TEMA 8: SUCESIONES. TÉRMINO GENERAL Y FORMA RECURRENTE. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS. APLICACIONES

TIEMPO: 72 — 60

Esquema

1) Introducción
2) Sucesiones de números reales
    2.1) Definición: sucesión, límite, convergencia, monotonía, acotación
    2.2) Propiedades + operaciones con límites
    2.3) Parciales + Teorema
3) Progresiones aritméticas
    3.1) Definición: progresión aritmética (p.a.)
    3.2) Suma de "n" términos
    3.3) Serie aritmética de una p.a.
    3.4) Definición: progresiones armónicas
4) Progresiones geométricas
    4.1) Definición: progresión geométrica (p.g.)
    4.2) Producto de "n" términos
    4.3) Serie aritmética de una p.g.
    4.4) Definición: progresión hípergeométrica
    4.5) Definición: progresión aritmético-geométrica
5) Aplicaciones
    5.1) Fracciones decimales
    5.2) Matemática comercial
    5.3) Números de Fibonacci + e
6) Progresiones de orden superior
    6.1) Operador diferencia
        6.1.1) Definición
        6.1.2) Propiedades
        6.1.3) Fórmula de Interpolación de Newton
    6.2) Progresión aritmética de orden "k"
        6.2.1) Teorema

1) Introducción:

▷ Aunque el concepto de número aparece muy pronto en la historia de la Humanidad, no es hasta el s.XIX cuando se construye la fundamentación lógica de los números reales.

▷ Hay una cita de Kronecker que dice: “los naturales los creó Dios, el resto es obra del hombre”. Lo que se esconde tras esta afirmación es la historia particular del concepto de número: primero los naturales (y el cero en algunas civilizaciones), después los enteros, los racionales, los reales (ya antes de los griegos incluso se sabía que la diagonal de un cuadrado no era racional o que Π tampoco lo era), los complejos, etc. Cada concepto englobaba a los anteriores y ayudaba a responder o simplificar cuestiones prácticas o teóricas.

▷ Sería con los estudios sobre sucesiones y límites cuando se necesitó crear un mejor estructura lógica para explicar los números reales (ss.XIX-XX).

2) Sucesiones de números reales:

▷ **Definición**: llamaremos sucesión de números reales a una aplicación de un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$; $f : A \subset \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ y lo notamos por: $n \longmapsto x_n$

▷ Para determinar una sucesión podemos hallar su "término general" o ver si hay alguna "ley de recurrencia",...aunque esto no será posible en general. Ejemplos de lo anterior son: $x_n = \frac{1}{n}$ o $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n + 3$

▷ **Definición**: decimos que la sucesión $\{x_n\}$ tiene por límite el número real L si:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $|x_n - L| < \epsilon$ y lo notaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ o $\{x_n\} \longmapsto L$

▷ **Definición**: a una sucesión que tenga límite la llamaremos convergente.

▷ **Definición**: si se tiene que $\forall k > 0 (k < 0)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $x_n > k (x_n < k)$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$. En este caso diremos que la sucesión es divergente.

▷ **Definición**: si una sucesión no es convergente ni divergente, diremos que es oscilante. Por ejemplo, $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$

▷ **Definición**: decimos que una sucesión es monótona creciente/decreciente $\longleftrightarrow$ se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$ / $a_{n+1} \leq a_n$.
Si la desigualdad es estricta diremos que es estrictamente monótona creciente/decreciente.

▷ **Definición**: decimos que $\{x_n\}$ está acotada si $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$

▷ **Propiedades**:

1) Si existe el límite, este es único.
2) Lema del bocadillo: si se tienen tres sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ tales que $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n \in \mathbb{N}$ y además $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = L$
3) Toda sucesión convergente es acotada.
4) Toda sucesión acotada y monótona es convergente.
5) Teorema de Completitud de $\mathbb{R}$: $\{x_n\}$ es convergente $\longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ es de Cauchy.

