MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I.

Entrega 9: Representación de funciones. SOLUCIONES

1. Estudia y representa las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^3 - 3x$

   Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

   1. Dominio y continuidad.

   Dado que es una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, podemos decir que no presentará ninguna asíntota vertical.

   2. Simetría.

   Vamos a calcular la expresión de $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Por lo tanto, la función presenta simetría impar. Es decir es simétrica respecto del origen de coordenadas.

   3. Periodicidad.

   Una función polinómica no puede ser periódica.

   4. Puntos de corte y signo de f.

   En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. Para ello, tomamos $x = 0$ y calculamos $f(0) = 0$. Es decir, tenemos el punto de corte $(0, 0)$.

   Para el eje horizontal, igualamos $y = 0$. Es decir, resolvemos la ecuación $x^3 - 3x = 0$. Sacamos factor común: $x(x^2 - 3) = 0$. Por un lado, $x = 0$ ó $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \pm\sqrt{3}$. Es decir, tenemos tres puntos de corte con el eje horizontal: $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

   Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, ninguno extra).

Intervalo	$x \in (-\infty, -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}, 0)$	$x \in (0, \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}, \infty)$
Signo de f	$-$	$+$	$-$	$+$

   5. Asíntotas.

   En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Es decir, no hay asíntota horizontal.

   Dado que no hay discontinuidades, no puede haber asíntota vertical.

   Para ver si hay asíntota oblicua estudiamos el límite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 3x}{x} = +\infty$. Por tanto, tampoco hay asíntota oblicua.

   6. Crecimiento.

   En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x) = 3x^2 - 3$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

   Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada y los valores que no pertenecen al dominio.

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Crecimiento de f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

   En el punto de abscisa $x = 1$ hay un mínimo relativo. El punto es $(1, -2)$.

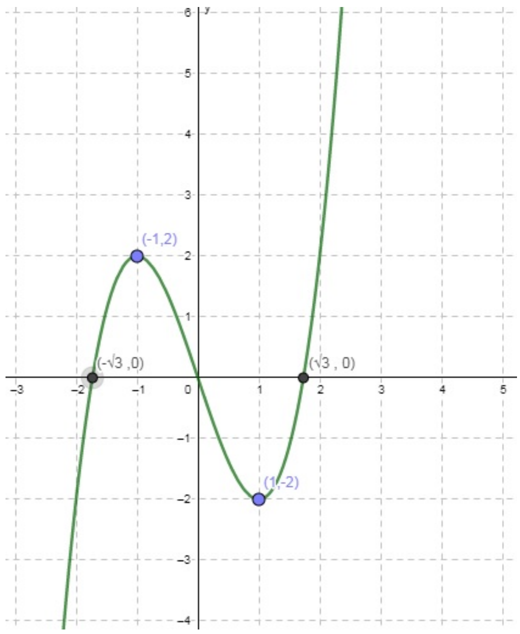
   En el punto de abscisa $x = -1$ hay un máximo relativo. El punto es $(-1, 2)$.

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = 6x$. Dicha derivada se anula en $x = 0$. Por tanto, tenemos que tomar los valores obtenidos aquí $x = 0$ y los que no pertenecen al dominio (es decir, ninguno más).

Intervalo	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f''	$-$	$+$
Curvatura de f	$\cap$	$\cup$

8. Representación de la función.



b) $f(x) = x^4 + 9x^2$

Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

1. Dominio y continuidad.

Dado que es una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, podemos decir que no presentará ninguna asíntota vertical.

2. Simetría.

Vamos a calcular la expresión de $f(-x) = (-x)^4 + 9(-x)^2 = x^4 + 9x^2 = f(x)$. Por lo tanto, la función presenta simetría par. Es decir es simétrica respecto del eje Y.

3. Periodicidad.

Una función polinómica no puede ser periódica.

4. Puntos de corte y signo de f.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. Para ello, tomamos $x = 0$ y calculamos $f(0) = 0$. Es decir, tenemos el punto de corte $(0, 0)$.

Para el eje horizontal, igualamos $y = 0$. Es decir, resolvemos la ecuación $x^4 + 9x^2 = 0$. Sacando factor común: $x^2(x^2 + 9) = 0$. Por un lado, $x^2 = 0$ lo que implica que $x = 0$, o bien $x^2 + 9 = 0$, que no tiene solución real.

Por lo tanto tenemos un punto de corte con el eje horizontal : $(0, 0)$

Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, ninguno extra).

