MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I.

Entrega 8: Derivadas. Soluciones

1. Calcula aplicando la definición las siguientes derivadas puntuales:

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ en $x_0 = 2$.

   Nos piden aplicar la definición, y por tanto:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 5 - (2^2 - 3\cdot 2 + 5)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 6 - 3h + 5 - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1.$$

   b) $f(x) = x^3 - 2x$ en $x_0 = 4$.

   Nos piden aplicar la definición, y por tanto:

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^3 - 2(4+h) - (4^3 - 2\cdot 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 12h^2 + 48h + 64 - 8 - 2h - 56}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 12h^2 + 46h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h^2 + 12h + 46)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(h^2 + 12h + 46) = 46.$$

2. Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada:

   a) $f(x) = x^3 - 5x + 8$.

   Nos piden aplicar la definición, y por tanto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - 5(x+h) + 8 - (x^3 - 5x + 8)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 5x - 5h + 8 - x^3 + 5x - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 5)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 5) = 3x^2 - 5.$$

   b) $f(x) = 4x^2 - 2x$.

   Nos piden aplicar la definición, y por tanto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2 - 2(x+h) - (4x^2 - 2x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h - 4x^2 + 2x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 2h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(8x + 4h - 2)}{h} = \lim_{h\to 0}(8x + 4h - 2) = 8x - 2.$$

3. Deriva las siguientes funciones:

a) $a(x) = 4x^3 + 5x^2 - x^{-1}$.

La función es una suma y resta de potencias, por lo tanto:

$$a'(x) = 12x^2 + 10x + \frac{1}{x^2}$$

b) $b(x) = sen(x)e^x$.

La función es un producto, por lo tanto debemos aplicar la regla del producto:

$$b'(x) = cosx \cdot e^x + senx \cdot e^x = e^x(cosx + senx)$$

c) $c(x) = \ln(4x^2 - 5)$.

Tenemos una composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$c'(x) = \frac{1}{4x^2 - 5} \cdot 8x = \frac{8x}{4x^2 - 5}$$

d) $d(x) = \cos(\tan(2x))$.

Tenemos una composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$d'(x) = -sen(tan(2x) \cdot \frac{2}{cos^2(2x)}$$

e) $e(x) = \cos^7(x^6 + 5)$.

Tenemos una composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$e'(x) = 7cos^6(x^6 + 5) \cdot (-sen(x^6 + 5)) \cdot 6x^5 = -42x^5 \cdot cos^6(x^6 + 5) \cdot sen(x^6 + 5)$$

f) $f(x) = \arctan(\ln(3x^2 + 4x)$.

Tenemos una composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \ln^2(3x^2 + 4x)} \cdot \frac{1}{3x^2 + 4x} \cdot (6x + 4) = \frac{6x + 4}{(3x^2 + 4x)(1 + \ln^2(3x^2 + 4x))}.$$

g) $g(x) = \dfrac{sen(x)}{e^{x^2}}$.

Tenemos un cociente , por lo tanto debemos utilizar la regla del cociente, y además tenemos composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$g'(x) = \frac{cosx \cdot e^{x^2} - senx \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{e^{x^2}(cosx - 2xsenx)}{(e^{x^2})^2} = \frac{cosx - 2xsenx}{e^{x^2}}$$

h) $h(x) = \dfrac{\cos(2x)}{sen(4x)}$.

Tenemos un cociente, por lo tanto debemos utilizar la regla del cociente, y además tenemos composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$h'(x) = \frac{-2senx \cdot sen(4x) - cos(2x) \cdot 4cos(4x)}{sen^2(4x)}$$

i) $i(x) = e^{4x^2-3}\tan(2x^2-1)$.

Es un producto, por lo tanto debemos utilizar la relga del producto, y además tenemos composición de funciones, luego debemos aplciar la regla de la cadena:

$$i'(x) = 8x \cdot e^{4x^2-3} \cdot tan(2x^2-1) + e^{4x^2-3} \cdot \frac{4x}{cos^2(2x^2-1)}$$

j) $j(x) = \sqrt[5]{8x^2+5} = (8x^2+5)^{\frac{1}{5}}$.

