas:

▷ Después del descubrimiento de las geometrías no euclídeas, ningún otro hecho ha influido tan poderosamente en el desarrollo de los fundamentos de las Matemáticas como la aparición de las paradojas. Damos una pequeña muestra a continuación, primero de paradojas lógicas y después de semánticas.

▷ **Paradojas lógicas**:

1) **Paradoja de Cantor**: dado el conjunto de todos los conjuntos posibles, A, consideremos el conjunto de sus partes: $\mathcal{P}(A)$. Sabemos que las partes de un conjunto siempre tienen, estrictamente, más elementos que el propio conjunto. Así pues, se da que el Cardinal del conjunto $A = Card(A) < Card(\mathcal{P}(A))$. Pero como $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto, ha de estar incluido en A, luego, al ser $\mathcal{P}(A) \subset A$, $Card(A) \geq Card(\mathcal{P}(A))$ lo que es una contradicción.

2) **Paradoja de Russell**: sea W el conjunto de todos los conjuntos C que no se pertenecen a sí mismos. Es decir, $C \in W$ cuando $C \notin C$. Ejemplo: el conjunto de todos los perros no se contiene a sí mismo pues no es un perro, pero el conjunto de las ideas abstractas sí que se contiene a sí mismo. Matemáticamente: $W = \{C : C \notin C\}$. ¿Está W en W? Si así fuera, no estaría cumpliendo la condición de definición de W, así pues $W \notin W$. Pero si $W \notin W$, por la definición de W sí debería de estar, así pues $W \in W$. Sea como fuere, se cumplen simultáneamente que $W \in W$ y que $W \notin W$.

3) **Paradoja del barbero**: es una versión más atractiva de la paradoja de Russell. En un pueblo hay un barbero que sólo afeita a las personas que no se afeitan a sí mismas. La paradoja aparece cuando preguntamos si el barbero se afeita a sí mismo o no.

▷ **Paradojas semánticas**:

1) **Paradoja de Berry**: surge al considerar las cualidades semánticas y sintácticas de la expresión: "el menor número natural que no puede ser nombrado con menos de treinta sílabas". Resulta que la propia expresión nombra un número natural que es expresado con menos de 30 sílabas.

2) **Paradoja del Quijote**: en la II parte del Quijote, en un momento dado Sancho es gobernador de la ínsula Barataria. En el río había un puente y en uno de los extremos una horca. Si alguien cruzaba el puente mintiendo acerca de su destino o sus intenciones debería de ser ahorcado. Si decía la verdad no pasaba nada. El problema apareció cuando un hombre juró que iba a la horca para ser ahorcado. El problema es que si se le ahorca, el hombre habría dicho la verdad y, por tanto, no debería haber sido ahorcado. Sin embargo, si no se le ahorcaba, habría mentido, así que se le debería haber ahorcado.

3) **Paradoja del mentiroso**: la sentencia "esta oración es falsa" ¿es verdadera o falsa?

▷ La causa de estas paradojas viene por la definición de un objeto en términos de una clase en la que está contenido ese objeto como un elemento. Es decir, las autorreferencias. Evitar este hecho será una de las tareas de las escuelas matemáticas a la hora de construir los conjuntos y será crucial a la hora de demostrar los teoremas de incompletitud de Gödel.

3) Escuelas matemáticas:

Formalismo:

▷ El formalismo pretendía dar a la teoría de conjuntos una base axiomática, análoga a la de la geometría elemental. Llegaron a eliminar las paradojas mediante restricciones en los conjuntos y sus operaciones. El gran teórico de esta escuela sería D. Hilbert. Este sistema es el que hoy en día conocemos como sistema axiomático.

▷ En el formalismo no se presta atención al significado de los símbolos o términos del sistema sino que sólo interesa cómo todos ellos se van a componer para formar teoremas (el significado particular de cada símbolo o cada teorema no es relevante). A esta abstracción de los sistemas deductivos la llamamos "formalizar el sistema". En otras palabras, un sistema formalizado es como un juego en el que especificamos las reglas antes de comenzar. Explicado brevemente, el proceso tiene dos componentes:

1) Componente morfológica: indica cuáles son las componentes del sistema y las combinaciones válidas para formar proposiciones, lo que incluye las reglas de formación y los operadores proposicionales disponibles.

2) Componente axiomática: indica qué proposiciones son postuladas como válidas (axiomas) y las reglas de derivación de otras proposiciones válidas (un teorema es una proposición derivable).

