El binomio de Newton

José Bosch Betancor

8 de diciembre de 2021

Índice

1. Introducción

El binomio de Newton sirve para elevar un binomio, por ejemplo $(2x+3)$, a una potencia: pongamos $(2x+3)^7$. Ten en cuenta que, al contrario de lo que uno esperaría, **no se cumple** $(2x+3)^7 = (2x)^7 + 3^7$ porque

$$(2x+3)^7 = \underbrace{(2x+3)\cdot(2x+3)\cdot(2x+3)\cdot(2x+3)\cdot(2x+3)\cdot(2x+3)\cdot(2x+3)}_{\text{7 factores}}$$

y, al multiplicar un polinomio por otro no basta con multiplicar los primeros términos de los factores entre sí y los segundos términos entre sí, sino que se multiplican todos los términos del primer factor por todos los términos del segundo, y estos por todos los términos del tercero, y así sucesivamente.
No hay más remedio que ir multiplicando binomios (aprovechando las identidades notables, como mucho) y luego polinomios, para llegar al resultado final:

$$\begin{aligned}
(2x+3)^7 &= (2x+3)^2\cdot(2x+3)^2\cdot(2x+3)^2\cdot(2x+3) = \\
&= \left(4x^2+12x+9\right)\cdot\left(4x^2+12x+9\right)\cdot\left(4x^2+12x+9\right)\cdot(2x+3) = \\
&= \left[\left(4x^2+12x+9\right)\cdot\left(4x^2+12x+9\right)\right]\cdot\left[\left(4x^2+12x+9\right)\cdot(2x+3)\right] = \\
&= \left[16x^4+48x^3+36x^2+48x^3+144x^2+108x+36x^2+108x+81\right]\cdot \\
&\cdot\left[8x^3+12x^2+24x^2+36x+18x+27\right] = \cdots
\end{aligned}$$

Evidentemente, es un cálculo muy tedioso, por lo que se intentó llegar a una fórmula que agilizara las operaciones.
El resultado, siguiendo esta fórmula, aparece en el último apartado de este documento.

2. Fórmula del binomio de Newton

La fórmula general es:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k} \tag{1}$$

Nada menos.
El símbolo $\sum$ se utiliza para sumar expresiones similares en las que sólo cambia el índice k , que va tomando valores consecutivos desde 0 hasta n.
Por lo tanto, la fórmula (1) es equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 \ + \ \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 \ + \ \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \\ + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n\end{aligned} \tag{2}$$

En definitiva, la potencia n-sima de un binomio se desarrolla en una suma de $n+1$ términos (pues van desde 0 hasta n) cada uno de los cuales contiene tres factores: un número $\binom{n}{k}$ (llamado "número combinatorio n sobre k"), una potencia de a, $\left(a^{n-k}\right)$ y otra potencia de b , $\left(b^k\right)$; los exponentes de ambas potencias siempre suman n (ya que: $n-k+k=n$) y aparecen en todas las combinaciones posibles.
En un apartado posterior se explica cómo calcular los números combinatorios; pueden obtenerse todos a la vez de una forma sorprendentemente sencilla.

Necesitarás recordar esta fórmula, por ejemplo, para demostrar que el número e, base de los logaritmos neperianos, puede obtenerse calculando $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ cuando n toma valores cada vez mayores.

2.1. Un poco de Historia

Decía el famoso matemático alemán Felix Klein (1849-1925), medio en serio medio en broma, que "si un teorema lleva el nombre de un matemático, es seguro que este matemático no es su inventor".[1] Este es el caso del "Binomio de Newton", que fue descubierto por los matemáticos árabes del siglo X, en pleno desarrollo del álgebra. En concreto, se atribuye a Al-Karaŷí, o Al Karaji (aprox. 953-1029), matemático e ingeniero persa que vivió en Bagdad.

