1. (*10 puntos*) **Elige y contesta a <u>una sola</u> de las dos siguientes cuestiones:**

(a) Justifica si es cierta o falta la siguiente afirmación: si dos sucesiones tienen por límite más infinito, su resta tiene por límite menos infinito. En caso de ser falsa, corrígela, escribiendo una afirmación verdadera sobre el límite de la resta de dos sucesiones con límite infinito.

(b) Demuestra que si una sucesión a_n tiene por límite $+\infty$, entonces la sucesión puede tener sólo un número finito de términos negativos.

(a)

$a_n \to \infty$

$b_n \to \infty$

$a_n - b_n \to -\infty$

$a_n = n+1$

$b_n = n+2$

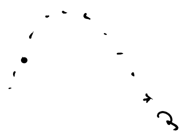
$a_n - b_n = -1$

$a_n = n^2+1$

$b_n = n+2$

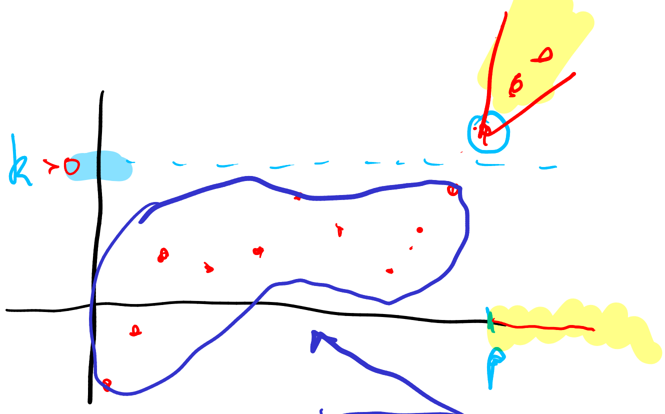
$a_n - b_n = n^2 - n - 1 \to +\infty$

$b_n - a_n = -n^2 + n + 1 \to -\infty$



b)

$a_n \to \infty \Rightarrow$ a_n tiene un número finito de términos <0



Dado un $k>0$ existe un término p de manera que $a_n > k$ a partir de a_p

Como mucho tengo los p primeros términos negativos

2. (*10 puntos*) Determina si la sucesión de término general $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ es monótona, creciente o decreciente. Calcula su límite.

$b_n > b_{n-1}$ creciente

$b_n < b_{n-1}$ decreciente

$b_n - b_{n-1} \lessgtr^{+}_{-} ?$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n-1+1}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n \cdot n}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 1 - n^2}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{-1}{n(n-1)} < 0 \Rightarrow \text{suc es decreciente.}$$

$b_n = \dfrac{n+1}{n}$

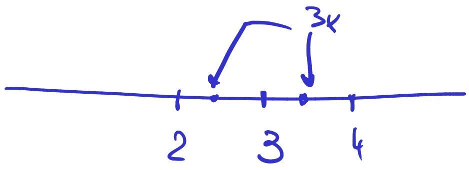
n	b_n
10^6	$\dfrac{10^6+1}{10^6} \simeq 1$

$b_n \to 1 \iff b_n - 1 \to 0 \qquad \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow b_n \to 1$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

3. (*10 puntos*) Resuelve la inecuación $|3x-3|<1$ y escribe la solución en forma de intervalo.

↳ $\text{dist}(3x,3) < 1$



$$-1 < 3x - 3 < 1$$

$+3 \qquad +3 \qquad +3$

$$\frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}}$$

$$x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$3x \in (2,4)$$

$$x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

6. (*20 puntos*) Determina el valor del número complejo $(2-i)^3$ y escríbelo en forma polar y trigonométrica. Representa el número obtenido en el plano complejo.

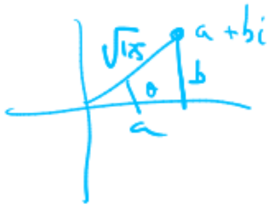
$$(2-i)^3 = (2-i)^2(2-i) = (4+\underbrace{i^2}_{-1}-4i)(2-i) = (3-4i)(2-i) =$$

$$= 6-3i-8i+4i^2 = 2-11i$$

$$(2-i)^3 = 1\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot(-i)^1 + 3\cdot 2^1(-i)^2 + 1\cdot(-i)^3$$

