MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I.

Entrega 7: Funciones. SOLUCIONES.

1. Estudia los dominios de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{3+2x}$

   Dado que se trata de una raíz de índice par, el radicando debe ser un número positivo. Por tanto, $\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 3 + 2\mathrm{x} \geq 0\}$.

   Resolvemos la inecuación. Al ser de primer grado, únicamente tenemos que despejar la x. Es decir, $3 + 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$.

   Es decir, $\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \geq -\dfrac{3}{2}\right\} = \left[-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

   b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

   Al ser una función con una raíz de índice par, el radicando debe ser un número no negativo. Es decir, $\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x}^2 - 16 \geq 0\right\}$.

   Resolvemos la inecuación $x^2 - 16 \geq 0$. Para ello resolvemos la ecuación asociada $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$. Damos un valor en cada intervalo para ver qué signo tiene. Si $x \in (-\infty, -4)$ entonces $x^2 - 16 > 0$. Si $x \in (-4, 4)$ entonces $x^2 - 16 < 0$. Si $x \in (4, \infty)$ entonces $x^2 - 16 > 0$. Tomamos los valores positivos.

   Por lo tanto, $\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \leq -4 \text{ ó } \mathrm{x} \geq 4\} = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{2x^3 + 16}$

   Dado que es una fracción entre polinomios valen todos los reales excepto los que anulan el denominador. Es decir $\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 2\mathrm{x}^3 + 16 \neq 0\right\}$.

   Resolvemos la ecuación $2x^3 + 16 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -16 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$.

   Por tanto, $\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

   d) $f(x) = \dfrac{2}{4 - 5x}$

   Dado que se trata de un cociente de polinomios, el denominador no puede ser cero. Es decir, $\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 4 - 5\mathrm{x} \neq 0\}$.

   Resolvemos la ecuación $4 - 5x = 0 \Rightarrow 4 = 5x \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}$.

   Por tanto, $\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \neq \dfrac{5}{4}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

   e) $f(x) = \dfrac{7x}{\sqrt{x^2 - 64}}$

   Dado que la función es una fracción, el denominador no puede ser cero. Además como hay una raíz de índice par, el radicando correspondiente debe ser no negativo.

   Por tanto, $\mathrm{Dom(f)} \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x}^2 - 64 \geq 0 \text{ y } \mathrm{x}^2 - 64 \neq 0\right\} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x}^2 - 64 > 0\right\}$.

   Resolvemos la inecuación polinómica. Para ello resolvemos la ecuación asociada: $x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$. Damos un valor en cada intervalo para ver qué signo tiene. Si $x \in (-\infty, -8)$ entonces $x^2 - 64 > 0$. Si $x \in (-8, 8)$ entonces $x^2 - 64 < 0$. Si $x \in (8, \infty)$ entonces $x^2 - 64 > 0$. Tomamos los valores positivos.

   $\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} < -8 \text{ ó } \mathrm{x} > 8\} = (-\infty, -8) \cup (8, \infty)$.

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+2}}{x^2-25}$

Por un lado, tenemos una raíz cuadrada en el numerador y, en consecuencia, su radicando debe ser no negativo. Por otro lado, el denominador debe ser no nulo para que tenga sentido sustituir.

$\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 2\mathrm{x}+2 \geq 0 \text{ y } \mathrm{x}^2 - 25 \neq 0\right\}$.

Para resolver la inecuación despejamos la x. $2x+2 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -2 \Rightarrow x \geq -1$.

Para ver qué valores anulan el denominador, resolvemos la ecuación de segundo grado. Es decir $x^-25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.

Por tanto, $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -1 \text{ y } x \neq \pm 5\} = [-1, \infty) - \{5\} = [-1, 5) \cup (5, \infty)$.

g) $f(x) = \dfrac{-7}{8x-2x^2}$

Dado que es una fracción de polinomios, todos los valores serán válidos excepto los que anulen el denominador. Es decir, $\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 8\mathrm{x} - 2\mathrm{x}^2 \neq 0\right\}$.

Resolvemos la ecuación (incompleta) de segundo grado. $8x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x(8-2x) = 0$. El producto de la izquierda se anula si $x = 0$ ó $(8-2x) = 0 \Rightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$.

Es decir, $\mathrm{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{0, 4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$.

h) $f(x) = \log(3x-4)$

Dado que aparece un logaritmo, la expresión debe tomar valores positivos. Es decir,

$\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 3\mathrm{x} - 4 > 0\}$.