▷ El objetivo fundamental de esta escuela era construir, de manera consistente, toda la Matemática a partir de un sistema finito de axiomas (en particular la aritmética). El primer éxito fue cuando el propio Hilbert, a finales del s.XIX, probó la consistencia de la geometría clásica, la de Euclides, a partir de 21 axiomas (en vez de los 5 de Euclides) y algunas definiciones (punto, recta, congruencia de ángulos,...). Esto llevó a creer que todo sistema formal podría ser demostrado consistente o no y completo o no a partir de este juego metamatemático. Esta cuestión se planteará a toda la comunidad matemática en el segundo problema de la famosa lista de 23 problemas de 1.900.

▷ Los problemas de este sistema de pensamiento son los siguientes:

1) En general, y para la fundamentación de nuestra aritmética en particular, la consistencia es incompatible con la completitud. Es decir, uno de esos sistemas, si es consistente ha de ser incompleto.

2) Es más, otro de los problemas es que probar, metamatemáticamente, la consistencia de esos sistemas requiere emplear principios metamatemáticos más complejos que los incorporados al sistema en estudio.

Logicismo:

▷ La tesis logicista afirma que las Matemáticas son una rama de la Lógica. Las nociones matemáticas han de ser definidas en términos de las nociones lógicas y, de igual manera, los teoremas matemáticos deben ser demostrados como teoremas de la lógica.

▷ Este sistema fue desarrollado inicialmente por Frege a finales del s.XIX, aunque algunas ideas básicas se remontan hasta Leibniz.

▷ Russell y Whitehead son los otros dos grandes nombres del logicismo. Ellos reformularon el logicismo de Frege buscando formas de escapar a la paradoja de Russell. Lo hicieron creando la Teoría de los Tipos Lógicos en su obra "*Principia Mathematica*". En esa obra parten de una serie de conceptos indefinidos como proposición elemental, negación de una proposición, etc., una serie de axiomas básicos, dos principios de inferencia (el de sustitución y el "*modus ponens*") y una condición para evitar paradojas como la de Russell: "todo aquello que implique la totalidad de una colección no puede ser miembro de la colección". A partir de estas herramientas demuestran todos los teoremas de la lógica, la aritmética y el análisis.

▷ Las críticas a este sistema vienen por dos grandes frentes:

1) Crítica al "axioma de reducibilidad": axioma muy práctico pero introducido de manera arbitraria y sin mucha justificación. Lo que hace este axioma es, básicamente, formar definiciones predicativas que sin él no lo serían.

2) Crítica a su enfrentamiento con la realidad: si la matemática es sólo lógica-deductiva y puramente formal, ¿cómo es que sirve para representar aspectos de la naturaleza que nos rodea y es real como lo son aspectos de la mecánica, la dinámica, el electromagnetismo,...?

Intuicionismo:

▷ Para el intuicionista se debe poseer una prueba constructiva de cualquier afirmación matemática, antes de sentirse autorizado a decir que dicha afirmación es cierta. En otras palabras, no puede existir la verdad o falsedad incognoscibles. Estas ideas tienen su principal figura en Brouwer.

▷ Para el intuicionismo el pensamiento matemático es un proceso constructivo limitado por las tesis que son aceptables desde el punto de vista de la intuición y las que no. Es decir, es en la intuición y no en la lógica ni en la experiencia donde hay que basarse para desarrollar las matemática.

▷ Las críticas a este sistema vienen dadas, en su mayoría, por las limitaciones que impone:

1) La enorme cantidad de demostraciones no constructivas que hay en las Matemáticas: aunque algunas se pueden adaptar siguiendo los criterios intuicionistas, la mayoría de los teoremas clásicos del Análisis (Bolzano, Weierstrass,...) no admiten estas adaptación.

2) Rechazo al axioma de elección: con lo que el Análisis Funcional y toda inducción transfinita es vedada a esta escuela de pensamiento. Esto es un ejemplo particular del siguiente punto:

3) Incompatibilidad con el infinito: aunque ellos definen "infinitos potenciales", todo lo que implique manipular u operar con conjuntos infinitos no cabe dentro de esta escuela, lo que es una gran restricción a las matemáticas actuales.

4) Limitaciones

▷ En 1.931 Kurt Gödel publicó un trabajo que respondía a esa segunda pregunta del programa de Hilbert (sería negativa) y ponía a los matemáticos frente al siguiente hecho: el sistema axiomático posee limitaciones intrínsecas muy importantes:

1) La imposibilidad de axiomatizar por completo la aritmética entera.

