Geometría euclídea. Simetrías en el espacio.

David Matellano

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

16 de mayo de 2024

índice de contenidos

1. Simétrico respecto de un punto Q
   - Ejemplo
2. Simétrico de P respecto de una recta
   - Método del vector normal
     - Ejemplo
   - Mediante un plano normal a r
     - Ejemplo
3. Simétrico de P respecto de un plano
   - Mediante su proyección ortogonal
     - Ejemplo
   - Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$
     - Ejemplo
4. Simetría de una recta respecto de un plano
   - Ejemplo

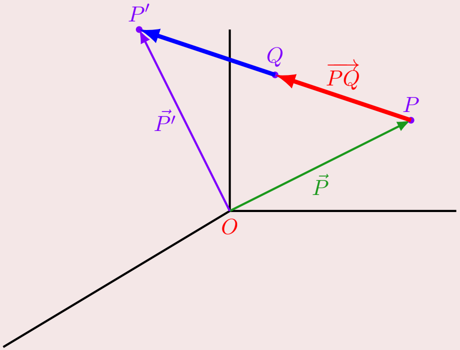
Ver los apéndices

Simétrico de P respecto de un punto Q

Simétrico de P respecto de Q

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ}$$

Figuras



Simétrico de P respecto de un punto Q

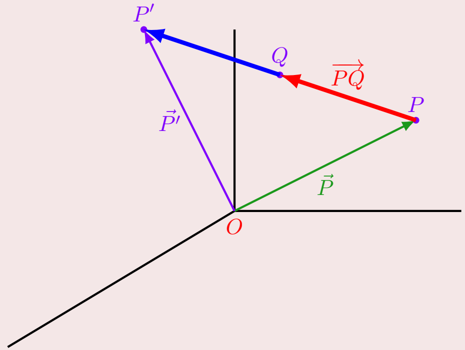
Simétrico de P respecto de Q

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ}$$

☞ $$P' = Q + (Q - P) = 2Q - P$$

Volver a simétrico punto-recta

Figuras



Simétrico respecto de un punto Q

Ejemplo

Ejemplo

- Calcula el simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ respecto del punto $Q(-1, 1, 1)$.

Simétrico respecto de un punto Q

Ejemplo

Ejemplo

- Calcula el simétrico del punto $P(1,2,3)$ respecto del punto $Q(-1,1,1)$.

☞ $P' = 2Q - P = 2 \cdot (-1,1,1) - (1,2,3) = (-3,0,1)$

Ver ejemplo con WxMaxima

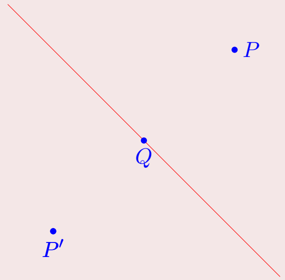
Simétrico de P respecto de una recta

Método del vector normal

Proyección de P sobre r

Si hallamos la proyección de $P \to r \equiv Q \Rightarrow P'$ será el simétrico de P respecto de Q

Figuras



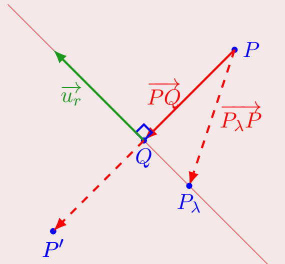
Simétrico de P respecto de una recta

Método del vector normal

Proyección de P sobre r

- Si hallamos la proyección de $P \to r \equiv Q \Rightarrow P'$ será el simétrico de P respecto de Q
- Para ello, creamos $\overrightarrow{P_\lambda P}$ e imponemos $\vec{u_r} \cdot \overrightarrow{P_\lambda P} = 0$