Resolvemos la inecuación. Dado que es de primer grado, únicamente debemos despejar la x. Es decir, $3x - 4 > 0 \Rightarrow 3x > 4 \Rightarrow x > \dfrac{4}{3}$.

En conclusión, $\mathrm{Dom(f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} > \dfrac{4}{3}\right\} = \left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$.

2. Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$ e indica el dominio de la función resultante en los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x^2 - 4$

Para calcular la expresión de la composición de las dos funciones empezaremos a desarrollar de dentro hacia fuera.

En primer lugar $f \circ g(x) = f(g(x))$. Sustituimos $g(x)$ por su expresión en la anterior igualdad. Nos queda $f(g(x)) = f(x^2-4)$. Ahora sustutimos en la función f. Para ello, cada vez que aparezca una x en la expresión de la función pondremos todo lo que va entre paréntesis. Es decir, $f(x^2-4) = \sqrt{(x^2-4)+1} = \sqrt{x^2-3}$.

Para hallar el dominio de $f \circ g$ observamos que hay una raíz de índice par. Por lo tanto su radicando debe tomar valores no negativos. Es decir, $\mathrm{Dom(f \circ g)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x}^2 - 3 \geq 0\}$.

Resolvemos la inecuación de segundo grado. Para ello resolvemos la ecuación asociada, $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Damos un valor en cada intervalo de la recta real que se generan al tomar $\pm\sqrt{3}$ de extremos.

Si $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, entonces $x^2 - 3 > 0$.

Si $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, entonces $x^2 - 3 < 0$.

Si $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, entonces $x^2 - 3 > 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Dom(f \circ g)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \leq -\sqrt{3} \text{ ó } \mathrm{x} \geq \sqrt{3}\} = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [3, \infty)$.

Ahora calculamos $g \circ f(x) = g(f(x))$. Sustituyendo $f(x)$ por su expresión tenemos $g(f(x)) = g(\sqrt{x+1})$. Sustituyendo en $disg(x)$ cada x por la expresión que está en el paréntesis obtenemos $g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 - 4 = x - 3$.

Dado que la expresión de $g \circ f$ es polinómica, tenemos que $\mathrm{Dom(g \circ f)} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 4x^2 + 3x$ y $g(x) = -2x + 3$

Empezamos calculando $f \circ g(x) = f(g(x))$. Primero sustituimos $g(x)$ por su expresión: $f(g(x)) = f(-2x+3)$. Sustituimos en la expresión de f. Cada vez que tengamos x escribiremos la expresión entre paréntesis. Así, $f(-2x+3) = 4(-2x+3)^2+3(-2x+3) = 4(4x^2+9-12x)-6x+9 = 16x^2-54x+45$.

Dado que la expresión de $f \circ g$ es polinómica, tenemos que $\mathrm{Dom(f \circ g)} = \mathbb{R}$.

Por otro lado, calculamos $g \circ f(x) = g(f(x))$. Primero sustituimos $f(x)$ en la expresión: $g(f(x)) = g(4x^2+3x)$. Ahora, sustituimos en la éxpresión de $g(x)$; cada vez que tengamos x escribimos $4x^2+3x$. Por tanto, $g(4x^2 + 3x) = -2(4x^2 + 3x) + 3 = -8x^2 - 6x + 3$.

Dado que la expresión obtenida es polinómica tenemos que $\mathrm{Dom(g \circ f)} = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{6x-3}{x^2-9}$ y $g(x) = -3x + 2$

En primer lugar calculamos la composición $f \circ g(x) = f(g(x))$. Sustituimos $g(x)$ por su expresión, obteniendo $f(g(x)) = f(-3x+2)$. Sustituimos ahora en $f(x)$ y cada vez que tengamos una x debemos sustituirlo por la expresión del paréntesis. Por tanto, $f(-3x + 2) = \dfrac{6(-3x+2)-3}{(-3x+2)^2-9}$. Operamos en la expresión anterior y obtenemos $\dfrac{-18x+12-3}{9x^2-12x+4-9} = \dfrac{-18x+9}{9x^2-12x-5}$.
Dado que tenemos una expresión fraccionaria, su dominio serán todos los números reales excepto los que anulan al denominador. $\mathrm{Dom(f \circ g)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | 9\mathrm{x}^2 - 12\mathrm{x} - 5 \neq 0\right\}$.

