

Tema 11 Rectas y Planos en el espacio.

Un sistema de referencia en el espacio consiste en un conjunto $\mathcal{R} = \{O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ formado por:

- Un pto fijo O .
- Una base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a cada pto P se le asocia un vector de posición $\vec{OP}$ de coordenadas (a, b, c) .

Coordenadas del vector que une dos pto.

$$\left. \begin{array}{l} P(x_1, y_1, z_1) \\ Q(x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} \vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Comprobación de que 3 pto estén alineados.

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) \\ C(x_3, y_3, z_3) \end{array} \right\} \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Pto. medio de un segmento.

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Se llama determinación lineal de un elemento del espacio al conj. mínimo de datos necesarios para que quede determinado:

• Recta: 1 pto y 1 vector

2 ptos

2 planos que se cortan.

• Plano: 1 pto y 2 vectores l.i.

1 pto y un vector $\perp$ al plano.

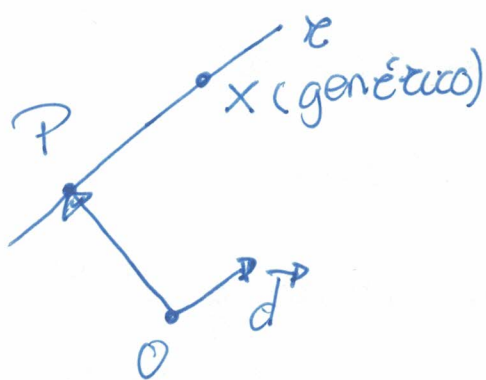
3 ptos alineados.

1 recta y un pto $\notin$ recta.

2 rectas secantes.

2 rectas paralelas

Se denomina ec ó ecs de un lugar geométrico en el espacio a la expresiones matemáticas de las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un pto para pertenecer a dicho lugar geométrico.

1) Ecuaciones de la recta.

Una recta queda determinada por:

- Un pto P de r : lo cual supone conocer el vector $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ de posición
- Un vector $\vec{d}$, $\parallel$ a r , vector dirección.

$$\vec{OX} = \vec{p} + \lambda \vec{d}$$

Ec. vectorial de r .

(al variar λ , X recorre la recta).

Sustituyendo los vectores por sus coordenadas.

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda (d_1, d_2, d_3)$$

$$x = p_1 + \lambda d_1$$

$$y = p_2 + \lambda d_2$$

$$z = p_3 + \lambda d_3$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ Ec. paramétricas de r .

Despejando el parámetro λ e igualando entre sí:

$$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}$$

Ec. en forma continua en r .

OBS. Δ veces nos puede aparecer algún 0 en el denominador. No es correcta la expresión aritméticamente pero puede admitirse como expresión simbólica.

$ax+by+cz+d=0$ representa un plano, y el sistema formado por dos de ellos significa la recta en que se cortan esos planos.

$$\left. \begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array} \right\} \text{ Ec. en forma implícita de } L$$

Pág 298.

Act 84 Ec's paramétricas, ec forma continua y las ec's implícitas.

a) Pasa por los ptes A(1,-2,0) y B(2,-3,-4)

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, -3+2, -4-0) = (1, -1, -4)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -4\lambda \end{array} \right\} \lambda \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-4} \\ \text{(1) Ec. continua} \\ -x+1 = y+2 \\ \boxed{x+y+1=0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -y-2 = -z \\ \boxed{y-z+2=0} \end{array} \right.$$

Ec's implícitas.

b) Pto $\Delta(-2, -2, 0)$ y dirección $\vec{u} = (-1, -1, 4)$.

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 4\lambda \end{array} \right\} \lambda \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4} \\ \text{Ec. continua.} \end{array} \right.$$

Ecs paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} -x-2 = -y-2 \\ \boxed{x-y=0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 4y+8 = -z \\ \boxed{4y+z+8=0} \end{array} \right.$$

Ecs implícitas.

c) $\Delta(-2/3, -2, 1/2)$ y dirección $\vec{u} = (1/3, 0, 1/2)$.

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda \\ y = -2 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{array} \right\} \text{Ecs paramétricas} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{y+2}{0} = \\ = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \text{Ec. continua.}$$

Ecs implícitas

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(z - \frac{1}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2z + 3 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

Act 87 | Calcular Pto, vector director.

$$a) \text{ c: } \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

$$\text{Pto } (-3, -2, 1)$$

$$\vec{u} = (-3, 3, -4)$$

$$b) \text{ c: } \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3}$$

$$\text{Pto } (0, 2, -2)$$

$$\vec{u} = (-2, 1, 3)$$

$$c) \text{ c: } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

Ptos: dar valores a una incógnita, y hallar las otras dos incógnitas.

lo elijo yo

↓

$$x = 0 \rightarrow y = 3$$

$$\text{Pto: } x = 0 \quad z = -1$$

$$\Rightarrow \Delta(0, 3, -1)$$

$$\text{otro pto: } \begin{aligned} x = 1 &\rightarrow y = 3 - 2 = 1 \\ x = 1 &\rightarrow z = 2 - 1 = 1 \end{aligned} \quad B(1, 1, 1)$$

$$\vec{u} = \vec{\Delta B} = (1, -2, 2) \text{ vector dirección.}$$

Act 88 | dEc's continua e implícitas de

$$\text{c: } \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} ?$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

continua.

$$2x - 2 = -y + 2$$

$$\boxed{2x + y - 4 = 0}$$

$$-3x + 3 = -z + 3$$

$$\boxed{3x - z = 0}$$

Ec. continua

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

Ec's implícitas

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2 = -y + 2 \\ \boxed{2x + y - 4 = 0} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -3x + 3 = -z + 3 \\ -3x + z = 0 \\ \boxed{3x - z = 0} \end{array} \right.$$

Act 89] ¿Ec paramétricas y ec continua de

$$C: \begin{cases} 3x - y - z = 4 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad ?$$

Necesitamos dos pts.:

Damos valores a una de las incógnitas,
 y hallamos las otras dos.