Intervalo	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f	$+$	$+$

5. Asíntotas.

En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Es decir, no hay asíntota horizontal.

Dado que no hay discontinuidades, no puede haber asíntota vertical.

Para ver si hay asíntota oblicua estudiamos el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+9x^2}{x} = +\infty$. Por tanto, tampoco hay asíntota oblicua.

6. Crecimiento.

En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x) = 4x^3 + 18x$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares: $4x^3 + 9x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada y los valores que no pertenecen al dominio.

Intervalo	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f'	$-$	$+$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\nearrow$

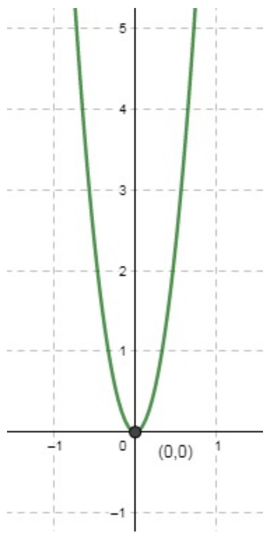
En el punto de abscisa $x = 0$ hay un mínimo relativo. El punto es $(0, 0)$.

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = 12x^2 + 18$. Dicha derivada no se anula, y siempre es positiva.

Intervalo	$x \in (-\infty, \infty)$
Signo de f''	$+$
Curvatura de f	$\cup$

8. Representación de la función.



c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

1. Dominio y continuidad.

Dado que es una función racional,debemos ver dónde se anula el denominador, ya que dichos puntos no pertenecerán al dominio. En este caso, el punto que anula el denominador es $x=0$, por lo tanto su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. Por tanto, debemos estudiar si presenta asíntota vertical.

2. Simetría.

Vamos a calcular la expresión de $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=\dfrac{x^2-1}{-x}=-f(x)$. Por lo tanto, la función presenta simetría impar.

3. Periodicidad.

Una función racional no puede ser periódica.

4. Puntos de corte y signo de f.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. En este caso, $x=0$ está fuera del dominio, luego no hay puntos de corte con el eje vertical.

Para el eje horizontal, igualamos $y=0$. Es decir, resolvemos la ecuación $\dfrac{x^2-1}{x}=0\Rightarrow x=\pm1$ Por lo tanto tenemos dos puntos de corte con el eje horizontal : $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, $x=0$).

Intervalo	$x\in(-\infty,-1)$	$x\in(-1,0)$	$x\in(0,1)$	$x\in(1,\infty)$
Signo de f	$-$	$+$	$-$	$+$

5. Asíntotas.

En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Es decir, no hay asíntota horizontal .

Dado que hay discontinuidades, puede haber asíntota vertical. Estudiamos los límites en $x=0$:

$*\ \lim\limits_{x\to0} f(x)=\dfrac{-1}{0}$. Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to0^-} j(x)=\frac{-1}{0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to0^+} j(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Por lo tanto, hay asíntota vertical $x=0$

Para ver si hay asíntota oblicua estudiamos el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=1$.

Estudiamos ahora el límite $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$

Por lo tanto, hay asíntota oblicua $y=x$

6. Crecimiento.

En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2}$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares. En este caso no se anula.

Representamos en la recta real los valores que no pertenecen al dominio:

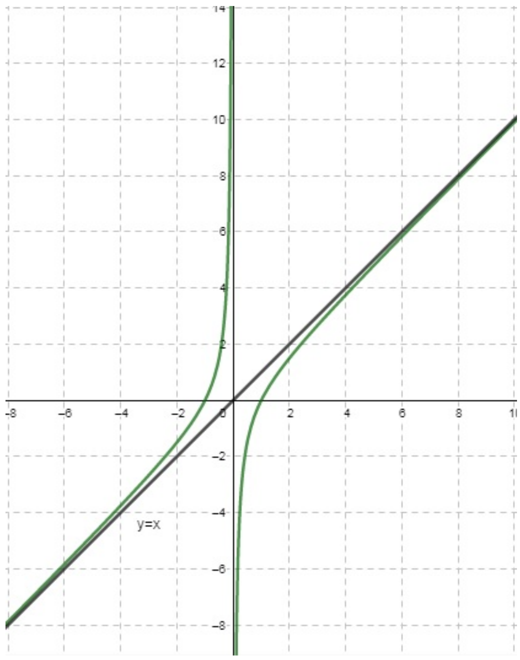
Intervalo	$x\in(-\infty,0)$	$x\in(0,\infty)$
Signo de f'	$+$	$+$
Crecimiento de f	$\nearrow$	$\nearrow$

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = \frac{-2}{x^3}$. Dicha derivada no se anula. Por tanto, tenemos que tomar los valores que no pertenecen al dominio (es decir, $x = 0$).