Tenemos una composición de funciones, y por lo tanto debemos aplicar la regla de la cadena:

$$j'(x) = \frac{1}{5}(8x^2+5)^{-\frac{4}{5}} \cdot 16x = \frac{16x}{5\sqrt[5]{(8x^2+5)^4}}$$

k) $k(x) = \sqrt[6]{e^{2x-1}} = (e^{2x-1})^{\frac{1}{6}}$

Tenemos una composición de funciones, y por lo tanto debemos aplicar la regla de la cadena:

$$k'(x) = \frac{1}{6}(e^{2x-1})^{-\frac{5}{6}} \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = \frac{e^{2x-1}}{3\sqrt[6]{(e^{2x-1})^5}}$$

l) $l(x) = 2\cos(4x+8)$.

Tenemos una composición de funciones, y por lo tanto debemos aplicar la regla de la cadena:

$$l'(x) = 2 \cdot (-sen(4x+8)) \cdot 4 = -8 \cdot sen(4x+8)$$

m) $m(x) = sen^2(2x)\cos^3(3x)$.

Tenemos un producto, luego debemos utilizar la regla del producto; además tenemos composición de funciones, y por lo tanto debemos aplicar la regla de la cadena:

$$m'(x) = 2 \cdot sen(2x) \cdot cos(2x) \cdot 2 \cdot cos^3(2x) + sen^2(2x) \cdot 3 \cdot cos^2(3x) \cdot (-sen(3x)) \cdot 3 =$$
$$= 4 \cdot sen(2x) \cdot cos(2x) \cdot cos^3(2x) - 9 \cdot sen^2(2x) \cdot cos^2(3x) \cdot sen(3x)$$

n) $n(x) = \ln(x^2-5)\arctan(7x^3+1)$.

Tenemos un producto, luego debemos utilizar la regla del producto; además tenemos composición de funciones, y por lo tanto debemos aplicar la regla de la cadena:

$$n'(x) = \frac{2x}{x^2-5} \cdot arctg(7x^3+1) + \ln(x^2-5) \cdot \frac{21x^2}{1+(7x^3+1)^2}$$

o) $o(x) = \tan(4x^3 + 4) - \cos(2x)$.

Tenemos composición de funciones, luego debemos utilizar la regla de la cadena:

$$o'(x) = \frac{12x^2}{cos^2(4x^3 + 4)} + 2sen(2x)$$

p) $p(x) = \ln(3x^3 + 5x)sen(3x^2 + 5)$.

Tenemos un producto, luego debemos utilizar la regla del producto; además tenemos composición de funciones, y por lo tanto debemos aplicar la regla de la cadena:

$$p'(x) = \frac{9x^2 + 5}{3x^3 + 5x} \cdot sen(3x^2 + 5) + \ln(3x^3 + 5x) \cdot cos(3x^2 + 5) \cdot 6x$$

q) $q(x) = \ln(\arctan(\cos(4x^2 + 5)))$.

Tenemos composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$q'(x) = \frac{1}{arctg(cos(4x^2 + 5))} \cdot \frac{1}{1 + cos^2(4x^2 + 5)} \cdot (-sen(4x^2 + 5)) \cdot 8x$$

r) $r(x) = \ln(xe^x)$.

Tenemos una composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena, y hay un producto, luego debemos aplicar la regla del producto:

$$r'(x) = \frac{e^x + xe^x}{xe^x} = \frac{e^x(1 + x)}{xe^x} = \frac{1 + x}{x}$$

s) $s(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{4x^2 + 1}$.

Tenemos un cociente, por lo tanto debemos aplicar la regla del cociente; además hay composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$s'(x) = \frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2x - 1}} \cdot (4x^2 + 1) - \sqrt{2x - 1} \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 1 - (2x - 1) \cdot 8x}{\sqrt{2x - 1} \cdot (4x^2 + 1)^2} = \frac{-12x^2 + 8x + 1}{\sqrt{2x - 1} \cdot (4x^2 + 1)^2}$$

t) $t(x) = \dfrac{\cos(2x + 5)}{\sqrt{x + 1}}$.