▷ **Operaciones con los límites**: sean $\{a_n\} \to a$ y $\{b_n\} \to b$. Entonces:

1) $\{a_n + b_n\} \to a + b$
2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$: $\{\alpha \cdot a_n\} \to \alpha a$

•) Estos dos primeros puntos nos dicen que el espacio de las sucesiones convergentes es un e.v. sobre $\mathbb{R}$

3) $\{a_n \cdot b_n\} \to a \cdot b$

Proof. $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \to 0$ □

4) Si $\{b_n\} \to b \neq 0 \longrightarrow \{\frac{a_n}{b_n}\} \to \frac{a}{b}$

▷ **Sucesiones divergentes**:

1) Sean $\{a_n\} \to +\infty$, $\{b_n\} \not\to -\infty \Longrightarrow \{a_n + b_n\} \to +\infty$

2) Sean $\{a_n\} \to -\infty$, $\{b_n\} \not\to +\infty \Longrightarrow \{a_n + b_n\} \to -\infty$

3) Si $\{b_n\}$ está acotada y $\{a_n\} \to \pm\infty \Longrightarrow \{a_n \pm b_n\} \to \pm\infty$

4) Lo anterior nos da las indeterminaciones del tipo: $\infty - \infty$

5) Sean $\{a_n\} \to +\infty$, $\{b_n\} \to b \neq 0 \Longrightarrow \{a_n \cdot b_n\} \to \text{signo}(b)\cdot\infty$

6) Sean $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to 0$ (y $b_n \neq 0$) $\Longrightarrow \{|a_n/b_n|\} \to +\infty$

7) Lo anterior no da las indeterminaciones: $0 \cdot \infty$, ∞/∞ y $0/0$

▷ Proposición: el límite de una potencia es la potencia de los límites. Es decir: $\{b_n\} \to b > 0$ y $\{a_n\} \to a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n)^{a_n} = b^a$

▷ Lo anterior no da las indeterminaciones del tipo: 0^0, ∞^0 y 1^∞

▷ Definimos el número "e" como: $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. Además, si $\{a_n\} \to +\infty$ y $\{b_n\} \to b$, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}^b$

▷ **Definición**: llamaremos sucesión parcial de una sucesión a la siguiente subsucesión: dado $\sigma : B$ (infinito) $\subset A \subset \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ estrictamente creciente, tomaremos $\{x_{\sigma(n)}\}$

▷ **Teorema**: toda sucesión acotada admite una parcial convergente.

3) Progresiones aritméticas:

▷ **Definición**: decimos que la sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, p.a., cuando su término general responde a la forma $a_n = b + d \cdot n$, donde b, $d \in \mathbb{R}$ y $d \neq 0$

▷ Dados h, $k \in \mathbb{N}$, $h > k$, $a_h - a_k = (h - k) \cdot d$

▷ **Proposición**: dados dos términos de una p.a. tal que equidisten de dos extremos, su suma es igual a la suma de dichos extremos.

Proof. $a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + k \cdot d + a_n - k \cdot d = a_1 + a_n$

□

▷ **Proposición**: la suma de "n" términos consecutivos de una p.a. es igual a la mitad de "n" veces la suma de los extremos.

Proof. $S_n + S_n = \overbrace{a_1 + a_n + \ldots + a_n + a_1}^{n} \longrightarrow S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ □

▷ **Definición**: dada una sucesión p.a., le asignamos otra sucesión: $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. A esta sucesión, de sumas parciales, la llamaremos serie aritmética.

▷ Decimos que una serie es convergente cuando lo es la sucesión de sumas parciales asociadas a la sucesión $\{a_n\}$

▷ Veamos que toda serie aritmética diverge:

Proof. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_n)\dfrac{n}{2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2a_1 \cdot n + (n-1) \cdot d}{2} = \infty$

□

▷ **Definición**: llamamos progresiones armónicas a una sucesión de números reales de la forma $a_n = \dfrac{1}{b + n \cdot n}$, donde b, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$ y el denominador no se anula. Podemos definir la progresión armónica como aquella que sus inversos forman una proporción aritmética.

▷ Las llamamos armónicas porque cuerdas de igual tensión y peso producen sonidos armónicos si sus longitudes están en progresión armónica.

4) Progresiones geométricas:

▷ **Definición**: decimos que la sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión geométrica, p.g., cuando su término general responde a la forma: $a_n = b \cdot r^n$, donde b, $r \in \mathbb{R}$ y ambos no son cero.