Intervalo	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f''	$+$	$-$
Curvatura de f	$\cup$	$\cap$

8. Representación de la función.



d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

1. Dominio y continuidad.

Dado que es una función racional,debemos ver dónde se anula el denominador, ya que dichos puntos no pertenecerán al dominio. En este caso, el denominador no se anula , por lo tanto su dominio es $\mathbb{R}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, no presenta asíntotas verticalesl.

2. Simetría.

Vamos a calcular la expresión de $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$. Por lo tanto, la función presenta simetría impar.

3. Periodicidad.

Una función racional no puede ser periódica.

4. Puntos de corte y signo de f.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. Calculamos $f(0) = 0$, luego el punto de corte con el eje vertical es el $(0, 0)$.

Para el eje horizontal, igualamos $y = 0$. Es decir, resolvemos la ecuación $\frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$ Por lo tanto tenemos un punto de corte con el eje horizontal : $(0, 0)$.

Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, ninguno extra).

Intervalo	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f	$-$	$+$

5. Asíntotas.

En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Es decir, hay asíntota horizontal $y = 0$.

Dado que no hay discontinuidades, no hay asíntotas verticales.

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

6. Crecimiento.

En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares. En este caso $x = \pm 1$.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 0)$	$x \in (0, 1)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$+$	$-$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

En el punto de abscisa $x = -1$ hay un mínimo relativo. El punto es el $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

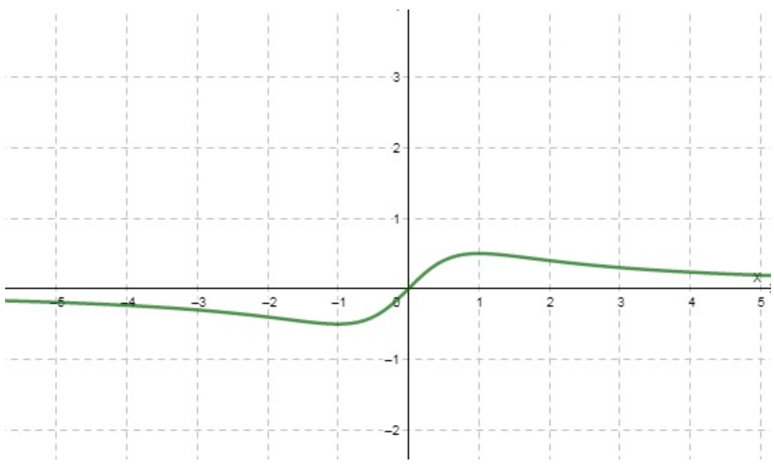
En el punto de abscisa $x = 1$ hay un máximo relativo. El punto es el $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$. Dicha derivada se anula en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, tenemos que tomar esos valores:

Intervalo	$x \in (-\infty, -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}, 0)$	$x \in (0, \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}, \infty)$
Signo de f''	$-$	$+$	$-$	$+$
Curvatura de f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

8. Representación de la función.



e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

1. Dominio y continuidad.

Dado que es una función racional,debemos ver dónde se anula el denominador, ya que dichos puntos no pertenecerán al dominio. En este caso, el punto que anula el denominador es $x = -1$, por lo tanto su dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. Por tanto, debemos estudiar si presenta asíntota vertical.

2. Simetría.

Vamos a calcular la expresión de $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x+1)^2}$. La función no presenta simetría par ni impar.

3. Periodicidad.

Una función racional no puede ser periódica.

4. Puntos de corte y signo de f.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. Calculamos $f(0) = 0$, luego tenemos un punto de corte con el eje vertical, el $(0, 0)$.

Para el eje horizontal, igualamos $y = 0$. Es decir, resolvemos la ecuación $\dfrac{2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ Por lo tanto tenemos un punto de corte con el eje horizontal : $(0, 0)$.

Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, $x = -1$).

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de f	$-$	$-$	$+$

5. Asíntotas.

En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Es decir, hay asíntota horizontal $y = 0$.

Dado que hay discontinuidades, puede haber asíntota vertical. Estudiamos los límites en $x = -1$:

* $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \dfrac{-2}{0}$. Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to-1^-} j(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} j(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Por lo tanto, hay asíntota vertical $x = -1$

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

6. Crecimiento.

En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x) = \dfrac{-2x+2}{((x+1)^3}$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares. En este caso se anula en $x = 1$.