Ej. $x=0 \Rightarrow \begin{cases} -y - z = 4 \\ y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Delta(0, 1, -2)$

$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 3 - y - z = 4 \\ 1 + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z = 3 \\ z = -1.5 \end{cases}$

$B(1, 2, 0)$

Vector director $\vec{\Delta B} = (1, 1, 2)$

Ec Paramétricas.

Pto $(\Delta \circ B) + \vec{\Delta B}$

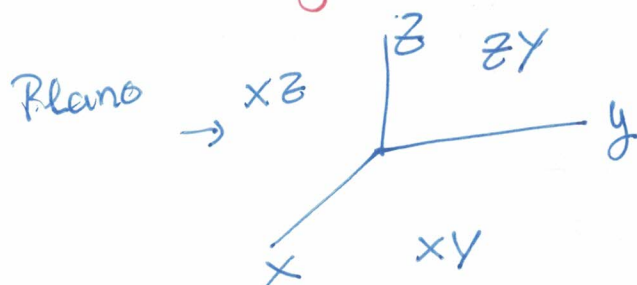
$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right\}$$

Ec. continua.

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

Act 90 | Escribe las ec de cada una de las siguientes rectas.

a) G_{jex} .



$$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

* Antes de hacer act 90

Ec. ejes. coordenados.

X

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Y

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Z

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,0,1)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ec. Vectorial

Ec. Conti

Oct 91 | Escribe en forma continua las rectas que se indican a continuación.
Calcula pto, vector director cada una de ellas..
¡Ojo!, no están en forma continua!

$$a) \text{ c: } \frac{x}{2} = \frac{\frac{2y-2}{3}}{-3} = \frac{z-1}{-3}$$

¡Ojo! esto no está en forma continua.

$$\frac{x}{2} = \frac{\frac{2(y-1)}{3}}{-3} = \frac{z-1}{-3}$$

↓

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3/2} = \frac{z-1}{-3}$$

→ pto (0, +1, 1)
 $\vec{v} = (2, 3/2, -3)$

$$b) \text{ c: } \frac{-x+4}{-3} = \frac{\frac{2y-4}{2}}{-4} = \frac{\frac{3z-2}{-4}}{-4/3}$$

↓ ↓ ↓

$\frac{y-2}{4}$ $\frac{z-2/3}{-4/3}$

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2/3}{-4/3}$$

→ pto (-1, 2, 2/3)
 $\vec{v} = (-3, 4, -4/3)$

IMPORTANT

Ecuaciones de los ejes de coordenadas.

Eje X. $O(0,0,0)$
 $\vec{i}(1,0,0)$

Ec's vect. $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$

Ec's paramétricas.

$$\begin{aligned}x &= \lambda \\y &= 0 \\z &= 0.\end{aligned}$$

Ec's implícitas

$$\begin{aligned}y &= 0 \\z &= 0.\end{aligned}$$

Eje Y. $O(0,0,0)$
 $\vec{j}(0,1,0)$

Ec's vect. $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0)$

Ec's paramétricas. $\begin{aligned}x &= 0 \\y &= \lambda \\z &= 0.\end{aligned}$

Ec's implícitas.

$$\begin{aligned}x &= 0 \\z &= 0.\end{aligned}$$

Eje Z. $O(0,0,0)$
 $\vec{A} = (0,0,1)$

2º Bach / Mat II
Tema 11 / 6

Ec. Vectorial. $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,0,1)$.

Ec.'s paramétricas.

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= 0 \\z &= \lambda\end{aligned}$$

Ec. implícitas.

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= 0.\end{aligned}$$

Ecuaciones de los planos de coordenadas.

Plano XY. $O(0,0,0)$
 $\vec{C} = (1,0,0)$
 $\vec{J} = (0,1,0)$

Ec. Vectorial.

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$$

Ec.'s paramétricas.

$$\begin{aligned}x &= \lambda \\y &= \mu \\z &= 0.\end{aligned}$$

Ec. implícita.

$$z = 0.$$

Vector normal.

$$\vec{K} = (0,0,1).$$

Plano xz.

$$\begin{aligned} O & (0,0,0) \\ \vec{C} &= (1,0,0) \\ \vec{K} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Ec. vectorial.

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1).$$

Ec's paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 0 \\ z &= \mu. \end{aligned}$$

Ec's implícita

$$y=0.$$

Vector normal.

$$\vec{J} = (0, 1, 0)$$

Plano yz.

$$\begin{aligned} O & (0,0,0) \\ \vec{J} &= (0,1,0) \\ \vec{K} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Ec. vectorial.

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$$

Ec. paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \lambda \\ z &= \mu. \end{aligned}$$

Ec. implícita.

$$x=0.$$

Vector normal.

$$\vec{C} = (1, 0, 0).$$

2º Posiciones relativas de 2 rectas. Tema 11/A.Dadas 2 rectas r y s .

$$r = \begin{cases} \vec{P} = (p_1, p_2, p_3) \\ P(p_1, p_2, p_3) \\ \vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} \vec{P}' = (p_1', p_2', p_3') \\ P'(p_1', p_2', p_3') \\ \vec{d}' = (d_1', d_2', d_3') \end{cases}$$

Casos.