Tenemos un cociente, por lo tanto debemos aplicar la regla del cociente; además hay composición de funciones, luego debemos aplicar la regla de la cadena:

$$t'(x) = \frac{-sen(2x + 5) \cdot 2 \cdot \sqrt{x + 1} - cos(2x + 5) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}}}{x + 1} = \frac{-4(x + 1)sen(2x + 5) - cos(2x + 5)}{2\sqrt{x + 1} \cdot (x + 1)}$$

4. Calcula la recta tangente a las funciones dadas en los puntos indicados:

a) $a(x) = x\ln(x)$ en $x_0 = 1$.

La ecuación de la recta tangente a $a(x)$ en $x_0 = 1$ es : $y - a(1) = a'(1)(x-1)$. Por lo tanto debemos calcular $a(1)$ y $a'(1)$:

Calculamos $a(1)$: $a(1) = 1 \cdot \ln(1) = 1 \cdot 0 = 0$.

Para calcular $a'(1)$. calculamos primero $a'(x)$ y sustituímos en $x_0 = 1$:

$a'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$. Sustituyendo $a'(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente: $y = x - 1$, que es la recta tangente que nos piden.

b) $b(x) = e^{2x}\cos(3x)$ en $x_0 = 0$.

La ecuación de la recta tangente a $b(x)$ en $x_0 = 0$ es : $y - b(0) = b'(0)(x-0)$. Por lo tanto debemos calcular $b(0)$ y $b'(0)$:

Calculamos $b(0)$: $b(0) = e^0 \cdot cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$.

Para calcular $b'(0)$. calculamos primero $b'(x)$ y sustituímos en $x_0 = 0$:

$b'(x) = 2e^{2x}cos(3x) + e^{2x} \cdot (-sen(3x)) \cdot 3$. Sustituyendo $b'(0) = 2$.

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente: $y - 1 = 2x$, que es la recta tangente que nos piden.

c) $c(x) = \sqrt{2x^2+1}$ en $x_0 = 2$.

La ecuación de la recta tangente a $c(x)$ en $x_0 = 2$ es : $y - c(2) = c'(2)(x-2)$. Por lo tanto debemos calcular $c(2)$ y $c'(2)$:

Calculamos $c(2)$: $c(2) = \sqrt{8+1} = 3$.

Para calcular $c'(2)$. calculamos primero $c'(x)$ y sustituímos en $x_0 = 2$:

$c'(x) = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$. Sustituyendo $c'(2) = \dfrac{4}{3}$.

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente: $y - 3 = \dfrac{4}{3}(x-2)$, que es la recta tangente que nos piden.

d) $d(x) = sen(3x)\cos(x/2)$ en $x_0 = \pi/2$.

La ecuación de la recta tangente a $d(x)$ en $x_0 = \pi/2$ es : $y - d(\pi/2) = d'(\pi/2)(x - \pi/2)$. Por lo tanto debemos calcular $d(\pi/2)$ y $d'(\pi/2)$:

Calculamos $d(\pi/2)$: $d(\pi/2) = sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) \cdot cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = (-1) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Para calcular $d'(\pi/2)$. calculamos primero $d'(x)$ y sustituímos en $x_0 = \pi/2$:

$d'(x) = 3cos(3x) \cdot cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot sen(3x) \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)$. Sustituyendo $d'(\pi/2) = 3 \cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente: $y + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, que es la recta tangente que nos piden.

5. Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $a(x) = x^4 - 4x^2$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada e igualamos a cero:

$a'(x) = 4x^3 - 8x$. Igualando a 0: $4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{2}$ o $x = \sqrt{2}$.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada:

Intervalo	$x \in (-\infty, -\sqrt{2})$	$x \in (-\sqrt{2}, 0)$	$x \in (0, \sqrt{2})$	$x \in (\sqrt{2}, \infty)$
Signo de a'	$-$	$+$	$-$	$+$
Crecimiento de a	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En el punto de abscisa $x = -\sqrt{2}$ hay un mínimo relativo. El punto es $(-\sqrt{2}, -4)$.
En el punto de abscisa $x = 0$ hay un máximo relativo. El punto es $(0, 0)$.
En el punto de abscisa $x = \sqrt{2}$ hay un mínimo relativo. El punto es $(\sqrt{2}, -4)$.