Resolvemos la ecuación $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144+180}}{18} = \dfrac{12 \pm 18}{18}$. Obtenemos dos soluciones; por un lado $x = \dfrac{5}{3}$ y por otro $x = -\dfrac{1}{3}$. Es decir,
$\mathrm{Dom(f \circ g)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \neq -\dfrac{1}{3} \text{ y } \mathrm{x} \neq \dfrac{5}{3}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right\}$.
Por otro lado debemos efectuar la composición $g \circ f(x) = g(f(x))$. Para ello sustituimos $f(x)$ por su expresión algebraica, $g(\dfrac{6x-3}{x^2-9})$. Sustituimos ahora en $g(x)$ cada x por la fracción entre paréntesis y tenemos $g(\dfrac{6x-3}{x^2-9}) = -3\dfrac{6x-3}{x^2-9} + 2 = \dfrac{2x^2-18x-9}{x^2-9}$.
Dado que la expresión resultante es una fracción, aolamente debemos comprobar que valores anulan el denominador. $\mathrm{Dom(g \circ f)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x}^2 - 9 \neq 0\right\}$.
Resolvemos la ecuación de segundo grado $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. En consecuencia, $\mathrm{Dom(g \circ f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \neq -3 \text{ y } \mathrm{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$.

3. Calcula la función inversa de las siguientes funciones y estudia su dominio:

a) $f(x) = 3x + 2$

En primer lugar, sustituimos $f(x)$ por y, obteniendo $y = 3x + 2$. Posteriormente, despejamos la x. Tenemos $y = 3x + 2 \Rightarrow y - 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{y-2}{3}$. Ahora cambiamos x por $f^{-1}(x)$ y la y por x.

Es decir, $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$. Dado que tenemos una expresión polinómica (no hay variables en el denominador) su dominio es el conjunto de los reales. Es decir, $\mathrm{Dom(f^{-1})} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

Al sustituir $f(x)$ por y, obtenemos $y = \dfrac{x+2}{x-3}$. Buscamos despejar la variable x. Para ello, pasamos el denominador de la fracción al primer miembro, obteniendo $xy - 3y = x + 2$. Pasamos los términos que tienen x al primer miembro y los que no tienen x pasan al segundo: $xy - x = 2 + 3y$. Sacamos factor común x en el primer miembro $x(y - 1) = 2 + 3y$. Pasamos el factor que multiplica a la x dividiendo en al segundo miembro $x = \frac{2+3y}{y-1}$. Una vez que hemos despejado la x, la sustituimos por $f^{-1}(x)$ y la y por x.

Obtenemos por tanto, que la inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{2+3x}{x-1}$.

El dominio de una fracción que tiene numerador y denominador polinomios es el conjunto de los reales, excepto los valores que anulan el denominador. Es decir, $\mathrm{Dom(f^{-1})} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} - 1 \neq 0\}$. Resolviendo la ecuación tenemos que $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Por lo tanto, $\mathrm{Dom(f^{-1})} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$.

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Sustituimos $f(x)$ por y. Obtenemos $y = \sqrt{x-1}$. Para despejar la x, primero hay que eliminar la raíz cuadrada, para ello elevamos ambos miembros al cuadrado $y^2 = x-1$. Para quitar el 1, lo pasamos al primer miembro sumando. Es decir, $x = y^2+1$. Cambiamos x por $f^{-1}(x)$ y la y por x. Obtenemos que $f^{-1}(x) = x^2+1$.

Dado que la expresión es polinómica, obtenemos que $\mathrm{Dom(f^{-1})} = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = x^2+3$; $x \geq 0$

Sustituimos $f(x)$ por y. Es decir, tenemos $y = x^2+3$. Para despejar x, primero pasamos el 3 al primer miembro, obteniendo $x^2 = y-3$. Para despejar la x tomamos raíz cuadrada a los dos miembros y tenemos $x = \sqrt{y-3}$. Intercambiando x por $f^{-1}(x)$ y la y por x, tenemos la inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$.

Para hallar su dominio tenemos en cuenta que es una raíz de índice par. Por lo tanto, el radicando no puede ser un número negativo y $\mathrm{Dom(f^{-1})} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} - 3 \geq 0\}$. Para resolver la inecuación observamos que es de primer grado. Por tanto, únicamente debemos despejar la x. Obtenemos $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.

