TEMA 38: TRIGONOMETRÍA PLANA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS. APLICACIONES.

TIEMPO: 105 — 98

Esquema

1) Introducción
   1.1) Trigonometría primitiva
   1.2) Trigonometría hindú
   1.3) Trigonometría árabe
   1.4) Desarrollo posterior
2 Ángulos
   2.1) Def: ángulo, á. nulo, á. llano, á. recto, á. congruente
   2.2) Medidas de ángulos: vuelta, radián, sexagesimal, centesimal
   2.3) Razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente
3) Funciones circulares
   3.1) Circunferencia trigonométrica
   3.2) Def: seno, coseno, tangente
   3.3) Interpretación geométrica
   3.4) Relaciones trigonométricas: fundamental
4) Ángulos de giro
   4.1) Def: producto escalar, base ortonormal, norma, ap. ortogonal, grupo ortogonal
   4.2) Def: rotaciones lineales, ángulo, seno, coseno
5) Más fórmulas trigonométricas
   5.1) Suma y diferencia
   5.2) Ángulo doble
   5.3) Ángulo mitad
6) Resolución de triángulos
   6.1) Teorema del Coseno
   6.2) Teorema del Seno
   6.3) Resolución de triángulos
   6.4) Aplicaciones

1) Introducción:

▷ Trigonometría primitiva: ya egipcios y babilonios en la antigüedad utilizaban propiedades en relación a los lados de triángulos semejantes, aunque no manejaban la medida de ángulos.
Los antiguos griegos hacían estudios sistemáticos de las relaciones entre los ángulos centrales de un círculo y las longitudes de las correspondientes cuerdas.
Mediante un lenguaje geométrico, Euclides en sus "*Elementos*" demuestra el Teorema del Coseno para ángulos agudos y obtusos, el Teorema de Pitágoras y otros que son aplicación del Teorema del Seno. A continuación destacaremos algunos de los filósofos griegos que contribuyeron al desarrollo de la Trigonometría plana:

1) Aristarco de Samos: quien propuso un sistema heliocéntrico.

2) Eratóstenes de Cirene: calculó la distancia Tierra-Sol usando sombras de pozos.

3) Hiparco de Nicea: tabuló valores de arcos y cuerdas para muchos ángulos. Se le conoce como "el padre de la Trigonometría".

4) Ptolomeo: con su "*Sintaxis Matemática*" (conocida como "*Almagesto*": la colección mayor).

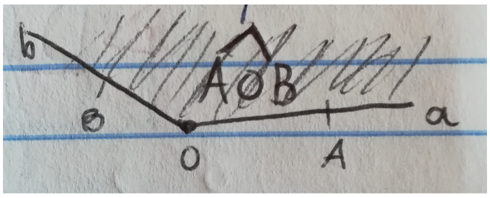
▷ Trigonometría hindú: introducen la función seno y reemplazarán las tablas griegas de cuerdas. Ya en el s.V a.C. tenemos tablas de senos de ángulos menores de 90º en 24 intervalos angulares iguales. Para algunos cálculos usaban $\sqrt{10}$ como aproximación de π.

▷ Trigonometría árabe: empezaron usando los métodos de cuerdas griegos y las tablas de senos de la India aunque al final adoptaron el método hindú. Fueron los árabes quienes introdujeron el seno y el sistema decimal hindú en Europa. Los árabes introducen la tangente como el cociente entre los catetos de un triángulo rectángulo. Ellos se basaron en el "*Almagesto*" griego y demostraron teoremas como las fórmulas del ángulo doble, ángulo mitad, triángulos esféricos,... En sus tablas de senos (realizadas incluso de minuto en minuto) alcanzan una precisión de 9 cifras decimales. El origen de la palabra "*seno*" pudo ser un error de traducción de la palabra "*jiba*" (la original) por "*jaib*" que es "*sinus*" en latín.

▷ Desarrollo posterior: durante la Edad Media las tablas trigonométricas se fueron completando y a raíz de la toma de Constantinopla en 1.453 y la fuga de filósofos hacia Europa, junto con el descubrimiento de la imprenta, hicieron que en Europa se viviera un gran auge de la Trigonometría y la Astronomía. Un discípulo de un discípulo de Copérnico recopiló dos volúmenes con los trabajos europeos más importantes hasta la fecha. En ellos destaca la aparición, por primera vez, de las funciones trigonométricas como razones entre los lados de un triángulo rectángulo.