• Coincidentes $\left\{ \begin{array}{l} \text{misma dirección} \\ \text{un pto común.} \end{array} \right.$

• Paralelas. $\left\{ \begin{array}{l} \text{misma dirección} \\ \text{ningún pto común} \end{array} \right.$

• Se cortan $\left\{ \begin{array}{l} \text{distinta dirección} \\ \text{un pto común.} \end{array} \right.$

• Se cruzan $\left\{ \begin{array}{l} \text{distinta dirección} \\ \text{ningún pto común.} \end{array} \right.$

* La posición relativa de r y s viene definida por la posición de $\vec{d}$, $\vec{d}'$ y $\vec{PP}'$:

* Si $\begin{vmatrix} d_1 & d_1' & p_1' - p_1 \\ d_2 & d_2' & p_2' - p_2 \\ d_3 & d_3' & p_3' - p_3 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ los vectores son l.i. $\Rightarrow$ no son coplanarios $\Rightarrow$ rectas se cruzan

* Si $\det = 0 \Rightarrow$ los vectores son l.d.

Possibilidades:

- Si $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ no son $\parallel$, $\left(\frac{d_1}{d_1'} \neq \frac{d_2}{d_2'} \text{ o } \frac{d_1}{d_1'} \neq \frac{d_3}{d_3'} \right)$

las rectas son coplanarias,
pero no tienen la misma
dirección $\Rightarrow$ se cortan.

- Si $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ son $\parallel$ $\left(\frac{d_1}{d_1'} = \frac{d_2}{d_2'} = \frac{d_3}{d_3'} \right) :$

a) $\vec{PP}'$ no es $\parallel$ a $\vec{d}$: las rectas
son paralelas. ($P \notin S$)

b) $\vec{PP}' \parallel \vec{d}$: las rectas son coinci-
dentes ($P \in S$).

* Según los rangos:

$$M' = \begin{pmatrix} d_1 & d_1' & p_1' - p_1 \\ d_2 & d_2' & p_2' - p_2 \\ d_3 & d_3' & p_3' - p_3 \end{pmatrix}$$

Casos:

Ⓘ $\text{rango}(M) = 1 = \text{rango}(M') \Rightarrow \vec{d} \parallel \vec{d}'$ y $\vec{PP}'$ son
coincidentes ($\vec{d} \parallel \vec{d}'$; $P' \in \ell$; $\vec{d}, \vec{d}'$ y $\vec{PP}'$ misma
dirección).

II) $\text{rango}(M) = 1 < \text{rango}(M') = 2$ rgs son paralelas.
 $\vec{d} \parallel \vec{d}'$, $\vec{PP}' \nparallel \vec{d}$ y $\vec{d}'$
 (no paralelo)

III) $\text{rango}(M) = 2 = \text{rango}(M') \Rightarrow$ rgs se cortan.
 $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ son l.u., $\vec{PP}'$ d.l. de $\vec{d}$ y $\vec{d}'$
 depende linealmente.

IV) $\text{rango}(M) = 2$, $\text{rango}(M') = 3 \Rightarrow$ rgs se cruzan ($\vec{d}$, $\vec{d}'$ y $\vec{PP}'$ son l.u.).

* Según las ecs implícitas. (o sea, según sus rangos)

$$\left. \begin{array}{l} \text{e: } a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \hline \text{s: } a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ \quad a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sist de 4 ec con} \\ 3 \text{ incógnitas.} \end{array}$$

dadas Δ y Δ' (matriz de coef y ampliada)

• Si $|\Delta'| \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(\Delta') = 4 \neq \text{rango}(\Delta) = 3$
Se cruzan. (S.I.)

• Si $|\Delta'| = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{rango}(\Delta') = 3 \text{ y } \text{rango}(\Delta) = 3 \\ \text{S.C.I. (se cortan en un pto)} \\ \cdot \text{rango}(\Delta') = 3 \text{ y } \text{rango}(\Delta) = 2 \\ \text{(S.I.) Paralelas} \\ \cdot \text{rango}(\Delta') = 2 \text{ y } \text{rango}(\Delta) = 2 \\ \text{S.C.I. (Coincidente)} \end{array} \right.$

Observación Ver pto de corte (intersección) de 2 rectas secantes con ec's paramétricas y con ec's implícitas ó continua.

$$L: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + 6\lambda \end{cases}$$

$$S: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-8}{-1}$$

Igualar coord y diferenciar parámetros

$$x = 2 + 2\mu$$

$$S: y = 4 + \mu$$

$$z = 8 - \mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + \lambda = 2 + 2\mu \\ 2 + 3\lambda = 4 + \mu \\ 1 + 6\lambda = 8 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = -1 \\ 3\lambda - \mu = 2 \\ 6\lambda + \mu = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\mu = -1 \\ 3\lambda - \mu = 2 \\ 6\lambda + \mu = 7 \end{cases}$$

Resolver un sistema.

$$\lambda = 2\mu - 1$$

$$\text{sustituimos en 2}^{\text{a}} \text{ ec. } 3(2\mu - 1) - \mu = 2$$

$$6\mu - 3 - \mu = 2 \Rightarrow 5\mu = 5 \quad \mu = 1; \lambda = 2 - 1 = 1$$

Y estos valores cumplen la 3^{ra} ec.