Es decir, $\mathrm{Dom(f^{-1})} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \mathrm{x} \geq 3\} = [3, \infty)$.

4. Esta tabla muestra la temperatura atmosférica tomada a diferentes alturas:

Altura(m)	0	500	1000	1500
Temperatura (°C)	15	11’7	8’4	5’1

Calcula la temperatura a 300 metros y a 1200 metros.

Dado que la temperatura depende de la altura, consideramos la altura como variable x y la temperatura como variable y.

Primero calculamos la temperatura a 300 metros de altura. Para ello, utilizamos los valores obtenidos a los 0 y 500 metros de altura (los dos más próximos, uno por debajo y uno por arriba).

Hallamos la recta que pasa por los puntos $(x=0, y=15)$ y $(x=500, y=11'7)$. Para ello, tenemos que la ecuación de una recta es $y = ax+b$. Sustituimos ambos puntos en la ecuación y obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} 15 = 0a+b \\ 11'7 = 500a+b \end{array} \right\}.$$

Resolvemos el sistema. De la primera ecuación obtenemos directamente que $b = 15$. Sustituyendo en la segunda, obtenemos que $a = -\frac{3'3}{500} = 0'0066$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x=0, y=15)$ y $(x=500, y=11'7)$ es $y = -0'0066x+15$. Sustituimos x por 300 y obtenemos que la temperatura buscada es $y = -0'0066 \cdot 300 + 15 = 13'02 \circ C$.

De manera análoga calculamos la temperatura a 1200 metros de altura. Para ello, utilizamos los valores obtenidos a los 1000 y 1500 metros de altura (los dos más próximos, uno por debajo y uno por arriba).

Hallamos la recta que pasa por los puntos $(x = 1000, y = 8'4)$ y $(x = 1500, y = 5'1)$. Para ello, tenemos que la ecuación de una recta es $y = ax + b$. Sustituimos ambos puntos en la ecuación y obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8'4 = 1000a + b \\ 5'1 = 1500a + b \end{array} \right\}.$$

Resolvemos el sistema. Restando ambas ecuaciones eliminamos las b y sacamos la a. Tenemos que $500a = -3'3$. Despejando tenemos que $a = -0'0066$. Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos que $8'4 = 1000(-0'0066) + b$. Despejando, tenemos $b = 15$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x = 1000, y = 8'4)$ y $(x = 1500, y = 5'1)$ es $y = -0'0066x + 15$. Sustituimos x por 1200 y obtenemos que la temperatura buscada es $y = -0'0066 \cdot 1200 + 15 = 7'08 \circ C$.

5. Un instalador de redes informáticas determina que puede ofertar instalaciones de 100 metros, 200 metros y 300 metros a 500 euros, 800 euros y 900 euros respectivamente, con un tope de 300 metros de longitud. Calcula la parábola que pasa por los tres puntos y determina cuánto costaría una instalación de 250 metros.

   Dado que el precio depende de la longitud, la variable dependiente (y) es el precio y la independiente (x) es la longitud. Dado que queremos encontrar la parábola que pasa por $(100, 500)$; $(200, 800)$ y $(300, 900)$ escribimos la ecuación general de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ y sustituimos cada punto en esta ecuación. Obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 500 = 10000a + 100b + c \\ 800 = 40000a + 200b + c \\ 900 = 90000a + 300b + c \end{array} \right\}.$$

   Para resolver el sistema, restamos la primera ecuación a la segunda por un lado y la segunda a la tercera por otro. Obtenemos las siguientes ecuaciones (con a y b como incógnitas):

$$\left\{ \begin{array}{l} 300 = 30000a + 100b \\ 100 = 50000a + 100b \end{array} \right\}.$$

   Para eliminar la b de las ecuaciones restamos las dos ecuaciones de este último sistema y obtenemos $200 = -20000a$. Despejando tenemos $a = -0'01$. Despejando en la primera ecuación del segundo sistema tenemos $300 = -300 + 100b \Rightarrow b = 6$. Por último, sustituyendo en la primera ecuación del primer sistema tenemos $500 = 10000(-0'01) + 100 \cdot 6 + c \Rightarrow c = 0$.

   Por lo tanto, la parábola que pasa por los tres puntos es: $y = -0'01x^2 + 6x$. Sustituyendo x por 250 en esta ecuación obtenemos que el coste es de $y = -0'01 \cdot 250^2 + 6 \cdot 250 = 875$ euros.