2) Ángulos:

▷ **Definición**: llamamos ángulo a la región del plano delimitada por dos semirrectas "a" y "b" de origen común un punto O. Dados $A \in a$, $B \in b$, designamos el ángulo $\widehat{AOB}$, que indica que vamos desde A hasta O y después hasta B (y así evitamos la ambigüedad en la región del plano a considerar). Es decir, giramos la semirrecta "a" en sentido antihorario (positivo) hasta hacerla coincidir con la semirrecta "b".



▷ **Definición**: si las semirrectas coinciden, lo llamaremos ángulo nulo.

▷ **Definición**: si las semirrectas forman una recta, lo llamaremos ángulo llano. Si las semirrectas son perpendiculares lo llamaremos ángulo recto.

▷ **Definición**: dos ángulos se dirán iguales/congruentes cuando las dos regiones del plano que delimitan pueden superponerse con una isometría (giro y/o traslación).

▷ *Nota*: esta relación de "ser congruente" es de equivalencia y nos permite ver los ángulos como giros de un vector con el punto de giro fijo. Esta idea la explotaremos más adelante.

▷ **Definición**: si la región está comprendida entre la del ángulo nulo y la del ángulo recto, lo llamaremos ángulo agudo. Si está comprendida entre la del ángulo recto y la del ángulo llamo lo llamaremos ángulo obtuso.

▷ **Medida de ángulos**: la medida de un ángulo se ha realizado a partir del arco que sus lados limitan sobre una circunferencia trazada con centro en el vértice. La idea intuitiva de medida de un ángulo como magnitud que informa acerca de la separación entre sus lados, lleva a definir como medida cualquier procedimiento para asignar a cada ángulo un número sujeto a:

1) El número no debe depender de la "posición" que el ángulo ocupe en el plano.
2) La medida debe ser aditiva: la suma de la medida de dos ángulos debe de ser la suma de las medidas de los ángulos.
3) Si le asignamos $m > 0$ al ángulo llano, cualquier ángulo deberá tener una medida entre 0 y $2m$. Y al revés: cualquier número entre 0 y $2m$ deberá de ser la medida de cierto ángulo.

Esto último lo podemos generalizar admitiendo que si $a \in [0, 2m]$, entonces la medida de un ángulo puede ser igual a cualquier número de la forma $a + 2m \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así, los diferentes sistemas de unidades que se emplean para medir ángulos dependerán del valor que se le dé a "m".

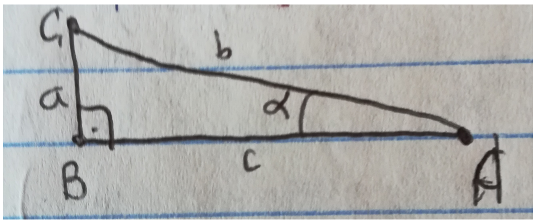
a) Si $m = 1/2$, la unidad es la vuelta.

b) Si $m = \pi$, la unidad es el radián (un ángulo cuya medida es la longitud del arco con que se traza).

c) Si $m = 180$, la unidad es el grado sexagesimal.

d) Si $m = 200$, la unidad es el grado centesimal.

▷ **Razones trigonométricas**: sea α un ángulo agudo cualquiera y construimos el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. Vamos a definirlas como nos llegaron en El Renacimiento.



▷ **Definición**: llamaremos seno de α, $\sin(\alpha)$, al cociente entre la longitud del cateto opuesto a α y la longitud de la hipotenusa: $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{b}$

▷ **Definición**: llamaremos coseno de α, $\cos(\alpha)$, al cociente entre la longitud del cateto contiguo a α y la longitud de la hipotenusa: $\cos(\alpha) = \dfrac{c}{b}$

▷ **Definición**: llamaremos tangente de α, $\tan(\alpha)$, al cociente entre la longitud del cateto opuesto a α y la longitud del cateto contiguo: $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{c}$

▷ *Nota*: las definiciones no dependen de las dimensiones del triángulo (Tª de Tales). En principio sólo contemplaríamos ángulos agudos (es decir, más pequeños que el ángulo recto) pero lo extendernos en breves con las circunferencia unidad y las funciones circulares.