Pto corte (4, 5, 7)

Pág 300

Act. 107 | Estudiar posición relativa de r y s.

a) $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = z+1$. $s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+8}{2} = z+5$.

$\vec{u} = (-1, 2, 1)$

$\vec{v} = (1, 2, 1)$

$P = (2, 0, -1)$

$P' = (-2, 8, 5)$

$\overrightarrow{PP'} = (-4, -8, -4)$

$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -8 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(M) = 2 = \text{rango}(M') \Rightarrow$
Rectas secantes.

M $\underbrace{\hspace{1cm}}$ son proporcionales

b) $r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

$s: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$

$\vec{u} = (-2, 2, 3)$

$\vec{v} = (2, -2, -3)$

$P = (0, -1, 0)$

$P = (0, 0, 0)$

$\overrightarrow{PP'} = (0, 1, 0)$

$M' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(M) = 1 \neq$
 $\text{rango}(M') = 2$
rectas paralelas.

$$c) r: x = -y = z$$

$$\vec{u} = (1, -1, 1)$$

$$P(0, 0, 0)$$

$$s: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

$$\vec{v} = (-1, 1, -1)$$

$$P'(0, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (0, 0, 0)$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \underbrace{1 & -1 & 0}_n \end{pmatrix} \quad \text{rango}(M') = \text{rango}(M) = 1.$$

Rectas coincidentes.

$$d) r: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

$$\vec{u} = (1, 2, 3)$$

$$P(0, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (1, 1, 0)$$

$$s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$$

$$\vec{v} = (3, 2, 4)$$

$$P'(1, 1, 0)$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ \underbrace{3 & 1 & 0}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(M) = 2 \neq \text{se cruzan.}$$

$$\text{rango}(M') = 3$$

$$e) r: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{4}$$

$$\vec{u} = (3, 2, 4)$$

$$P(0, 2, 5)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (-3, -7, 1)$$

$$s: \begin{cases} x = -3+t \\ y = -5-t \\ z = 6+3t \end{cases}$$

$$\vec{v} = (1, -1, 3)$$

$$P'(-3, -5, 6)$$

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ \underbrace{4 & 3 & 1}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(M) = 2.$$

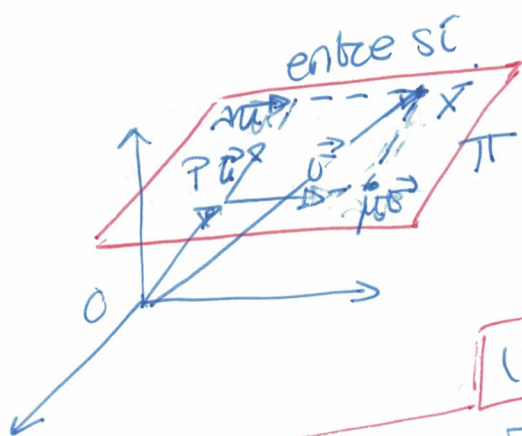
$$\text{rango}(M') = 2.$$

$\Rightarrow$ Rectas secantes.

3) Ecuaciones del plano.

Un plano Π queda determinado vectorialmente conociendo :

- Un pto $P \in \Pi$ (lo cual supone conocer $\vec{OP} = \vec{P}$) (Vector posición)
- Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$, paralelos a Π e indep.



entre sí.

$$\vec{OX} = \vec{P} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \leftarrow \text{Ec. vectorial de } \Pi.$$

λ, μ pueden tomar q' valor, al hacerlo, X recorre el plano.

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}$$

Ecuaciones paramétricas de Π .

Eliminamos los parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \lambda u_1 + \mu v_1 &= x - p_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 &= y - p_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 &= z - p_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{sist de} \\ 3 \text{ ec con} \\ 2 \text{ incog.} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Para que tenga solución el det matriz ampliada tiene que ser 0.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-p_1 \\ u_2 & v_2 & y-p_2 \\ u_3 & v_3 & z-p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Se obtiene una única ec. del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Ec. implícita de Π .

Act. 94. Escribir las ec. paramétricas y las ec. implícitas de los siguientes planos.

a) $\Delta(-1, 3, 1)$ y dirección de los vectores
pto $\vec{u} = (1, -1, 3)$ y $\vec{v} = (-1, -1, 4)$.

$$\left. \begin{aligned} x &= -1 + \lambda - \mu \\ y &= 3 - \lambda - \mu \\ z &= 1 + 3\lambda + 4\mu \end{aligned} \right\} \text{Ec's paramétricas.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ -1 & -1 & y-3 \\ 3 & 4 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 7y + 2z - 22 = 0.$$

Ec. implícita.

b) Pasa por los pto $\Delta(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(-3, 1, 0)$.

Formar 2 vectores (con el mismo pto de origen.)
pto (por ejemplo Δ)

$\vec{AB} = (1, 1, -3)$
 $\vec{AC} = (-4, 2, -2)$ (podemos sustituir este vector por uno || a él) $\Rightarrow (-2, 1, -1)$.