Figuras



Simétrico de P respecto de una recta

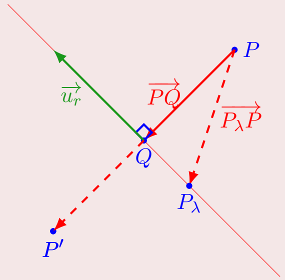
Método del vector normal

Proyección de P sobre r

Si hallamos la proyección de $P \to r \equiv Q \Rightarrow P'$ será el simétrico de P respecto de Q

- Para ello, creamos $\overrightarrow{P_\lambda P}$ e imponemos $\vec{u_r} \cdot \overrightarrow{P_\lambda P} = 0$
- Una vez hallado λ, obtenemos Q y luego P', o bien hacemos $P' = P + 2\overrightarrow{P_\lambda P}$ con el valor de λ obtenido.

Figuras



Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda} = P_\lambda - P_r = (-2+3\lambda, 1-2\lambda, -3+\lambda)$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda} = P_\lambda - P_r = (-2+3\lambda, 1-2\lambda, -3+\lambda)$

Imponemos $\vec{u_r} \cdot \vec{u_\lambda} = 0 \Rightarrow 14\lambda - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{11}{14}$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda} = P_\lambda - P_r = (-2+3\lambda, 1-2\lambda, -3+\lambda)$

Imponemos $\vec{u_r} \cdot \vec{u_\lambda} = 0 \Rightarrow 14\lambda - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{11}{14}$

- Calculamos $\vec{u_\lambda}\left(\lambda = \dfrac{11}{14}\right)$ y hallamos $P' = P + 2\vec{u_\lambda} = \dfrac{(12{,}6,-10)}{7}$

Ver con WxMaxima

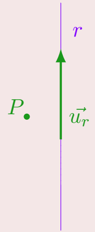
Simétrico de P respecto de una recta

Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

☞ Dados r y P:

Figuras



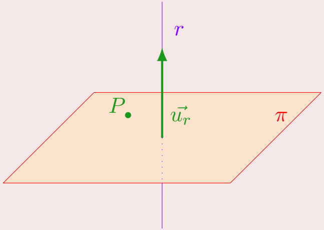
Simétrico de P respecto de una recta

Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

- Dados r y P:
- Creamos $\pi \perp r$ / $P \in \pi$

Figuras



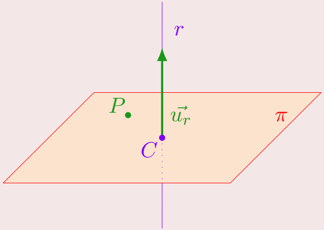
Simétrico de P respecto de una recta

Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

- Dados r y P:
- Creamos $\pi \perp r \ / \ P \in \pi$
- Hallamos $C \equiv \pi \cap r$

Figuras



Simétrico de P respecto de una recta

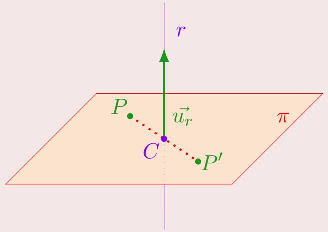
Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

- Dados r y P:
- Creamos $\pi \perp r \ / \ P \in \pi$
- Hallamos $C \equiv \pi \cap r$
- Obtenemos el simétrico de P respecto de C

Ver simétrico respecto de P

Figuras



Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Pautas

Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$

Operaciones

☞ $\vec{n} = (3,-2,1) \rightarrow (3,-2,1)\cdot(1,2,3)+d = 0$

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Pautas

- Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$
- Hallamos d y obtenemos π

Operaciones

- $\vec{n} = (3,-2,1) \rightarrow (3,-2,1) \cdot (1,2,3) + d = 0$
- $d = -2 \rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Pautas

- Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$
- Hallamos d y obtenemos π
- Obtenemos $Q \equiv r \cap \pi$

Operaciones

- $\vec{n} = (3,-2,1) \to (3,-2,1) \cdot (1,2,3) + d = 0$
- $d = -2 \to \pi \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$
- $(3,-2,1) \cdot (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda) - 2 = 0$
- $\lambda = \dfrac{11}{14} \to Q = \left(\dfrac{19}{14}, \dfrac{10}{7} \dfrac{11}{14}\right)$

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Pautas

- Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$
- Hallamos d y obtenemos π
- Obtenemos $Q \equiv r \cap \pi$
- Obtenemos P'.