Representamos en la recta real los valores en los que se anula la derivada y los valores que no pertenecen al dominio:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

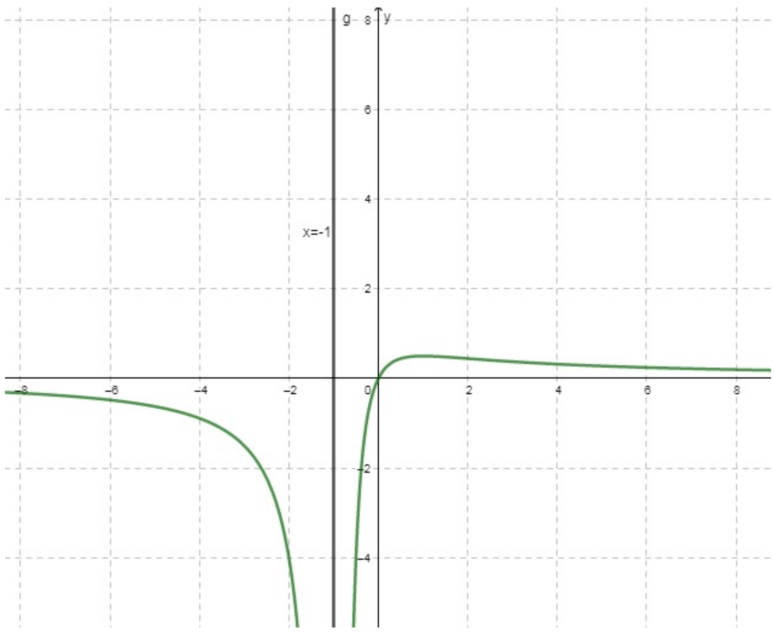
La función presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, y dicho punto es el $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = \dfrac{4x-8}{(x+1)^4}$. Dicha derivada se anula en $x = 2$. Por tanto, tenemos que tomar el valor $x = 2$ y los valores que no pertenecen al dominio (es decir, $x = -1$).

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 2)$	$x \in (2, \infty)$
Signo de f''	$-$	$-$	$+$
Curvatura de f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

8. Representación de la función.



f) $f(x) = \dfrac{3x-3}{x+3}$

Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

1. Dominio y continuidad.

Dado que es una función racional,debemos ver dónde se anula el denominador, ya que dichos puntos no pertenecerán al dominio. En este caso, el punto que anula el denominador es $x = -3$, por lo tanto su dominio es $\mathbb{R} - \{-3\}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, debemos estudiar si presenta asíntota vertical.

2. Simetría.

Vamos a calcular la expresión de $f(-x) = \dfrac{3(-x)-3}{(-x+3}$. La función no presenta simetría par ni impar.

3. Periodicidad.

Una función racional no puede ser periódica.

4. Puntos de corte y signo de f.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. Calculamos $f(0) = -1$, luego tenemos un punto de corte con el eje vertical, el $(0, -1)$.

Para el eje horizontal, igualamos $y = 0$. Es decir, resolvemos la ecuación $\dfrac{3x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow x = 1$ Por lo tanto tenemos un punto de corte con el eje horizontal : $(1, 0)$.

Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, $x = -3$).

Intervalo	$x \in (-\infty, -3)$	$x \in (-3, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de f	$+$	$-$	$+$

5. Asíntotas.

En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$. Es decir, hay asíntota horizontal $y = 3$.

Dado que hay discontinuidades, puede haber asíntota vertical. Estudiamos los límites en $x = -3$:

$*\ \lim_{x\to -3} f(x) = \dfrac{-12}{0}$. Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -3^-} j(x) = \frac{-12}{0^-} = +\infty \qquad \lim_{x\to -3^+} j(x) = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$

Por lo tanto, hay asíntota vertical $x = -3$

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

6. Crecimiento.

En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x) = \dfrac{12}{((x+3)^2}$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares. En este caso no se anula.