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 1 + \lambda - 2\mu \\ y &= -1 + \lambda + \mu \\ z &= 2 - 3\lambda - \mu \end{aligned} \right\} \text{Ec's paramétricas.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ -3 & -1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 7y + 3z - 1 = 0.$$

Ec. continua.

c) Pasa pto $\Delta(-\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2})$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2})$ y $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}\mu \\ y &= 2 - \frac{1}{2}\mu \\ z &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu \end{aligned} \right\} \text{Ec's paramétricas.}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & x + \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & y - 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & z - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 6y - 4z + 23 = 0.$$

Ec. continua.

d) Contiene al triángulo de vértices $\Delta(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

Forma dos vectores directores (mismo origen).

$$\vec{AB} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{AC} = (-1, 0, 1).$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - \lambda - \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned} \right\} \text{Ec's paramétricas.}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

Ec. de un plano conocido un pto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$

$$\Pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

$$P_0 \in \Pi \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

↓
cumple la ec de Π

Si las restamos:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \end{array}$$

$$(a, b, c) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

↓
producto escalar

$$\vec{P_0X} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{P_0X} \perp \vec{n}$$

Al variar X ; $\vec{P_0X}$ representa al conjunto de los vectores del plano. luego $\vec{n} \perp \Pi$.

Recíprocamente, si $\Pi \equiv ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a, b, c) \perp \Pi.$$

Otra forma de llegar a la misma conclusión:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-p_1 \\ u_2 & v_2 & y-p_2 \\ u_3 & v_3 & z-p_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (x-p_1) - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (y-p_2) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} (z-p_3) = 0$$

desarrollándolo por adjuntos de la última columna.

$$\Rightarrow \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \vec{u} \times \vec{v}$$

(el vector normal, es el vector resultante del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$)

Observación

Dada una recta $e \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$

(2) $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

se tiene que $\vec{n}_1 \perp e$ y $\vec{n}_2 \perp e \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ el vector director de e es $\perp \vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

Por tanto. $\vec{u}_e = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Pág 299.

Act 97 | Calcula un pto, 2 vectores l.c. y un vector normal a cada plano:

a)

a) $\Pi: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ Pto $(-1, 0, 1)$
 $\vec{u} = (-1, 3, -2)$
 $\vec{v} = (0, -2, -1)$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x+1 \\ 3 & -2 & y \\ -2 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7z - y + 2z = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \vec{n} = (-7, -1, 2)$

b) $\Pi: 3x - y - 2z = 0$. $\vec{n} = (3, -1, -2)$

Para las paramétricas, despejar una de las incógnitas en función de las otras dos, y tomar estas dos como parámetros

Pto $(0, 0, 0)$
 $\vec{u} = (1, 3, 0)$
 $\vec{v} = (0, -2, 1)$

$y = 3x - 2z \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$

Act 98 | Escribe unas ec. paramétricas para el plano de ec. implícita $\Pi \equiv x - 2y + 3z = 1$

$$x = 2y - 3z + 1.$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda - 3\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu. \end{aligned}$$

Act 99 | Escribe las ec. paramétricas para el plano que pasa por $\Delta(1, 3, -2)$ y tiene por vector $\vec{n} = (1, -2, 0)$.

a b c de la ec implícita.

$$1x - 2y + D = 0$$

Hay que determinar D , utilizando que $\Delta \in \Pi$.

$$1 - 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 5.$$

$$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0 \equiv \Pi$$

$$x = -5 + 2y$$

$$x = -5 + 2\lambda$$

$$y = \lambda$$

$$z = \mu.$$

4º] Posición relativa de 2 planos.

Dados 2 planos Π_1 y Π_2 :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

- Si $\text{rango}(M) = \text{rango}(M') = 2 \Rightarrow$ sist. comp. undet. Tiene sol.

Se cortan en una recta.

(a, b, c) y (a', b', c') no son proporcionales.

Los ptos P de π son solución de cualquier combinación lineal de Π_1 y Π_2 . i.e. sea:

$$\text{si } P(x, y, z) \in \pi \Rightarrow \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ec. del haz de planos
cuyo eje es π .

Más sencillo quedaría:

si suponemos $\lambda \neq 0$: $ax + by + cz + d + \frac{\mu}{\lambda}(a'x + b'y + c'z + d') = 0$.

$$\Rightarrow ax + by + cz + d + K(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

- Si $\text{rango}(\Pi) = 1$, $\text{rango}(\Pi') = 2$ $\Rightarrow$ sist no tiene solución $\Rightarrow$
 (a, b, c) y (a', b', c') son proporcionales, pero el término indep no.
SON PARALELOS

Dado $\Pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

$$| \quad ax + by + cz + K = 0. \quad K \in \mathbb{R}. \quad |$$

Ec. del haz de planos $\parallel$ a Π

- Si $\text{rango}(\Pi) = 1 = \text{rango}(\Pi')$ $\Rightarrow$ son el mismo plano. (Planos coincidentes).
 SCI con 2 parámetros.

De la ec. en forma continua de una recta se puede interpretar 2 planos que se cortan en ℓ

OBS: Cuando 2 de d_1, d_2, d_3 son cero, hay que tener cuidado.
coord. del vector director de ℓ

$$\text{Ej: } \frac{x-5}{7} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$$

No las 2 últimas entre sí

se emparejan

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y-2}{0}$$

$$\frac{x-5}{7} = \frac{z+3}{0}$$

Act. 103. Estudia la posición relativa de dos planos π y π' en los siguientes casos:

$$\left. \begin{array}{l} a) \pi: 2x - y + z = 0 \\ \pi': -2x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{M.}$

En π .; $\left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{array} \right| = -1 - 1 = -2 \neq 0$

$\text{rango}(M') = \text{rango}(M) = 2 \Rightarrow$ Se cortan en una recta.

$$\left. \begin{array}{l} b) \pi: 2x - y + z = 0 \\ \pi': -4x + 2y - 2z = 1 \end{array} \right\}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{M.}$

En no hay ningún de orden 2 $\neq 0$ en $\underline{M.}$

$\text{rango}(M) = 1$

ó que $\underline{F_2 = -2F_1}$.