Ver con WxMaxima

Operaciones

- $\vec{n} = (3,-2,1) \to (3,-2,1)\cdot(1,2,3)+d = 0$
- $d = -2 \to \pi \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$
- $(3,-2,1)\cdot(-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda) - 2 = 0$
- $\lambda = \dfrac{11}{14} \to Q = \left(\dfrac{19}{14}, \dfrac{10}{7} \dfrac{11}{14}\right)$
- $P' = 2Q - P = \dfrac{(12,6,-10)}{7}$

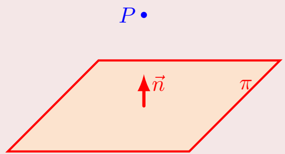
Simétrico de P respecto de un plano

Mediante su proyección ortogonal

Calculando P_o

Hallaremos la proyección de P en π y luego su simétrico.

Figuras



Simétrico de P respecto de un plano

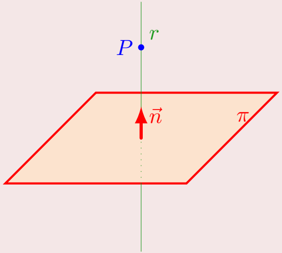
Mediante su proyección ortogonal

Calculando P_o

Hallaremos la proyección de P en π y luego su simétrico.

- Creamos $r \perp \pi$ $P \in r$

Figuras



Simétrico de P respecto de un plano

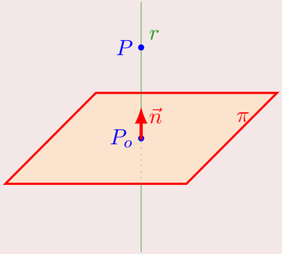
Mediante su proyección ortogonal

Calculando P_o

Hallaremos la proyección de P en π y luego su simétrico.

- Creamos $r \perp \pi$ $P \in r$
- Obtenemos $P_o \equiv r \cap \pi$

Figuras



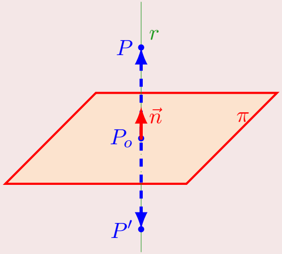
Simétrico de P respecto de un plano

Mediante su proyección ortogonal

Calculando P_o

- Hallaremos la proyección de P en π y luego su simétrico.
  - Creamos $r \perp \pi \; P \in r$
  - Obtenemos $P_o \equiv r \cap \pi$
- Hallamos $P' = 2P_o - P$

Figuras



Mediante su proyección ortogonal

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Mediante su proyección ortogonal

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Pautas

Creamos $r_n \perp \pi \ / \ P \in r_n$

Operaciones

☞ $\vec{r_n} = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$

Mediante su proyección ortogonal

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Pautas

- Creamos $r_n \perp \pi \ / \ P \in r_n$
- Obtenemos $P_c \equiv r_n \cap \pi$

Operaciones

- $\vec{r_n} = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$
- $(1,1,1)\cdot(1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda) - 1 = 0$
- $\lambda = -\dfrac{5}{3} \rightarrow P_c = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

Mediante su proyección ortogonal

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Pautas

- Creamos $r_n \perp \pi \ / \ P \in r_n$
- Obtenemos $P_c \equiv r_n \cap \pi$
- Realizamos la simetría $P \to P_c$

Ver con WxMaxima

Operaciones

- $\vec{r_n} = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$
- $(1,1,1)\cdot(1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda) - 1 = 0$
- $\lambda = -\frac{5}{3} \to P_c = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$
- $P' = 2P_c - P = -\frac{1}{3}\cdot(7,4,1)$

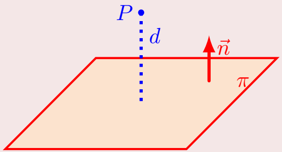
Simétrico de P respecto de un plano

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ¡con su signo!