b) $b(x) = x^3 - 3x$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada e igualamos a cero:

$b'(x) = 3x^2 - 3$. Igualando a 0: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ o $x = 1$.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de b'	$+$	$-$	$+$
Crecimiento de b	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En el punto de abscisa $x = -1$ hay un máximo relativo. El punto es $(-1, 2)$.
En el punto de abscisa $x = 1$ hay un mínimo relativo. El punto es $(1, -2)$.

c) $c(x) = \frac{1}{x}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada e igualamos a cero. Además, debemos tener en cuenta los valores que están fuera del dominio, es decir $x = 0$, ya que anula el denominador y por lo tanto está fuera del dominio:

$c'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Igualando a 0: $-\frac{1}{x^2} = 0$ que no tiene solución.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada y los valores que no pertenecen al dominio:

Intervalo	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
Signo de c'	$-$	$-$
Crecimiento de c	$\searrow$	$\searrow$

d) $d(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada e igualamos a cero. Además, debemos tener en cuenta los valores que están fuera del dominio, es decir $x = -1$ y $x = 1$, ya que anulan el denominador y por lo tanto están fuera del dominio::

$d'(x) = \dfrac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^1 - 1)^2} = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$. Igualando a 0: $\dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0$, que no tiene solución.

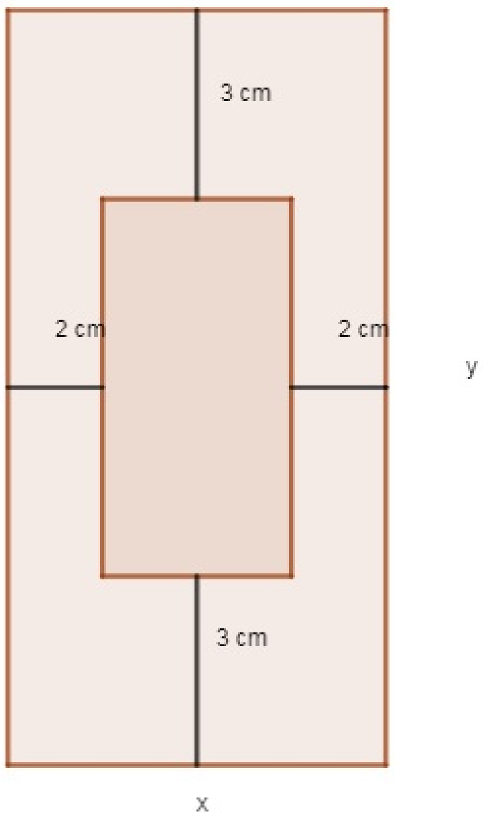
Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de d'	$-$	$-$	$-$
Crecimiento de d	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

6. Se quiere escribir un texto de 81 cm^2 en una hoja.Si debe haber un margen de 2 cm en cada lateral y de 3 cm arriba y abajo, ¿cuáles son las dimensiones de la hoja de menor área?

   Podemos resolver de dos formas distintas:

<u>Versión 1</u>



LLamando x e y al ancho y al largo, respectivamente, de la hoja que vamos a utilizar. Como el texto tiene una superficie de 81 cm ^{2}, entonces $(x-4)(y-6)=81 \Rightarrow y=\dfrac{57+6x}{x-4}$.

Debemos minimizar el área de la hoja, es decir, $f(x)=x\cdot\dfrac{57+6x}{x-4}=\dfrac{57x+6x^2}{x-4}$

Derivando e igualando a 0: $f'(x)=\dfrac{(57+12x)\cdot(x-4)-(57x+6x^2)}{(x-4)^2}=\dfrac{6x^2-48x-228}{(x-4)^2}$