▷ **Definición**: llamaremos cosecante de α, $\csc(\alpha)$ a: $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$

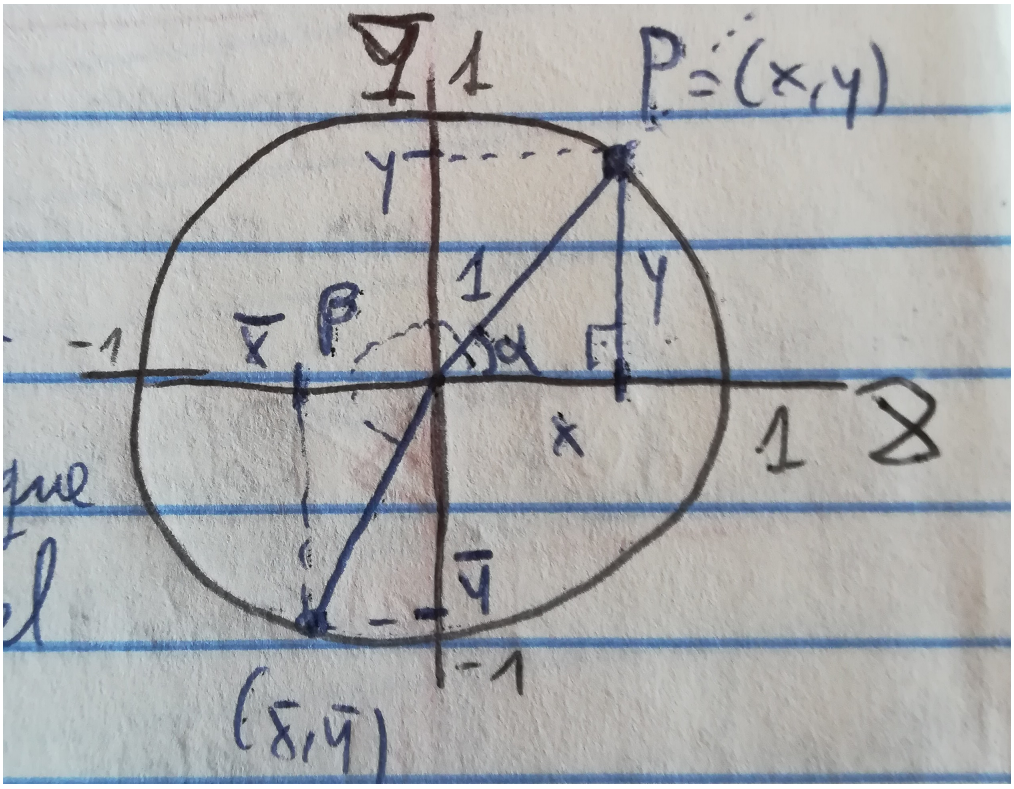
▷ **Definición**: llamaremos secante de α, $\sec(\alpha)$ a: $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

▷ **Definición**: llamaremos cotangente de α, $\cot(\alpha)$ a: $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

▷ *Nota*: siempre que los anteriores cocientes tengan sentido.

3) Funciones circulares:

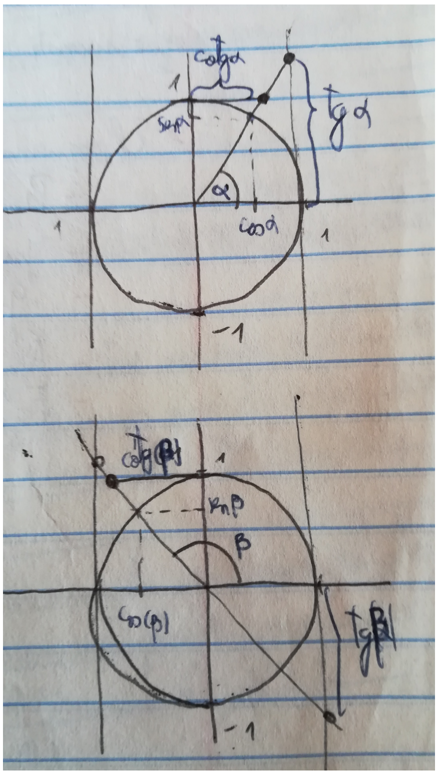
▷ Consideremos los ejes de coordenadas y la circunferencia de radio unidad. Podemos unir cualquier punto de la circunferencia con el origen. Llamemos $P = (x, y)$ a dicho punto. Es claro que tenemos un triángulo rectángulo con catetos "x" e "y" e hipotenusa 1. Tenemos también el ángulo "α" (una semirrecta es el eje y la otra la que pasa por el origen y el punto P). Según vimos en el apartado anterior, podemos definir las razones trigonométricas de α como: $\sin(\alpha) = y$, $\cos(\alpha) = x$ y $\tan(\alpha) = y/x$. Si generalizamos esto a los cuatro cuadrantes obtenemos:



▷ **<u>Definición</u>**: el <u>seno de α</u> es la longitud de la proyección sobre el eje $\mathbb{Y}$ del punto (x, y). El <u>coseno de α</u> es la longitud de la proyección de P sobre el eje $\mathbb{X}$. La <u>tangente de α</u> es el cociente entre el seno y el coseno. Todas ellas con signo.
Dicho de forma equivalente: ... son el valor de la ordenada, la abscisa y el cociente entre la ordenada y la abscisa.

▷ Si tomamos el radián como unidad de medida, tendríamos definidos ángulos para cualquier valor $x \in [0, 2\pi[$. ¿Cómo lo extendemos a cualquier valor real?
Si nos fijamos en $x = 2\pi$, vemos que coincide con $x = 0$. Si seguimos girando observamos que si $x = y + 2\pi \cdot k$, con $k \geq 0$ entonces las razones trigonométricas de "x" e "y" son idénticas. Igualmente si giramos en sentido opuesto.
Entonces, si $x = y + 2\pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$, las razones trigonométricas de ambos ángulos coinciden. En realidad lo que estamos haciendo es tomar clases de equivalencia sobre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ y si $\overline{x}, \overline{y} \in [\overline{z}] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, entonces $\sin(\overline{x}) = \sin(\overline{y})$ y $\cos(\overline{x}) = \cos(\overline{y})$.

▷ **Interpretación geométrica de las razones trigonométricas**: todas ellas se pueden obtener a partir de la semejanza de triángulos y teniendo en cuenta el signo.



▷ **Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo**: de la interpretación geométrica podemos obtener algunas de las relaciones de manera muy fácil. Aquí contemplaremos sólo las más básicas y fundamentales.

▷ **Relaciones fundamentales de la trigonometría**:

a) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

b) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

▷ **Más relaciones**:

1) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Simetría respecto al eje $\mathbb{X} \longleftrightarrow$ ángulos opuestos.

2) $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Simetría respecto al eje $\mathbb{Y} \longleftrightarrow$ ángulos suplementarios.

3) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$. Simetría respecto al origen $\longleftrightarrow$ ángulos que difieren en π radianes.

4) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$; $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$. Simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante $\longleftrightarrow$ ángulos complementarios.

5) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$; $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$. Ángulos que difieren en $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

$\triangleright$ *Nota*: con los apartados **(1)**, **(2)** y **(3)** podemos relacionar el seno y el coseno de cualquier ángulo con los correspondientes en el primer cuadrante. De las fórmulas fundamentales podemos sacar relaciones para la secante, la cotagente,... pero no aportan nada nuevo. Por último señalar que para las razones de la suma de ángulos, el ángulo mitad,... en vez de intentar deducirlas desde aquí vamos a seguir otro camino muy visual y geométrico: asociar ángulos a matrices de giro. Una vez hagamos esto sumar ángulos, por ejemplo, se reducirá a componer giros, que equivale a multiplicar matrices.

$\triangleright$ Para definir los ángulos de giro necesitaremos tomar un rodeo y hablar de varias herramientas teóricas que necesitaremos. Las veremos en el siguiente orden:

1) Producto escalar.

2) Grupo ortogonal de E^2.

3) Grupo ortogonal directo.

4) Ángulos de rotación.

5) Fórmulas trigonométricas.