Figuras



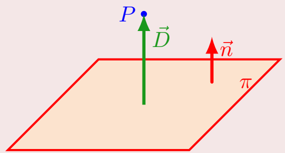
Simétrico de P respecto de un plano

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

- Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ¡con su signo!
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

Figuras



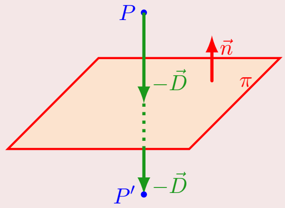
Simétrico de P respecto de un plano

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

- Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ¡con su signo!
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
- Obtenemos $P' = P - 2\vec{D}$

Figuras



Simétrico de P respecto de un plano

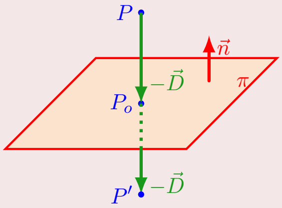
Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

- Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ¡con su signo!
  - Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
  - Obtenemos $P' = P - 2\vec{D}$
- Si quisiéramos la proyección $P_o = P - \vec{D}$

Volver a simetría recta-plano.

Figuras



Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Pautas

Obtenemos $d = d(P, \pi)$, pero con su signo.

Operaciones

☞ $d = \dfrac{(1,1,1) \cdot (1,2,3) - 1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

Sin valor absoluto.

Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Pautas

Obtenemos $d = d(P,\pi)$, pero con su signo.

Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

Operaciones

$$d = \frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)-1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Sin valor absoluto.

$$\vec{D} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Pautas

Obtenemos $d = d(P,\pi)$, pero con su signo.

- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
- Realizamos la simetría $P' = P - 2\vec{D}$

Operaciones

- $d = \dfrac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

Sin valor absoluto.

- $\vec{D} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$
- $P' = P - 2\vec{D} = -\dfrac{1}{3}\cdot(7,4,1)$

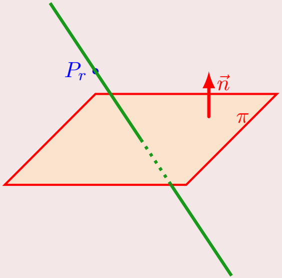
Ver con WxMaxima

Simetría de una recta respecto de un plano

Estrategias

- Dados π y r:

Figuras



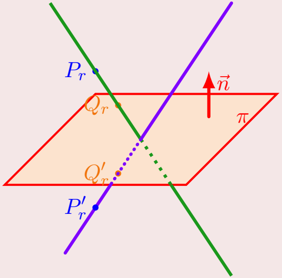
Simetría de una recta respecto de un plano

Estrategias

- Dados π y r:

Podemos realizar la simetría de $(P_r, Q_r) \in r$ para obtener r'

Figuras



Simetría de una recta respecto de un plano

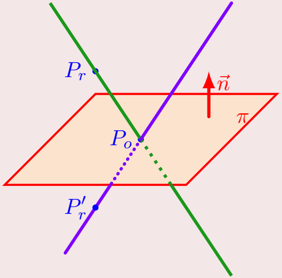
Estrategias

- Dados π y r:

Podemos realizar la simetría de $(P_r, Q_r) \in r$ para obtener r'

Si $r \cap \pi \neq \emptyset \rightarrow$ Hallamos $P_o = r \cap \pi$ y P'_r

Figuras



Simetría de una recta respecto de un plano

Estrategias

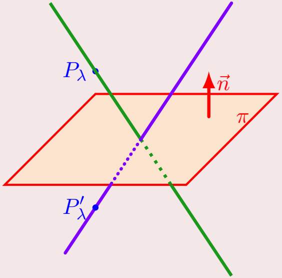
- Dados π y r:

