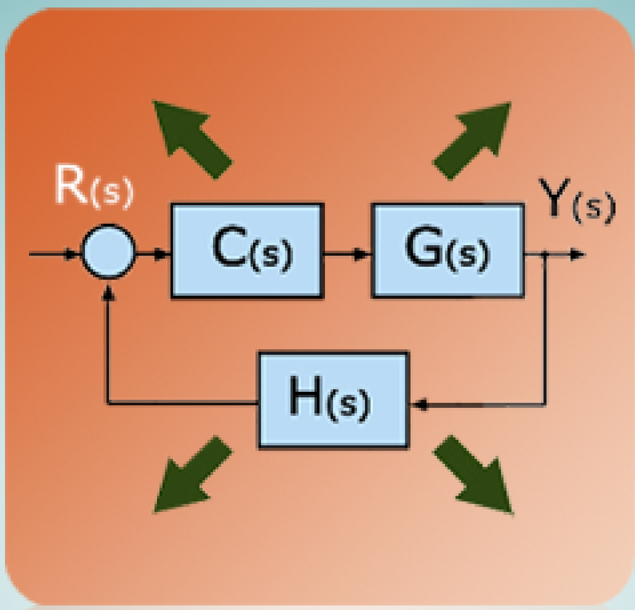
# Automática

## Capítulo 5. Estabilidad




**José Ramón Llata García**
**Esther González Sarabia**
**Dámaso Fernández Pérez**
**Carlos Torre Ferrero**
**María Sandra Robla Gómez**

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

# 5

# Estabilidad

## 5.1. INTRODUCCIÓN

En el diseño de cualquier sistema de control de un proceso dinámico, la estabilidad es uno de los principales parámetros a tener en cuenta, ya que en el caso de entrar en inestabilidad se puede producir el deterioro y destrucción del proceso.

Se puede decir que un sistema o proceso es estable si, ante una señal de entrada limitada en amplitud, el sistema responde con una señal de salida también limitada en amplitud. Esta es una definición de lo que se denomina "estabilidad absoluta", es decir, si el sistema es estable o no. Sin embargo, en muchas ocasiones es interesante conocer también el grado de estabilidad del sistema, lo que se conoce como "estabilidad relativa".

Para sistemas lineales tiempo invariantes, la estabilidad está directamente ligada con la posición de las raíces del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado (los polos del sistema). Para comprobar esta última afirmación basta calcular la transformada inversa de una función de transferencia genérica, tal como la siguiente:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{s^N \cdot \prod_{k=1}^{Q} (s + \sigma_k) \cdot \prod_{m=1}^{R} (s^2 + 2 \cdot \alpha_m \cdot s + w_m^2)}$$

Si se aplica al sistema una señal de entrada tipo impulso unidad, R(s)= δ(t), la respuesta del sistema es idéntica a la transformada inversa de su función de transferencia y en ésta se observa plenamente las características dinámicas y estáticas del sistema. De esta forma, la transformada de la expresión anterior (considerando N=0 y para entrada impulso unidad) queda de la forma:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{Q} A_k \cdot e^{-\sigma_k \cdot t} + \sum_{m=1}^{R} B_m \cdot e^{-\sigma_m \cdot t} \cdot \mathrm{sen}(w_m \cdot t + \theta_m)$$

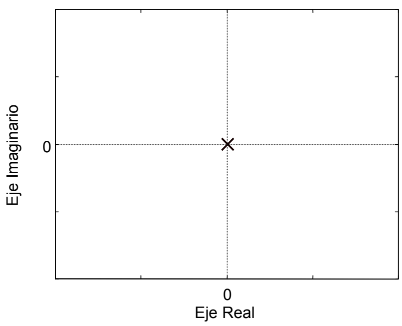
Los coeficientes de $A_k$ y $B_k$ dependen de los valores de K, $\sigma_k$, $\alpha_m$ , $w_m$ y $z_i$. Como se puede observar en la expresión anterior, los valores de la parte real de las raíces del denominador actúan como exponentes en las exponenciales dependientes del tiempo. De esta forma, si la parte real de las raíces del denominador son negativas se obtienen exponenciales decrecientes con el tiempo, mientras que si la parte real de las raíces son positivas se obtienen términos que crecen exponencialmente con el tiempo.

Entonces, es condición para que el sistema sea estable que todas las raíces del denominador de la función de transferencia del sistema, o lo que es lo mismo los polos o las raíces de la ecuación característica, tengan parte real negativa. En el momento que una única raíz no cumpla esta condición el sistema será inestable.