Representamos en la recta real los valores que no pertenecen al dominio:

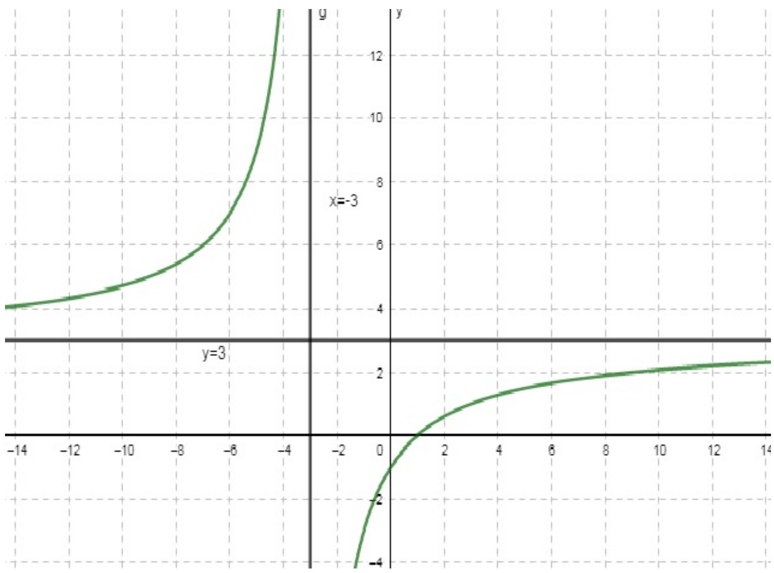
Intervalo	$x \in (-\infty, -3)$	$x \in (-3, \infty)$
Signo de f'	$+$	$+$
Crecimiento de f	$\nearrow$	$\nearrow$

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = \dfrac{-24}{(x+3)^3}$. Dicha derivada no se anula. Por tanto, tenemos que tomar los valores que no pertenecen al dominio (es decir, $x = -3$).

Intervalo	$x \in (-\infty, -3)$	$x \in (-3, \infty)$
Signo de f''	$+$	$-$
Curvatura de f	$\cup$	$\cap$

8. Representación de la función.



g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Estudiamos las propiedades globales y locales de las funciones que podemos obtener:

1. Dominio y continuidad.

Dado que es una función racional,debemos ver dónde se anula el denominador, ya que dichos puntos no pertenecerán al dominio. En este caso, los puntos que anulan el denominador son $x = -1$ y $x = 1$, por lo tanto su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ y además es continua en su dominio. Es decir, es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, debemos estudiar si presenta asíntotas verticales.

2. Simetría.

Vamos a calcular la expresión de $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -f(x)$. Por lo tanto, la función presenta simetría impar. Es decir es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3. Periodicidad.

Una función racional no puede ser periódica.

4. Puntos de corte y signo de f.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje vertical. Para ello, tomamos $x = 0$ y calculamos $f(0) = 0$. Es decir, tenemos el punto de corte $(0, 0)$.

Para el eje horizontal, igualamos $y = 0$. Es decir, resolvemos la ecuación $\dfrac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0$ Por lo tanto tenemos un punto de corte con el eje horizontal : $(0, 0)$

Hallamos ahora el signo de f. Para ello debemos observar, por un lado los puntos de corte con el eje horizontal y por otro lado los puntos de discontinuidad (en este caso, $x = -1$ y $x = 1$).

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 0)$	$x \in (0, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de f	$-$	$+$	$-$	$+$

5. Asíntotas.

En primer lugar estudiamos si tiene asíntota horizontal. Es decir estudiamos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Es decir, hay asíntota horizontal $y = 0$.

Dado que hay discontinuidades, puede haber asíntota vertical. Estudiamos los límites en $x = -1$ y $x = 1$:

$*$ $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \dfrac{-1}{0}$. Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Por lo tanto, hay asíntota vertical $x = -1$

$*$ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{1}{0}$. Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto, hay asíntota vertical $x = 1$

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

6. Crecimiento.

En primer lugar derivamos la función $f(x)$. Obtenemos $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$. Igualamos la derivada a 0 para encontrar los puntos singulares: $\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ que no tiene solución real.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada y los valores que no pertenecen al dominio. En este caso, como ningún valor anula la derivada, representamos sólo los valores que no pertenecen al dominio:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de f'	$-$	$-$	$-$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

La función es decreciente en todo su dominio, y no presenta máximos ni mínimos relativos.

7. Curvatura.

Calculamos la segunda derivada de f y estudiamos su signo. En particular, $f'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$. Dicha derivada se anula en $x = 0$. Por tanto, tenemos que tomar los valores obtenidos aquí $x = 0$ y los que no pertenecen al dominio (es decir, $x = -1$ y $x = 1$).

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 0)$	$x \in (0, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de f''	$-$	$+$	$-$	$+$
Curvatura de f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

8. Representación de la función.