Y en $\pi' \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \text{ rango}(M') = 2.$

luego. $\text{rango}(M) = 1 < \text{rango}(M') = 2$ S.I.

Son planos paralelos.

$$\left. \begin{array}{l} c) \pi: 2x - y + z = 0 \\ \pi': -4x + 2y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$M.$

Tanto $\text{rango}(M)$ como $\text{rango}(M') = 1 \Rightarrow$

$$F_2 = -2F_1 \text{ en } M \text{ y } M'$$

$\Rightarrow$ luego, $\text{rango}(M) = \text{rango}(M') = 1$ S.C.I.

Planos coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} d) \pi: x + y - z = 0 \\ \pi': x + z - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$M.$

En M , tenemos un $\det 2 \times 2 \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \text{rango}(M) = \text{rango}(M') = 2$ Se crocan en una recta.

5º) Posiciones relativas de una recta y un plano.

- Casos:
- La recta corta al plano.
 - La recta está contenida en el plano.
 - La recta es paralela al plano.

Ⓘ Si la recta viene definida por un punto y un vector

$$\Pi: ax+by+cz+d=0. \quad r: \begin{cases} x=P_1+\lambda d_1 \\ y=P_2+\lambda d_2 \\ z=P_3+\lambda d_3 \end{cases}$$

se sustituyen las ec's paramétricas de r en la ec de Π .

$$(ad_1 + bd_2 + cd_3)\lambda + (ap_1 + bp_2 + cp_3 + d) = 0.$$

Ec. lineal con una incógnita (2).

Ⓛ Si $\vec{n}$ no es $\perp \vec{d} \Rightarrow$ Se cortan. (una única sol).

Ⓛ Si $\vec{n} \perp \vec{d}$ ($\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$):

① Si $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d = 0 \Rightarrow$ r está contenida en Π . ($\forall \lambda$, hay solución)

② Si $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d \neq 0 \Rightarrow$ $r \parallel \Pi$ (no hay sol).

II) Si la recta viene definida por 2 planos

secantes:

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Pi: \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Tenemos un sist de 3 ec con 3 incógnitas.

$$\Delta^a = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta}$

Posibilidades:

[1] Si $\text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^a) = 3$ SCD.

son Secantes.

[2] Si $\text{rango}(\Delta) = 2 < \text{rango}(\Delta^a) = 3$.

SI Paralelos

[3] Si $\text{rango}(\Delta) = 2 = \text{rango}(\Delta^a) = 2$. SC I

es Π .

Pag 299

 Δ ct 405. Dado el plano

$$\pi: x - y + 2z = 1.$$

estudia la posición relativa de π , con cada una de estas rectas:

$$a) r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$$

Sustituimos x, y, z de r en π .

$$(1+t) - (-2t) + 2(3t) - 1 = 0.$$

$$(1+2+6)t + 1 - 1 = 0.$$

$$9t = 0. \quad t = 0.$$

Una única sol.

Se cortan en un pto $\Rightarrow (1, 0, 0)$.

Otra forma de ver que se cortan:

$$\vec{n}_{\pi} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{d}_r = (1, -2, 3)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{d} &= (1, -1, 2) \cdot (1, -2, 3) = \\ &= 1 + 2 + 6 \neq 0 \end{aligned}$$

no son perpendiculares

$$b) S: \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{1}.$$

Pasamos la ec continua de S, a ec's implícitas,

$$S: \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x - 2z = -2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta^a = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & -2 \\ 1 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos los rangos de Δ y Δ^a .

Para el rango Δ $\begin{cases} |\Delta| = 4 - 8 + 4 = 0. \Rightarrow \text{rango}(\Delta) \neq 3 \\ \text{Un det } 2 \times 2 \text{ de } \Delta \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \\ \Rightarrow \text{rango}(\Delta) = 2. \end{cases}$

Ordenamos el menor 2×2 anterior con la columna de los términos indep.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 8 + 2 \neq 0.$$

$$\text{luego } \text{rango}(\Delta^a) = 3.$$

$$\Rightarrow \text{rango}(\Delta) = 2 < \text{rango}(\Delta^a) = 3 \text{ S.I.}$$

Son paralelos r// Π .

c) $t:$ $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ *nombre recta*

$$(1 + 2\lambda) - 4\lambda + 2\lambda - 1 = 0.$$

$$(2 - 4 + 2)\lambda + (1 - 1) = 0.$$

$$0\lambda = 0 \Rightarrow$$

hay sol. para $\forall$ valores de λ .

Otra forma de verlo: $\Rightarrow t \in \Pi$ (plano contiene a t).

$$\vec{n} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{d} = (2, 4, 1).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = 2 - 4 + 2 = 0 \text{ sen } \perp.$$

$$\text{y } (1 - 1) = 0 \Rightarrow t \in \Pi.$$

Pág 300

Act 106. Calcula el pto de intersección de la recta con el plano.

$$a) r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

$$\Pi: 2x + y - z = 0.$$

Escribimos r en paramétricas.

$$\text{Pto } (0, 0, 0)$$

$$\vec{d} = (1, -1, 1)$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituimos en Π :

$$2\lambda - \lambda - \lambda = 0 \Rightarrow 0\lambda = 0 \quad \forall \lambda \text{ hay sol.}$$

$$\Rightarrow r \in \Pi.$$

b) e: $\begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $\Pi: 3x + 2y - z + 1 = 0.$

$$3(10 - 3t) + 2(-7 + 2t) - (-1 + t) + 1 = 0.$$

$$30 - 9t - 14 + 4t + 1 - t + 1 = 0.$$

$$-6t = -18$$

$t = 3 \Rightarrow$ e y plano se cortan en

un pto. $(10 - 3 \cdot 3, -7 + 2 \cdot 3, -1 + 3) =$

sustituye $t = 3$ en e:

$= (1, -1, 2)$ Pto.