$$= 8-12i-6-i^3 = 2-11i = z$$

$$i^2=-1 \Rightarrow i^3=-i$$



$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

$$|z| = \sqrt{2^2+(-11)^2} = \sqrt{4+121} = \sqrt{125}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{-11}{2}.$$

$$z = \sqrt{125}\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \sqrt{125}\left(\frac{2}{\sqrt{125}} + i\,\frac{-11}{\sqrt{125}}\right)$$

$$z = \sqrt{125}_{\operatorname{arctg}-\frac{11}{2}}$$

4. Determina el valor de x en las siguientes igualdades:

(a) (*10 puntos*) $\frac{1}{2}\log(x-16) = \log 3$

(b) (*10 puntos*) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

$\log A^c = c \log A$ *

(a) $\stackrel{*}{=} \log (x-16)^{1/2} = \log 3$

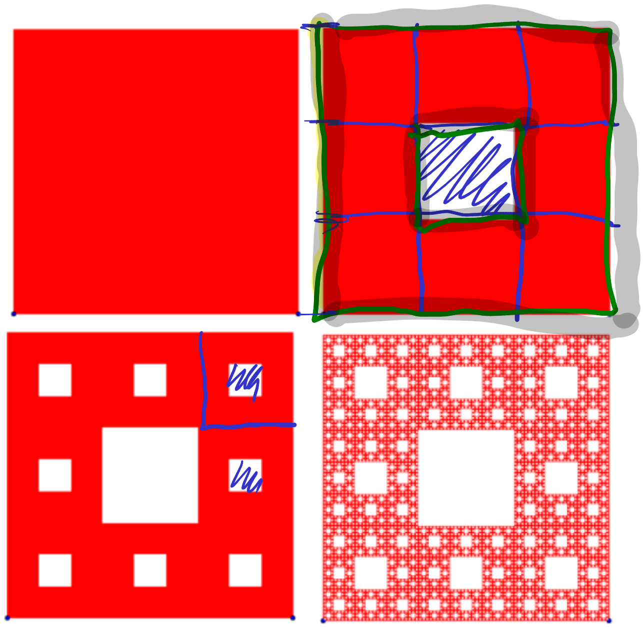
$(x-16)^{1/2} = 3 \Rightarrow x - 16 = 9$

$\sqrt{x-16} = 3$

$x = 25$

b) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{1-x^2} = 2^{-3} \Leftrightarrow 1-x^2 = -3$

$4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$



6. Observa la Figura 1. En ella, hemos partido de un cuadrado cualquiera. En el primer paso, marcamos los puntos que dividen en tres partes iguales a cada lado y suprimimos el cuadrado central resultante. Obtenemos así una segunda figura. Volvemos a hacer lo mismo con cada uno de los cuadrados pequeños que quedan, y así sucesivamente. Se pide:

   (a) (*10 puntos*) Entendemos por perímetro de la figura a la suma de los segmentos exteriores e interiores que la limitan. La sucesión de perímetros de la figura anterior viene dada por $P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} P_1$, siendo P_1 el perímetro del primer cuadrado. Justifica este término general. Determina el perímetro límite. Si $P_1 = 4$, encuentra a partir de qué término el perímetro vale más de 1000.

$P_n = P_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ es una prog geom.

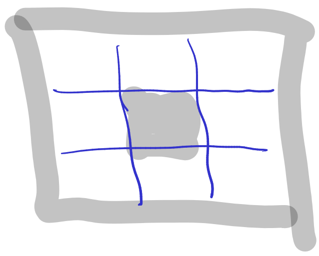
$r = \frac{4}{3} > 1$

$\lim_{n \to \infty} P_n = \infty$

$4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > 1000 \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > 250 \iff (n-1) \log\left(\frac{4}{3}\right) > \log 250$

$n-1 > \frac{\log 250}{\log 4/3} \iff n > \frac{\log 250}{\log 4/3} + 1 = \dots$

   (b) (*10 puntos extra*) Suponiendo que el área del primer cuadrado mide T_1, determina el área de la segunda figura. De la tercera, y el término general la sucesión de áreas de las figuras así obtenidas. ¿Cuál es el límite de esa sucesión? ¿Por qué?



A_1 $\quad A_2 = \frac{8}{9} A_1$

$A_3 = \frac{8}{9} A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 A_1$

$A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} A_1 \to 0$

$0 < \frac{8}{9} < 1$

A_n es una prog geom.