2) La imposibilidad de probar la consistencia interna de una amplia clase de sistemas deductivos salvo que se adopten unos sistemas externos cuya consistencia puede ser puesta en duda también.

▷ **Primer teorema de incompletitud de Gödel**: cualquier teoría aritmética recursiva que sea consistente es incompleta.

▷ **Segundo teorema de incompletitud de Gödel**: dada T, teoría aritmética recursiva consistente, la fórmula "Consistente T" no es un teorema (es decir, la consistencia de la aritmética formal no puede probarse por métodos formalizables en la aritmética formal).

▷ Bosquejo de la demostración de los dos teoremas: la idea básica es construir una sentencia G que se autorreferencie de manera que lleve a una contradicción (una paradoja del mentiroso sofisticada).

1) Todos los símbolos y fórmulas de la teoría reciben un número natural único siguiendo las reglas de la Numeración de Gödel.

2) Al ser T una teoría aritmética recursiva se prueba que los teoremas también tienen un número de Gödel asociado pues hay un algoritmo que lleva a su demostración.

3) Hay que usar el **lema diagonal** para la autorreferencia: asegura que, dada una propiedad P, podemos encontrar una sentencia que afirma que el número de Gödel "n" cumple la propiedad P.

4) Para demostrar el primer teorema usaremos $G =$ "no existe un número "n" con la propiedad P" donde $P =$ "ser la demostración de G en la teoría T". Es decir, G dice que ella misma no es demostrable en T. La discusión viene a ser: si G puede demostrarse, encontraríamos un número de Gödel que probaría que G, de hecho, es no es demostrable y similar en el caso de intentar demostrar la veracidad de $\neg G$.

5) Para demostrar el segundo teorema usamos la sentencia $Consistencia(T)$ que afirma la consistencia de la teoría, la propiedad P anteriormente citada y la sentencia "no existe demostración de que $0 = 1$" con su número de Gödel asociado (la ausencia de demostración para alguna fórmula es equivalente a la consistencia de la teoría, debido al principio de explosión). Razonando como antes llegamos a que se da $Consistencia(T) \longrightarrow G$. Si la consistencia fuera cierta, G también lo sería, contradiciendo el primer teorema.

▷ *Nota 1*: en el primer teorema, si añadimos G a la teoría T para crear $\hat{T}$ (donde ahora G sería trivialmente cierta), no solventaríamos nada pues podríamos construir $\hat{G}$ en $\hat{T}$ de la misma forma que G en T.

▷ *Nota 2*: el segundo teorema nos dice que que si usamos $\hat{T}$ donde $Consistencia(T)$ pueda demostrarse, la propia consistencia de $\hat{T}$ no puede demostrarse ni en T ni en $\hat{T}$.

▷ *Nota 3*: estos teoremas no dicen que no haya sistemas axiomáticos completos interesantes. La propia geometría euclidiana (y, por tanto, la no euclidiana) es completa. También lo es la aritmética de Presburger.

▷ Podemos reinterpretar los teoremas de Gödel de una manera positiva de la siguiente forma: el que haya teoremas aritméticos que no puedan ser demostrados formalmente, no significa que no tengan que estar indefinidamente no resueltos. Significa que los recursos del intelecto humano no han sido, ni pueden ser, plenamente formalizados y que subsiste la posibilidad de descubrir nuevos principios de demostración.

5) Desarrollos posteriores

▷ Ninguna de las escuelas han conseguido fundamentar la Matemática de manera completa y consistente. Desde los trabajos de Gödel no ha habido cambios sustanciales y el problema aún sigue abierto. Por ejemplo, Gentzen, un seguidor de Hilbert, demostró la consistencia de la aritmética y de partes del análisis usando inducción transfinita.

▷ Desde el punto de vista metodológico un podría preguntarse qué escuela es la más adecuada para la enseñanza de las matemáticas. En general se acepta una combinación de las tres como lo mejor: en una primera toma de contacto con el tema en cuestión es conveniente ser intuicionista y para asegurar lo aprendido o desarrollar nuevos caminos, formalista y lógico. Como es obvio, este es un tema muy subjetivo y dependiente del área de las Matemáticas en que uno se encuentre (no es lo mismo trabajar con las figuras planas de la geometría elemental que con conjuntos infinitos y sus potencias).