Podemos realizar la simetría de $(P_r, Q_r) \in r$ para obtener r'

Si $r \cap \pi \neq \emptyset \rightarrow$ Hallamos $P_o = r \cap \pi$ y P'_r

Podemos hallar r' haciendo el simétrico de un punto genérico $P_\lambda \in r$

Figuras



Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Un primer método sería obtener dos puntos P_r, Q_r y realizar su simetría. Así, $\vec{r'} = P_r' + \lambda \cdot \overrightarrow{P_r'Q_r'}$

◂ Recordar simétrico $P \to \pi$.

▸▸ Ver con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Un primer método sería obtener dos puntos P_r, Q_r y realizar su simetría. Así, $\vec{r'} = P'_r + \lambda \cdot \overrightarrow{P'_r Q'_r}$

Recordar simétrico $P \to \pi$.

Un segundo punto Q'_r podría ser $Q'_r \equiv r \cap \pi$, pero es más trabajoso y $\nexists Q'$ si $r \parallel \pi$

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Un primer método sería obtener dos puntos P_r, Q_r y realizar su simetría. Así, $\vec{r'} = P'_r + \lambda \cdot \overrightarrow{P'_r Q'_r}$

Recordar simétrico $P \to \pi$.

Un segundo punto Q'_r podría ser $Q'_r \equiv r \cap \pi$, pero es más trabajoso y $\nexists Q'$ si $r \parallel \pi$

Veámoslo con el método del punto genérico $P_\lambda \in r$

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Simtería de un punto genérico de r

Creamos $P_\lambda \in r$

Operaciones

☞ $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Simtería de un punto genérico de r

- Creamos $P_\lambda \in r$
- Hallamos $d = D(P_\lambda, \pi)$

Operaciones

- $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$
- $d_\lambda = \dfrac{\vec{n} \cdot P_\lambda + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{3\lambda + 1}{\sqrt{3}}$

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Simtería de un punto genérico de r

- Creamos $P_\lambda \in r$
- Hallamos $d = D(P_\lambda, \pi)$
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

Operaciones

- $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$
- $d_\lambda = \dfrac{\vec{n} \cdot P_\lambda + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{3\lambda + 1}{\sqrt{3}}$
- $\vec{D} = \dfrac{3\lambda + 1}{3} \cdot (1,1,1)$

Simetría de r respecto de π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$ y la recta $\vec{r}=(1,0,1)+\lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Simtería de un punto genérico de r

Creamos $P_\lambda \in r$

- Hallamos $d = D(P_\lambda, \pi)$
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
- Realizamos la simetría $r' = P_\lambda - 2\vec{D}$

Ver con WxMaxima

Operaciones

- $P_\lambda = (2\lambda+1, \lambda, 1)$
- $d_\lambda = \dfrac{\vec{n}\cdot P_\lambda + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{3\lambda+1}{\sqrt{3}}$
- $\vec{D} = \dfrac{3\lambda+1}{3}\cdot(1,1,1)$
- $r' = \left(\dfrac{1}{3}, -\lambda-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}-2\lambda\right)$

Apéndices

5. Cálculos con WxMaxima
   - Ajustes iniciales
   - Simétrico de un punto
   - Simétrico respecto de r
     - Primer método
     - Segundo método
   - Punto simétrico respecto de un plano
     - Primer método
     - Segundo método
   - Simetría de una recta respecto de un plano
     - Mediante dos puntos
     - Mediante un punto genérico

Retornar al índice principal

Cálculos con WxMaxima

Distancia entre puntos

Ajustes previos

☞ Hemos de cargar el paquete **vect**

```
(% i4)   load(vect)$/* Carga paquete vectores*/
```