4) Ángulos de giro:

▷ **Definición**: sean $a, b \in$\{esp. vectorial de los vectores libres del plano\}$= V(\mathbb{R}^2) = V$ (para simplificar). Llamamos producto escalar de "a" y "b", a $a \cdot b$, a toda aplicación $f : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ que cumpla:

1) $\forall a \in V - \{0\}$, $a \cdot a > 0$

2) $\forall a, b \in V$, $a \cdot b = b \cdot a$

3) $\forall a, b, d \in V$, $a \cdot (b + d) = a \cdot b + a \cdot d$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall, b \in V$, $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

▷ **Definición**: una base de V es ortonormal cuando la matriz asociada al producto escalar es la Id. Es decir, si $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $b = (\beta_1, \beta_2)$, entonces $a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$. Al par $(V, \cdot)$ lo llamamos plano vectorial euclídeo o E^2.

▷ **Definición**: llamamos norma de $a \in V$ al número real $||a|| = +\sqrt{a \cdot a}$. Al par $(V, || \cdot ||)$ lo llamamos plano normado.

▷ **Definición**: decimos que dos vectores son ortogonales si $a \cdot b = 0$.

▷ **Definición**: si tenemos un endomorfismo $f : E^2 \mapsto E^2$ cumpliendo además que $f(a)f(b) = a \cdot b$, $\forall a, b \in V$, diremos que "f" es una aplicación ortogonal. Al conjunto de aplicaciones ortogonales de E^2 en E^2 lo notaremos por $A_0(E^2)$.

▷ **Proposición**: la condición anterior sobre el producto escalar equivale a que $||f(a)|| = ||a||$. Esto prueba, además, que "f" es un automorfismo.

▷ Con la composición como producto, $(A_0(E^2), \circ)$ tiene estructura de grupo con unidad (la identidad). Este es el llamado grupo ortogonal de E^2

▷ **Proposición**: $f : E^2 \longmapsto E^2$ es aplicación ortogonal $\longleftrightarrow$ la imagen de cualquier base ortonormal es base ortonormal.

▷ Usando esta proposición vemos que si tenemos la base $B = \{u_1, u_2\}$, la matriz asociada a dicha base ortonormal es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Imponiendo las condiciones de "f" obtenemos que la matriz para "f" en la base B es: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}$ con $\det(M) = 1 = -\det(N)$ y con $\det(M) = a_{11}^2 + a_{12}^2$.

▷ **<u>Definición</u>**: las aplicaciones lineales ortogonales que conservan la orientación del plano las llamamos <u>rotaciones lineales</u> y son aquellos automorfismos ortogonales cuya matriz asociada tiene por determinante 1. Es decir, $M_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

▷ El conjunto de rotaciones lineales con la composición lo notaremos por $(A_0^+(E), \circ)$ y tiene estructura de grupo abeliano con unidad. Lo llamaremos <u>grupo ortogonal directo</u>.

▷ Una rotación lineal está determinada por un par (a, b) de vectores unitarios. Sin embargo hay infinitos de esos pares que determinan esa misma rotación ($(v, f(v))$ para v unitario). Definimos una relación de equivalencia en el plano: dados (a, b) y (c, d) diremos que están relacionados si $(a, b) \sim (c, d)$ cuando $\exists f \in A_0^+(E^+)$ tal que $f(a) = c,\ f(b) = d$.

▷ **<u>Definición</u>**: la clase de equivalencia a la que pertenece el par de vectores unitarios (a, b) se llama <u>ángulo del par (a, b)</u>. El conjunto cociente formado por las clases de equivalencia lo escribimos como $\mathcal{A}$ y será el conjunto de los infinitos ángulos en el plano.

▷ Tenemos una biyección entre $\mathcal{A} \longleftrightarrow A_0^+(E^2)$ de modo que a cada ángulo le corresponde una única rotación lineal y viceversa. Podemos definir la suma de ángulos como la composición $f \circ g$ donde $\alpha \longleftrightarrow f$, $\beta \longleftrightarrow g$ y $f \circ g \longleftrightarrow \alpha + \beta$. Además, se tiene que $f \circ g = g \circ f$ (esto no ocurre en el caso de tres dimensiones). El elemento Id es el ángulo nulo. Al ángulo opuesto le corresponderá la rotación recíproca, etc.
En resumen, $((A), +)$ es un grupo abeliano con unidad isomorfo a $(A_0^+(E^2), \circ)$.

▷ **<u>Definición</u>**: sea unan rotación lineal "f" de matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ con $x^2 + y^2 = 1$. Llamamos <u>coseno de "f" (= coseno del ángulo "α")</u> al número real "x". Es decir, $\cos(\alpha) = x$.