6º) Posiciones relativas de 3 planos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dados } \Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \Pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sist de} \\ \text{3 ec en} \\ \text{3 incog.} \end{array}$$

• Si $|\Delta| \neq 0$; $\text{rango}(\Delta) = 3 = \text{rango}(\Delta^a) \Rightarrow \text{S.C.D.}$

forman un triedro 

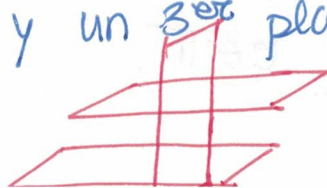
• Si $\text{rango}(\Delta) = 2$, $\text{rango}(\Delta^a) = 3 \Rightarrow \text{S.I.}$

* No existe proporcionalidad entre 2 filas de Δ .

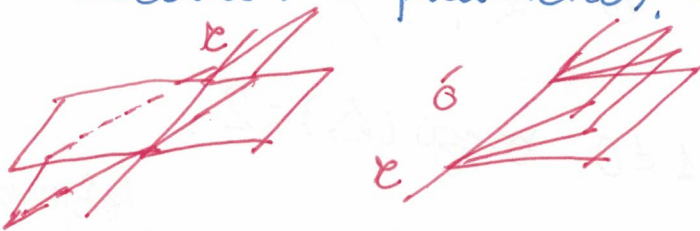
$\Rightarrow$ No hay planos paralelos $\rightarrow$ Superficie prismática triangular.



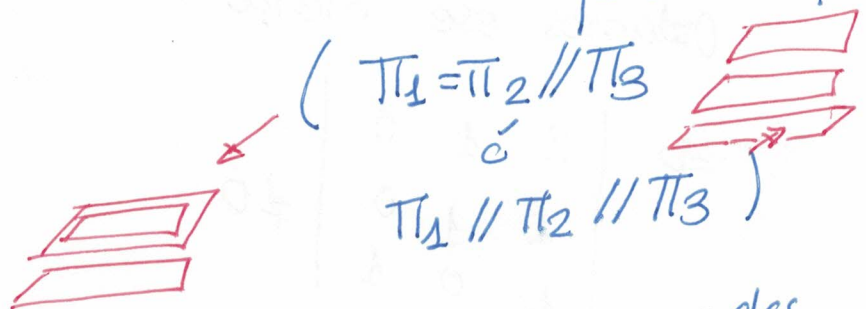
* Dos filas de Δ son proporcionales $\Rightarrow$ hay dos planos paralelos y un 3er plano secante.



- Si $\text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^a) = 2 \Rightarrow \text{SCI}$. con 1 grado de libertad / 1 parámetro. $\Rightarrow$ Haz de planos con un eje común.



- Si $\text{rango}(\Delta) = 1 \neq \text{rango}(\Delta^a) = 2 \Rightarrow \text{SI} \Rightarrow 3$ planos paralelos, (todos tienen el mismo vector normal)



- Si $\text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^a) = 1 \Rightarrow \text{SCI}$ (2 grados de libertad / 2 parámetros) $\Rightarrow$ Coincidentes.



Pag 299.

 Δ 6 104.

Estudia la posición relativa de 3 planos.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \left. \begin{aligned} \Pi : 2x - y + z &= 0 \\ \Pi' : 3x + y + 4z &= 0 \\ \Pi'' : x + y - z &= 3. \end{aligned} \right\} \Delta^a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$|\Delta| \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^a) = 3 \Rightarrow$ Se cortan en un pto (Triedro).
SCD.

$$b) \left. \begin{array}{l} \Pi: 2x+y+z=0 \\ \Pi': x+y-z=0 \\ \Pi'': x+2z=1 \end{array} \right\} \Delta^a = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$|\Delta| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 \neq 0. \text{ rango}(\Delta) = 2.$$

Quitamos ese menor con la columna de las indep. ^{formamos}

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rango}(\Delta) = 2 < \text{rango}(\Delta^a) = 3 \text{ S.I.}$$

Como no existe ninguna pareja de planos paralelos. (los vectores normales no son proporcionales 2 a 2) $\Rightarrow$ Forman un prisma.

$$c) \left. \begin{array}{l} \Pi: x+y+z=0 \\ \Pi': 3x+2y+1=0 \\ \Pi'': x+2y+1=0 \end{array} \right\} \Delta^a = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$|\Delta| = -6 + 2 \neq 0.$$

$\text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^a) = 3$ Se cortan en un pto (Tetraedro).