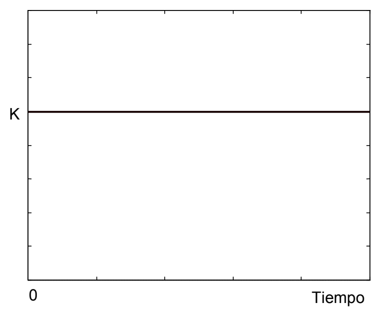
Existe un caso particular que es interesante considerar. Este aparece cuando alguna de las raíces no presenta parte real ni positiva ni negativa, es decir, que es cero. Esto ocurre cuando el sistema presenta polos en el origen o polos complejos conjugados con parte real nula. En este caso, el sistema es marginalmente estable, ya que ante una entrada limitada en amplitud la respuesta no crece indefinidamente, pero presenta características especiales, tales como la existencia de respuesta aún cuando se ha eliminado la entrada.

A continuación se presenta un conjunto de figuras donde se puede observar la relación entre la posición de los polos y el tipo de respuesta obtenido para una entrada impulso unidad.

- Respuesta impulsional de un sistema con un polo en el origen:

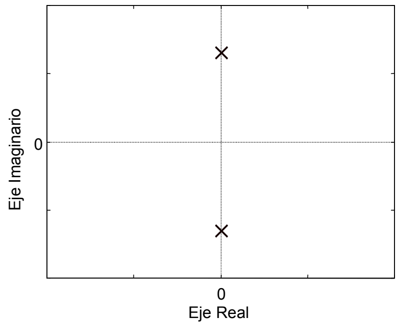


Polos del sistema

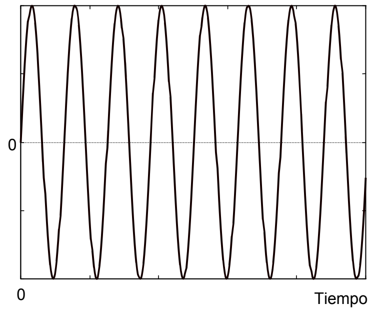


Respuesta Impulsional

- Respuesta impusional de un sistema con dos polos complejos en el eje imaginario:

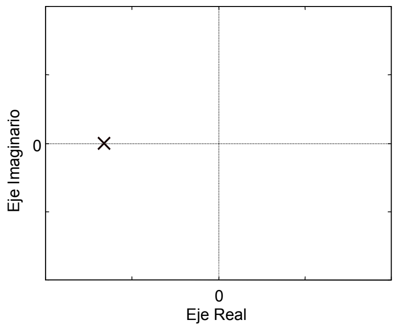



Polos del sistema

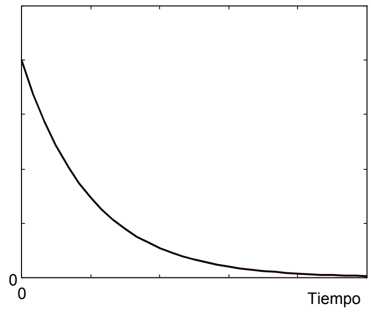



Re
spuesta Impulsional

- Respuesta impusional de un sistema con un polo en el eje real negativo:

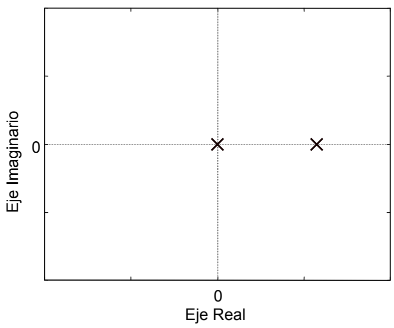



Polos del sistema

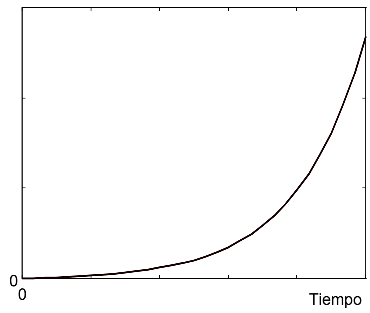



Respuesta Impulsional

- Respuesta impusional de un sistema con un polo en origen y otro en eje real positivo:

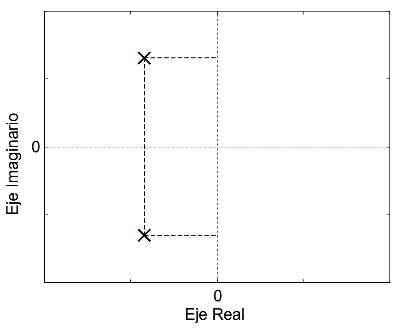



Polos del sistema

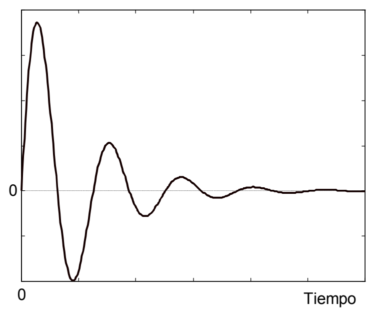



Respuesta Impulsional

- Respuesta impusional de un sistema con polos complejos con parte eje real negativa:

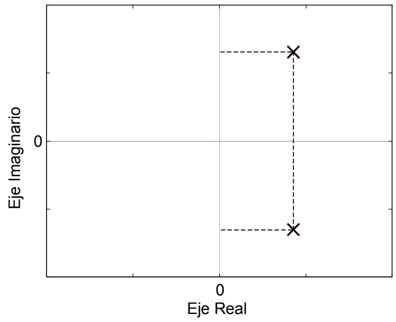



Polos del sistema

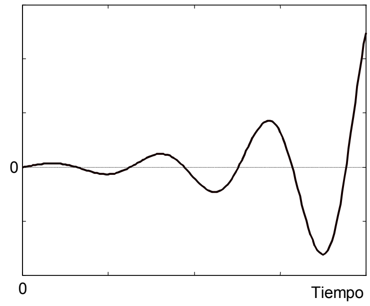



Respuesta Impulsional

- Respuesta impulsional de un sistema con polos complejos con parte eje real positiva:

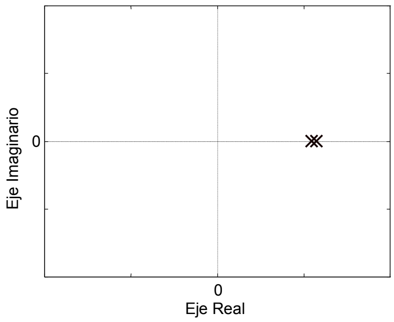


Polos del sistema

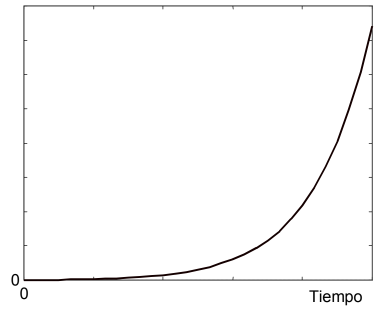


Respuesta Impulsional

- Respuesta impulsional de un sistema con polos reales en la parte eje real positiva:



Polos del sistema



Respuesta Impulsional

Como se ha indicado previamente, y tal como indican las figuras anteriores, basta con calcular las raíces del denominador de la función de transferencia del sistema (ecuación característica), y comprobar su posición en el plano complejo s, para saber si el sistema es estable y como afecta cada una de las raíces.

Hoy en día, con el uso de las modernas calculadoras y computadores, el cálculo de las raíces de la ecuación característica es una tarea sencilla y automática que permite conocer si el sistema es estable o no, e incluso el grado de estabilidad relativa. Sin embargo, no hace mucho tiempo que el cálculo de estas raíces era una tarea imposible de realizar, por lo que desarrollaron técnicas alternativas que, si bien hoy en día han perdido algo de su relevancia al poder calcular directamente las raíces, aportan aún gran información acerca del comportamiento del sistema y son muy útiles para el diseño y ajuste de parámetros de control.

Existen, básicamente, tres enfoques en los métodos de análisis de estabilidad: Análisis en el plano complejo s, análisis en frecuencia y análisis en el tiempo, aunque este último es más propio de la representación mediante variables de estado. Las dos primeras técnicas son tratadas en el presente texto, dejando el análisis en frecuencia para el capítulo 7, mientras que el estudio de estabilidad en el plano s se presenta a continuación mediante la aplicación del criterio de Routh-Hurwitz.

## 5.2. CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH-HURWITZ

A finales de 1800, A. Hurwitz y J. Routh publicaron un método para el análisis de la estabilidad de sistemas a partir de su ecuación característica. A continuación se presenta, de forma muy resumida, este método.

Dada la ecuación característica del sistema:

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Si alguno de los coeficientes no existe o es de distinto signo el sistema será inestable.

Se construye la tabla de Routh-Hurwitz según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|llll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s^2 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\
s^1 & d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\
s^0 & e_1 & e_2 & e_3 & \dots
\end{array}$$

Los coeficientes $b_1$, $b_2$, $b_3$, etc. se calculan según las expresiones siguientes:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

Los coeficientes $c_1$, $c_2$, $c_3$, etc. se calculan según las expresiones siguientes:

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

De la misma forma se van calculando los coeficientes de cada fila basándose siempre en los coeficientes de las dos filas anteriores hasta llegar a la fila de $s^0$.

Cada cambio de signo en la primera columna, corresponde con un polo inestable.

Casos especiales:

- Cuando aparece un término cero en la primera columna, se sustituye s por $\frac{1}{x}$ en la ecuación característica y se realiza la tabla. El número de polos inestables no varía.

- Todos los coeficientes de una fila pueden ser multiplicados o divididos por un número positivo sin alterar el resultado.

- Cuando aparece una fila de ceros para calcular la siguiente fila se utiliza la ecuación auxiliar formada por los coeficientes de la fila anterior para, después de derivarla, sustituir con sus coeficientes la fila de ceros.