▷ **<u>Definición</u>**: en el caso anterior, llamamos <u>seno de "f" (= seno del ángulo "α")</u> al número real "y". Es decir, $\sin(\alpha) = y$.

▷ Claramente se cumple la relación fundamental de la trigonometría:

$$x^2 + y^2 = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

A partir de estas definiciones de seno y coseno obtenemos el resto de relaciones trigonométricas.

▷ *Nota*: como añadido al producto escalar, presentamos la conocida fórmula:

$$a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos(a, b)$$

y que usaremos en el Teorema del Coseno.

5) Más fórmulas trigonométricas:

▷ **Fórmula de la suma de dos ángulos**: sean f y g las rotaciones de ángulos α y β respectivamente. La suma de dos ángulos vendrá dada por la composición. Si tomamos las matrices de f y g y las multiplicamos, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos fácilmente que:

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

▷ Si tenemos $f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $f^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (matriz de $-\alpha$). Entonces, como el ángulo opuesto de α es $-\alpha$, la fórmula para la diferencia de dos ángulos es $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$ es:

$$\begin{cases} \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

▷ **Fórmula del ángulo doble**: es un caso particular de la suma de dos ángulos. También podemos obtenerla como $\alpha + \alpha = f \circ f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^2$ de donde obtenemos:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \\ \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta) \end{cases}$$

▷ **Fórmula del ángulo mitad**: el ángulo γ es la mitad del ángulo ω ($2\gamma = \omega$) cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$. Supongamos la matriz asociada a $\gamma \longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Entonces, como $\gamma + \gamma = \omega \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$ con $x^2 + y^2 = 1$. Nos quedará el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \cos(\omega) \\ 2xy = \sin(\omega) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Resolviéndolo:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\omega)}{2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\omega)}{2}} \end{cases}$$

Es decir:

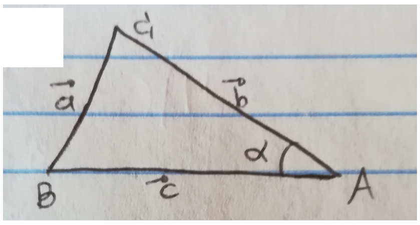
$$\begin{cases} \cos(\gamma) = \cos(\frac{\omega}{2}) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\omega)}{2}} \\ \sin(\gamma) = \sin(\frac{\omega}{2}) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\omega)}{2}} \end{cases}$$

6) Resolución de triángulos:

▷ La resolución de triángulos es un problema clásico de la geometría plana y consiste en determinar tres elementos de un triángulo conocidos los otros tres. Empezaremos con los dos grandes teoremas y después pasaremos a la resolución de triángulos. Finalizaremos la sección con algunos supuestos prácticos.

▷ **Teorema del Coseno**: dado $\overset{\triangle}{ABC}$ y un ángulo α, se tiene que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

Proof. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, entonces:
$||a||^2 = ||b-c||^2 = ||b||^2 + ||c||^2 - 2\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \{\text{producto escalar}\} = ||b||^2 + ||c||^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \longrightarrow$
$\longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ □



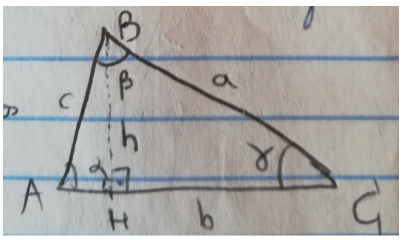
▷ **Corolario**: si tenemos $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ obtenemos el Teorema de Pitágoras.