$\hookrightarrow$ Los indep los he puesto detrás =)

$$d) \left. \begin{array}{l} \Pi: -2x - y + 3z = 3 \\ \Pi^I: 6x + 3y - 9z = -9 \\ \Pi^{II}: -10x - 5y + 15z = 15 \end{array} \right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & -9 \\ -10 & -5 & 15 & 15 \end{array} \right)$$

$|\Delta| = 0$; y las tres filas de Δ^* son proporcionales
 $\Rightarrow \text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^*) = 1$ Planos coincidentes.

$$e) \left. \begin{array}{l} \Pi: 2x - y + z = 0 \\ \Pi^I: x - 2y + 3z = 1 \\ \Pi^{II}: 3x - 3y + 4z = 1 \end{array} \right\} \Delta^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$|\Delta| = -16 - 3 - 9 + 6 + 18 + 4 = 0.$$

$$\Rightarrow \det_{2 \times 2} \text{ de } \Delta \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rango}(\Delta) = 2.$$

Orlamos ese menor con la columna de los términos

indep.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 6 + 1 = 0.$$

$$\text{rango}(\Delta^*) = 2$$

$$\text{rango}(\Delta) = 2 = \text{rango}(\Delta^*) -$$

No hay par de vect $\vec{n}$ proporcionales,
 $\Rightarrow$ Se cortan en una recta.

$$\left. \begin{array}{l} f) \quad \Pi: 2x - 4y + 6z + 1 = 0 \\ \quad \Pi': x + 2y + z = 0 \\ \quad \Pi'': x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Delta^a = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta| = 12 - 12 - 4 - 12 + 4 + 12 = 0.$$

$$\text{Un det } 2 \times 2 \text{ en } \Delta \neq 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0.$$

$$\text{rango}(\Delta) = 2.$$

Ordenamos ese menor con los términos indep.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 2 + 4 = 12 \neq 0.$$

$$\text{rango}(\Delta) = 2 < \text{rango}(\Delta^a) = 3.$$

Π y Π'' sus $\vec{n}$ son proporcionales. $\Rightarrow$ son paralelos.

$\Rightarrow$ 2 planos // y el otro los corta.

$$g) \left. \begin{aligned} \Pi: 2x - y + 3z &= 4 \\ \Pi': x - 2y - z &= -7 \\ \Pi'': -2x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta^A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$|\Delta| \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^A) = 3$
 Tercero $\Rightarrow$ Se cortan en un pto.

$$h) \left. \begin{aligned} \Pi: x + y - z &= 0 \\ \Pi': x - y + z &= 0 \\ \Pi'': x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A^A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$|\Delta| = 0$; tenemos un $\det_{2 \times 2}$ en $\Delta \neq 0$. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

y como la col de los términos indep es 0 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{rango}(\Delta) = \text{rango}(\Delta^A) = 2.$$

No hay ninguna pareja de planos coincidentes

$\Rightarrow$ Se cortan en una recta.

PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

1º) Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4,2,5)$ y es paralela al eje OZ.

2º) Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es paralela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo $\vec{u} = (1,-1,2)$ y $\vec{v} = (2,0,0)$.

3º) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

$$a) r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

$$b) r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

$$s \equiv \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

$$c) r \equiv \frac{x}{2} = y-1 = \frac{z+1}{3}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ 3y-z+1=0 \end{cases}$$

$$d) r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=3+6\lambda \\ z=4+8\lambda \end{cases}$$

4º) Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan, y halla el punto de corte:

$$r \equiv x = y = z - a$$

$$s \equiv \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

5º) Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

6º) Halla las ecuaciones de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto $A(1,-3,2)$ y por los vectores $\vec{u} = (2,1,0)$ y $\vec{v} = (-1,0,3)$.

b) Pasa por el punto $P(2,-3,1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n} = (5,-3,-4)$.

c) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto $(1,0,1)$.

7º) Calcula m y n para que los planos: $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$ y $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

8º) Escribe la ecuación del plano que pase por los puntos $(0,0,0)$, $(2,2,0)$ y $(1,1,2)$.

9º) Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,1,2)$ y a la recta:

$$x-2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$$

10º) Comprueba que las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z-2 \quad s \equiv \begin{cases} x-2z=5 \\ x-2y=11 \end{cases}$$

son paralelas, y halla la ecuación del plano que las contiene.

11º) ¿Son coplanarios los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(2,1,0)$ y $D(-1,2,1)$?

12º) Calcula b para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \quad s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

13º) Determina el valor de a para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \quad s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$$

Halla el plano que las contiene.

14º) ¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s ?

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z+1 \quad s \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

15º) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y el plano

$$\pi \equiv x - y + z - 3 = 0.$$

16º) Dadas la recta r determinada por los puntos $A(1,1,1)$ y $B(3,1,2)$, y la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \quad \text{estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.}$$

$$17^\circ) \text{ Dada la recta } r \equiv \begin{cases} 3x+ay+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases}$$

a) Halla, para cada valor de a , las ecuaciones paramétricas de r_a .

b) Discute la existencia de valores de a para que la recta r_a esté incluida en el plano

$$x + y + z = 1.$$

18º) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,3,2)$ y $B(-2,5,0)$ y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}.$$

19º) Estudia la posición de las siguientes rectas y halla, si es posible, el plano que las contiene:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$$

20º) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y es paralelo a:

$$s \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}.$$

21º) Calcula el valor de m para que los puntos $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?

22º) Dado el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

23º) Estudia la posición de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$

24º) Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-3,2)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

25º) Halla el valor de a para que las rectas r y s estén en un mismo plano y halla la ecuación de ese plano:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2z = a \end{cases}$$

26º) Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y el plano $ax - y + 4z - 2 = 0$.

- Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.
- ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

27º) Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0$, halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a r .

28º) Halla la ecuación de la recta paralela a $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ que pase por el punto de intersección de la recta

$$s \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3} \text{ con el plano } \pi \equiv x - y + z = 7.$$