Cálculos con WxMaxima

Distancia entre puntos

Ajustes previos

- Hemos de cargar el paquete **vect**
- Además, es útil crear funciones para el producto vectorial, mixto y $|\overrightarrow{u}|$.

```
(%i4) load(vect)$/* Carga paquete vectores*/
       vect(u,v):=express(u~ v)$/* Producto vectorial*/
      modulo(u):=sqrt(u.u)$/* Cálculo de |u|*/
      pmixto(u,v,w):=determinant(matrix(u,v,w))$/* producto mixto*/
"vect: warning: removing existing rule or rules for "."."
```

Cálculos con WxMaxima

Simétrico de un punto

Simétrico de P respecto de Q

- Calcula el simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ respecto del punto $Q(-1, 1, 1)$.

Cálculos con WxMaxima

Simétrico de un punto

Simétrico de P respecto de Q

- Calcula el simétrico del punto $P(1,2,3)$ respecto del punto $Q(-1,1,1)$.

Introducimos los puntos y hallamos $P' = 2Q - P$

Volver a la presentación.

```
(%i2) P:[1,2,3];
      Q:[-1,1,2];
```

(P) $[1, 2, 3]$

(Q) $[-1, 1, 2]$

```
(%i3) P2:2*Q-P;
```

(P2) $[-3, 0, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r :

```
(%i6) P:[1,2,3]$r:[(x-2)/3=(1-y)/2,(1-y)/2=z-1]$var:[x,y,z]$
(%i7) linsolve(r,var);
```

(%o7) $[x = 3\,\%r1 - 1\,, y = 3 - 2\,\%r1\,, z = \,\%r1]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Obtenemos $\vec{u_r}$ y P_λ

(% i9) Pλ:[3*λ-1,3-2*λ,λ];ur:[3,-2,1];

(Pλ) $[3\lambda-1\,,3-2\lambda\,,\lambda]$

(ur) $[3\,,-2\,,1]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda}$

(% i10) uλ:Pλ-P;

(uλ) $[3\lambda-2\,,1-2\lambda\,,\lambda-3]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Imponemos y resolvemos $\vec{u_r} \cdot \vec{u_\lambda} = 0$

(% i11) e1:uλ.ur=0,expand;

(e1) $14\lambda - 11 = 0$

(% i12) sol:solve(e1);

(sol) $\left[\lambda = \dfrac{11}{14}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ $P' = P + 2\vec{u_\lambda}$

◂ Volver a la presentación.

(% i13) P2:P+2*at(uλ,sol);

(P2) $\left[\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, -\left(\frac{10}{7}\right)\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$

(% i14) pi:ur.var+d=0;

(pi) $z-2y+3x+d=0$

(% i15) e2:ur.P+d=0,expand;

(e2) $d+2=0$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Hallamos d y obtenemos π

(% i16) sol:solve(e2);

(sol) $[d = -2]$

(% i17) pi:ur.var-2=0;

(pi) $z - 2y + 3x - 2 = 0$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos $Q \equiv r \cap \pi$

(% i19) e3:ur.Pλ-2=0,expand; solve(e3);

(e3) $14\lambda - 11 = 0$

(% o19) $\left[\lambda = \dfrac{11}{14}\right]$

(% i20) Q:at(Pλ, %);

(Q) $\left[\dfrac{19}{14}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{11}{14}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de una recta

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule el punto simétrico de P respecto de r.

☞ Obtenemos P'.

Volver a la presentación.

(%i21) P2=2*Q-P;

(%o21) $\left[\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, -\left(\frac{10}{7}\right)\right] = \left[\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, -\left(\frac{10}{7}\right)\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Creamos $r_n \perp \pi \ / \ P \in r_n$

(% i26) rn:P+λ*n;

(rn) $[\lambda+1, \lambda+2, \lambda+3]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

☞ Obtenemos $P_c \equiv r_n \cap \pi$

(% i28) e1:n.rn+d=0,expand;
sol:solve(e1);

(e1) $3\lambda+5=0$

(sol) $\left[\lambda=-\left(\frac{5}{3}\right)\right]$

(% i29) Pc:at(rn,sol);

(Pc) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

☞ Realizamos la simetría $P \rightarrow P_c$

Volver a la presentación.