▷ **Teorema del Seno**: en todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Es decir: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

Proof. Sea H el punto donde cortan $\overrightarrow{AC}$ y la altura desde $\overrightarrow{B}$. Tenemos dos triángulos rectángulos.
Sea $h = ||\overrightarrow{BH}|| \longrightarrow \sin(\alpha) = \dfrac{h}{c}$ y $\sin(\gamma) = \dfrac{h}{a}$.
Despejando h nos queda que: $c \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\gamma) \longrightarrow \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha)}$. Con cualquier otra altura probamos la tercera igualdad. Así pues:

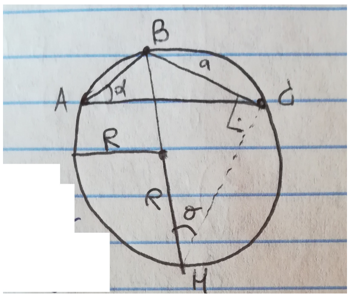
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Nota: si el ángulo es obtuso usamos que $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$ □



▷ *Nota* (interpretación geométrica del Teorema del Seno): dibujamos la circunferencia circunscrita al triángulo. Desde C trazamos una perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ y cortamos en H.
Unimos H con B y obtenemos que $||\overrightarrow{HB}|| = 2R$ (arco capaz).
Como $\alpha = \theta \longrightarrow \sin(\alpha) = \sin(\theta) = \dfrac{a}{2R} \longrightarrow \dfrac{a}{\sin(\theta)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$ y por el teorema del seno

obtenemos la cadena de igualdades: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$. Es decir, la razón de un lado y el seno del ángulo opuesto es constante al diámetro de la circunferencia circunscrita.

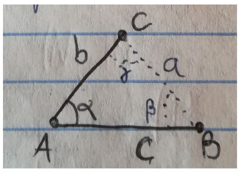


▷ **Resolución de triángulos**: para ello necesitamos conocer siempre tres elementos y entre ellos un lado al menos (con tres ángulos iguales hay infinitos triángulos). Tenemos los siguientes casos:

▷ **1)** Conocemos dos lados y el ángulo que forman:

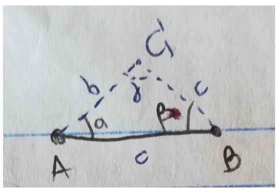
- Aplicamos el Tª del Coseno para hallar el lado que falta.
- Aplicamos el Tª del Seno para hallar los dos ángulos restantes.

Tendremos cuidado con los ángulos suplementarios como soluciones adicionales, pero con la restricción $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, la solución existirá y será única.



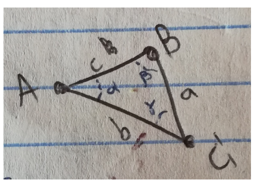
▷ **2)** Conocemos un lado y dos ángulos.

- Hallamos el tercer ángulo usando $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
- Aplicamos el Tª del Seno dos veces para hallar los otros dos lados.



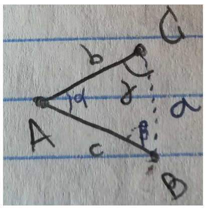
▷ **3)** Conocemos los tres lados.

- Aplicamos el Tª del Coseno dos veces para hallar dos de los ángulos.
- Usamos $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ para hallar el tercer ángulo.



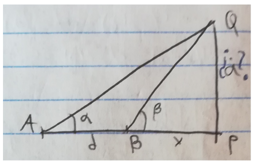
▷ **4)** Conocemos dos lados y el ángulo opuesto a ellos.

- Hallamos β usando le Tª del Seno: $\dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$
- Usamos $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ para hallar el tercer ángulo.
- Usamos el Tª del Seno para hallar el tercer lado.

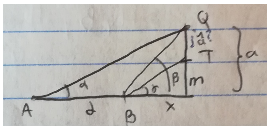


▷ **Aplicaciones**: topografía, navegación, astronomía,...

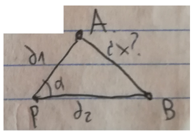
▷ **1)** Cálculo de una altura de pie inaccesible:
Sabiendo d, α y β (se pueden medir con un teodolito), usamos $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{d+x}$; $\tan(\beta) = \dfrac{a}{x}$ y se resuelve el sistema.



▷ **2)** Cálculo de una altura sobre una montaña:
Medimos la altura "a" y la distancia "x" como en el ejemplo anterior y por último: $\hat{a} = a - x\tan(\gamma)$



▷ **3)** Cálculo de la distancia entre dos puntos cuando no puede medirse directamente:
Sabiendo "d_1" y "d_2" no es más que aplicar el Tª del Coseno.



▷ **4)** Cálculo de la distancia entre dos puntos cuando ambos son inaccesibles:
Usando T y D sabemos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hallamos "$d$" y "$d'$" usando el Teorema del Seno.
Hallamos "x" usando el Tª del Coseno.