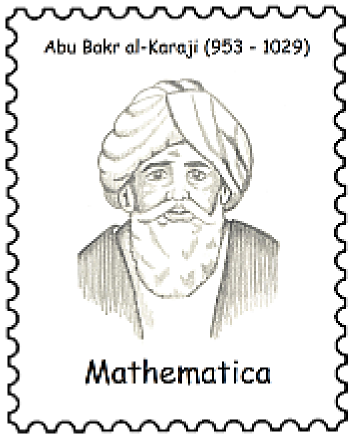

Figura 1: ©Andreas Strick 2014

En cualquier caso, el genial físico y matemático inglés Isaac Newton (1643-1727) generalizó la fórmula para cualquier exponente, que podría ser cualquier número real y no necesariamente un entero positivo, obteniendo desarrollos infinitos que produjeron resultados muy interesantes.

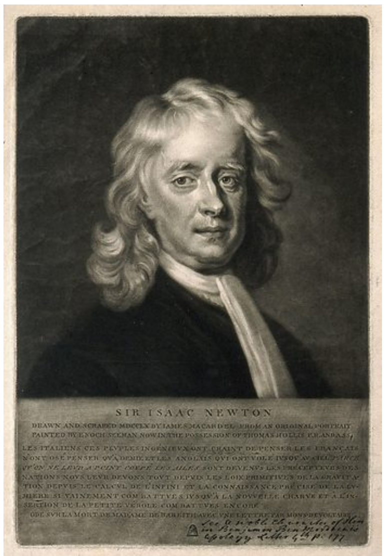

Figura 2: Sir Isaac Newton

[1] Citado en "Historia de la Matemática", de J. Rey Pastory J. Babini

3. Números combinatorios

Los números combinatorios son el resultado de calcular **combinaciones sin repetición**, es decir, hallar todas las maneras posibles de elegir unos cuantos elementos de un conjunto. En general, se escribe $C_{n,k}$ o $\binom{n}{k}$ a todas las posibles maneras de elegir k elementos de un conjunto que tiene n elementos. Admitimos, aunque suene un poco extraño, que pueda ser $k = 0$. En ese caso $\binom{n}{0} = 1$ porque hay una única manera de no tomar ningún elemento de un conjunto: no hacerlo.
Aparecen aquí porque en la fórmula de la potencia de un binomio agrupamos los términos que se pueden sumar por ser semejantes (tener la misma potencia en la parte literal).
Así, en:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)\cdot(a+b)}_{n \text{ factores}}$$

al multiplicar los n factores eligiendo sólo uno de los términos cada vez, habrá:

- $\binom{n}{0}$ maneras de elegir 0 factores iguales a b (todos iguales a a)
- $\binom{n}{1}$ maneras de elegir 1 factor igual a b y el resto $(n-1)$ iguales a a
- $\binom{n}{2}$ maneras de elegir 2 factores iguales a b y el resto iguales a a
  y así sucesivamente
- $\binom{n}{k}$ maneras de elegir k factores iguales a b y el resto $(n-k)$ iguales a a
- $\binom{n}{n}$ maneras de elegir n factores iguales a b y ningún a

Sumando todos esos factores productos semejantes obtenemos la fórmula 2

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n \cdot b^0 \ + \cdots + \ \binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n}\cdot a^0 \cdot b^n$$

Podemos calcular el valor de los números combinatorios acudiendo a las siguientes fórmulas, que usamos como definiciones.

3.1. Definiciones

Definición 1 *El factorial de n se expresa como $n!$ y se define como:*

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

Definición 2 *El factorial de 0 es* $0! = 1$

Definición 3 *El número combinatorio n sobre k se define como:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Esta definición se puede usar para calcular un número combinatorio concreto. Por ejemplo:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

En cualquier caso, las calculadoras científicas suelen tener la tecla $\boxed{\text{nCr}}$, que calcula directamente los números combinatorios. Pulsando 5 $\boxed{\text{nCr}}$ 3 se obtiene 10 (pues es $\binom{5}{3}$).
Pero, para obtener todos los números combinatorios de un n dado, acudimos a las siguientes propiedades:

3.2. Propiedades

Propiedad 1 *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Propiedad 2 *Para cualesquiera* $n, k \in \mathbb{N}$ *con* $k \leq n$ *se tiene que*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Propiedad 3 *Para cualesquiera* $n, k \in \mathbb{N}$ *con* $k < n$ *se tiene que*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Las dos primeras propiedades son inmediatas aplicando la Definición 3. La tercera es un poco más complicada y se deja como ejercicio, pero tiene sentido: Si a un conjunto de n elementos le añadimos uno nuevo, las maneras de elegir $k+1$ elementos de estos $n+1$ son las mismas que obtenemos al tomar el nuevo elemento y k de los antiguos, sumadas a las que se obtienen ignorando el nuevo elemento y eligiendo los $k+1$ solo entre los antiguos.
Aplicando estas propiedades obtenemos una manera nueva de obtener todos los números combinatorios.

4. El triángulo de Pascal (o de Tartaglia)

Se pueden obtener todos los números combinatorios haciendo sumas en forma de triángulo. Este método fue ya descrito por Al-Karaŷí en una obra que, lamentablemente, no se ha conservado, pero que fue comentada por otros matemáticos árabes posteriores. [2] El italiano Tartaglia (Niccolò Fontana) (1499-1597) o el francés Blaise Pascal (1663-1692) lo redescubrieron y estudiaron sus propiedades.
Partimos de $1 = \binom{0}{0}$ en la primera fila (aunque la llamaremos "Fila 0"). Se añaden nuevas filas dejando un hueco bajo cada número y situando los nuevos elementos a los lados de este hueco. Cada nueva fila comienza y termina por 1 pero, a partir de la fila 2 (que será la tercera por contar desde 0) se añade el número obtenido al sumar los dos que se encuentran sobre él. Utilizamos así las propiedades de los números combinatorios antes estudiadas.
En el siguiente diagrama se han dibujado las 8 primeras filas, desde la Fila 0 hasta la Fila 7, señalando con flechas de dónde se obtiene cada número.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$
[3]

La fila n aporta todos los números combinatorios que hay bajo n, es decir

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

[2]Georges Ifrah cita en *Historia Universal de las Cifras a Al-Samaw' al ibn Yaḥya al-Maghribí*

[3]Obtenido de https://newbedev.com/pascal-s-triangle-in-latex-with-pointing-arrows

5. Aplicación de la fórmula

Ya estamos en condiciones de usar el Binomio de Newton para resolver el problema de calcular $(2x+3)^7$:

$$(2x+3)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot (2x)^{n-k} \cdot 3^k =$$

$$= \binom{7}{0} \cdot (2x)^7 \cdot 3^0 + \binom{7}{1} \cdot (2x)^6 \cdot 3^1 + \binom{7}{2} \cdot (2x)^5 \cdot 3^2 + \binom{7}{3} \cdot (2x)^4 \cdot 3^3 +$$

$$+ \binom{7}{4} \cdot (2x)^3 \cdot 3^4 + \binom{7}{5} \cdot (2x)^2 \cdot 3^5 + \binom{7}{6} \cdot (2x)^1 \cdot 3^6 + \binom{7}{7} \cdot (2x)^0 \cdot 3^7 =$$

$$= 1 \cdot 128x^7 \cdot 1 \quad + \quad 7 \cdot 64x^6 \cdot 3 \quad + \quad 21 \cdot 32x^5 \cdot 9 \quad + \quad 35 \cdot 16x^4 \cdot 27 \quad +$$

$$+ \quad 35 \cdot 8x^3 \cdot 81 \quad + \quad 21 \cdot 4x^2 \cdot 243 \quad + \quad 7 \cdot 2x \cdot 729 \quad + \quad 1 \cdot 1 \cdot 2187 =$$

$$= 128x^7 + 1344x^6 + 6048x^5 + 15120x^4 + 22680x^3 + 20412x^2 + 10206x + 2187$$

Con una calculadora para realizar las operaciones numéricas se puede llegar al resultado en solo dos pasos.
A partir de ahora ya sabrás calcular cualquier potencia de un binomio.