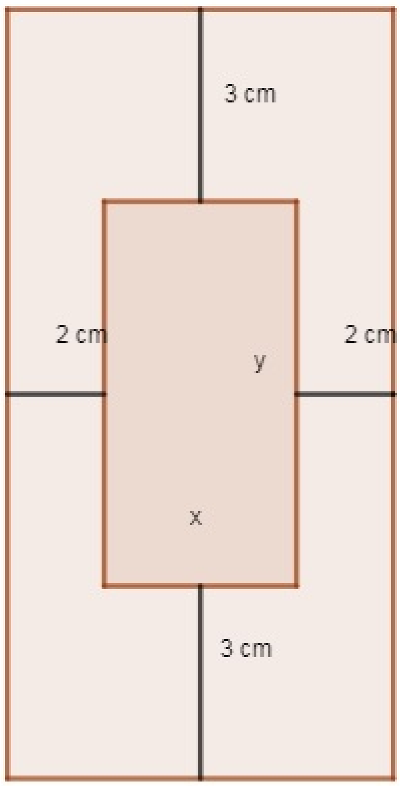
$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-48x-228=0 \Rightarrow x=4+3\sqrt{6}$ cm , ya que $4-3\sqrt{6}$ es negativo, y una longitud no puede ser negativa.

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un minimo:

Intervalo	$x\in(4,4+3\sqrt{6})$	$x\in(4+3\sqrt{6},\infty)$
Signo de f'	$-$	$+$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\nearrow$

Calculamos el largo: $y=\dfrac{57+6(4+3\sqrt{6})}{3\sqrt{6}}=6+\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ cm.

Versión 2



LLamando x e y al ancho y al largo, respectivamente, del texto. Como el texto tiene una superficie de 81 cm ^{2}, entonces $x \cdot y = 81 \Rightarrow y = \dfrac{81}{x}$. Luego deberemos tener en cuenta que al ancho hay que añadirle $2+2=4$ cm de margen y al largo hay que añadirle $3+3=6$ cm de margen.

Debemos minimizar el área de la hoja, es decir, $f(x) = (x+4) \cdot \left(\dfrac{81}{x} + 6\right) = 6x + \dfrac{324}{x} + 105$.

Derivando e igualando a 0: $f'(x) = 6 - \dfrac{324}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - \dfrac{324}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{6}$ cm , ya que $-3\sqrt{6}$ es negativo, y una longitud no puede ser negativa.

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un minimo:

Intervalo	$x \in (0, 3\sqrt{6})$	$x \in (3\sqrt{6}, \infty)$
Signo de f'	$-$	$+$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\nearrow$

Calculamos el largo: $y = \dfrac{81}{3\sqrt{6}} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ cm.

Al tener que sumar 4 cm al ancho y 6 cm al largo, las dimensiones de la hoja son $4 + 3\sqrt{6}$ cm de ancho y $6 + \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ cm de largo.

7. Un depósito abierto de chapa y de base cuadrada debe tener capacidad para 13500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que se precise la menor cantidad posible de chapa?

Llamamos x a la longitud del lado de la base (en dm) y h a la altura (en dm) del depósito. Nos encontramos entonces con un prisma de base cuadrada. El volumen del prisma es $V = A_{base} \cdot altura = x^2 \cdot h$. Como el volumen es 13500 dm^3, (ya que 1 litro = 1 dm^3), entonces $13500 = x^2 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{13500}{x^2}$.

Pretendemos minimizar la cantidad de chapa, es decir, la superficie, que será la superficie de la base, que es x^2 al tratarse de un cuadrado de lado x , más el área lateral, formada por cuatro rectángulos de área $x \cdot h$. Por lo tanto la función a minimizar es la siguiente:

$f(x) = x^2 + 4x \cdot = x^2 + 4x \cdot \left(\dfrac{13500}{x^2}\right) = x^2 + \dfrac{54000}{x}$.

Derivando e igualando a 0:
$f'(x) = 2x - \dfrac{54000}{x^2}$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \dfrac{54000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 30$ dm.

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un minimo:

Intervalo	$x \in (0, 30)$	$x \in (30, \infty)$
Signo de f'	$-$	$+$
Crecimiento de f	$\searrow$	$\nearrow$

Calculamos ahora la altura: $h = \dfrac{13500}{30^2} = 15$ dm.

Por tanto la base debe ser un cuadrado de lado 30 dm y la altura debe ser 15 dm.