(%i30) Ps:2*Pc-P;

(Ps) $\left[-\left(\frac{7}{3}\right),-\left(\frac{4}{3}\right),-\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

Obtenemos $d = d(P, \pi)$, pero con su signo.

(% i31) d:(n.P+d)/modulo(n) /* Sin valor absoluto */;

(d) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

☞ Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

(% i32) D:d*n/modulo(n);

(D) $\left[\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simétrico respecto de un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule el simétrico de P respecto de π.

☞ Realizamos la simetría $P' = P - 2\vec{D}$

Volver a la presentación.

(%i33) Ps=P-2*D;

(%o33) $\left[-\left(\frac{7}{3}\right),-\left(\frac{4}{3}\right),-\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\left[-\left(\frac{7}{3}\right),-\left(\frac{4}{3}\right),-\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

(% i37) pi:x+y+z-1=0$ r:[1,0,1]+λ*[2,1,0]$ n:[1,1,1]; d:-1$

(n) $[1\,,1\,,1]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Obtenemos $P_r, Q_r \in r$.

(%i38) P:at(r,λ=0);

(P) $[1 , 0 , 1]$

(%i39) Q:at(r,λ=1);

(Q) $[3 , 1 , 1]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Hallamos P_s

(% i40) d1:(n.P+d)/modulo(n);

(d1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(% i41) Ps:P-2*d1*n/modulo(n);

(Ps) $\left[\frac{1}{3}, -\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Hallamos Q_s

(% i42) d2:(n.Q+d)/modulo(n);

(d2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(% i43) Qs:Q-2*d2*n/modulo(n);

(Qs) $\left[\frac{1}{3}, -\left(\frac{5}{3}\right), -\left(\frac{5}{3}\right)\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Creamos $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{P_s Q_s}$

(% i44) us:Qs-Ps;

(us) $[0\,, -1\,, -2]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Obtenemos $r' \equiv s = P_s + \mu \cdot \overrightarrow{u_s}$

Volver a la presentación.

(% i45) rs:Ps+μ*us;

(rs) $\left[\frac{1}{3}, -\mu - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} - 2\mu\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

(% i49) pi:x+y+z-1=0$ r:[1,0,1]+λ*[2,1,0]$ n:[1,1,1]; d:-1$

(n) $[1\,,1\,,1]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

Obtenemos $P_\lambda \in r$.

(% i50) Pλ:r;/* Punto genérico de r*/

(Pλ) $[2\lambda + 1, \lambda, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Hallamos $d_\lambda = d(P_\lambda, \pi)$

(% i51) dλ:(n.Pλ+d)/modulo(n) /* distancia de cualquier punto de r a pi */;

(dλ) $\dfrac{3\lambda+1}{\sqrt{3}}$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Creamos $\overrightarrow{D_\lambda} = d\lambda \cdot \hat{n}$

(% i52) Dλ:dλ*n/modulo(n);

(Dλ) $\left[\frac{3\lambda+1}{3}, \frac{3\lambda+1}{3}, \frac{3\lambda+1}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Simetría de r respecto de π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la simetría de la recta r respecto de π.

☞ Trasladamos P_λ con $\overrightarrow{D_\lambda}$, obteniendo r'

Volver a la presentación.

(% i53) rs=r-2*Dλ,expand;/* Igual con ambos métodos*/

(% o53) $\left[\frac{1}{3}, -\mu - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} - 2\mu\right] = \left[\frac{1}{3}, -\lambda - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} - 2\lambda\right]$