▷ Dados h, $k \in \mathbb{N}$, $h > k$, $a_h = a_k \cdot r^{h-k}$

▷ **Proposición**: dados dos términos cualesquiera de una p.g. tal que equidisten de dos extremos, su producto es igual al producto de dichos extremos.

Proof. $a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot r^k \cdot a_1 \cdot r^{n-k-1} = a_1(a_1 \cdot r^{n-1}) = a_1 \cdot a_n$

□

▷ **Proposición**: el producto de "n" términos consecutivos de una p.g. viene dado por $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Proof. $P_n^2 = a_1 \cdot a_n \cdot a_2 \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_1 = (a_1 \cdot a_n) \longrightarrow P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

□

▷ Si sumamos los "n" términos de una sucesión geométrica: $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Si hacemos: $S_n - r \cdot S_n = a_1 + \ldots + a_n - (a_1 + \ldots + a_n) \cdot r = a_1 - a_n \cdot r = a_1 - a_1 \cdot r^{n+1}$. En el caso de que $r \neq 1$ (en ese caso $a_n \equiv a_1 \forall n \in \mathbb{N}$), $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^{n+1})}{1 - r}$ y nos preguntamos qué pasa cuando $n \to \infty$:

- •) Si $r = 1 \longrightarrow S_n = n \cdot a_1 \neq 0 \longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ ($\{S_n\} \to +\infty$)
- •) Si $r = -1 \longrightarrow S_n = \{0, a_1\}$ dependiendo de si "n" es par o impar $\longrightarrow \nexists \lim_{n\to\infty}\{S_n\}$
- •) Si $|r| > 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ diverge.
- •) Si $|r| < 1 \longrightarrow \{r^n\} \to 0$ y $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-r} = b\dfrac{r}{1-r}$

Luego, $|r| < 1 \longleftrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$

▷ Definición: llamamos progresión hipergeométrica a una sucesión $\{a_n\}$ tal que el cociente de un término con el siguiente es de la forma: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha \cdot n + \beta}{\alpha \cdot n + \gamma}$ donde α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ y el denominador no se anula nunca (en particular, α y $\gamma \neq 0$).

▷ $S_n = \dfrac{a_n(\alpha \cdot n + \beta) - a_1 \cdot \gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$ siempre que el denominador no se anule.

▷ **Definición**: llamamos progresión aritmético-geométrica a una sucesión de números reales tales que su término general responde a la forma:
$a_n = (b + n \cdot d) \cdot r^n$ con b, $d \in \mathbb{R}$ no nulos ambos.
Si $d = 0$, tenemos una progresión geométrica.
Si $r = 1$, tenemos una progresión aritmética.

5) Aplicaciones:

▷ **Fracciones generatrices de decimales periódicos**:

▷ Sea el número periódico $x'abababababab... = x'\widehat{ab} = x + 0'ab + 0'00ab + \ldots =$

$$= x + \frac{ab}{100} + \frac{ab}{100^2} + \ldots = x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{ab}{100^j} = x + \frac{\frac{ab}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = x + \frac{ab}{99}$$

▷ Sea el número periódico $x'a\widehat{bc} = x'abcbcbcbcbc... = x'a + 0'0bc + 0'000bc + \ldots =$

$$= x'a + \frac{bc}{1000} + \frac{bc}{1000 \cdot 100} + \frac{bc}{1000 \cdot 100^2} \ldots = x'a + \frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{bc}{100^j} = x'a + \frac{\frac{bc}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = x'a + \frac{ab}{990}$$

▷ **Matemática comercial**:

▷ Conocemos como "interés" al beneficio que obtiene una persona o entidad cuando prestan dinero. Lo llamaremos "compuesto" cuando sumemos al capital los intereses que se producen en una unidad de tiempo determinada con lo que se generarán nuevos intereses y nuevo capital.
Sean "C" el capital y "r" el tanto por uno (lo que produce una unidad monetaria en un año). Al finalizar el primer año, tendremos $C_1 = C \cdot (1 + r)$. Al finalizar el n-ésimo año: $C_n = C \cdot (1 + r)^n$ donde $(1 + r)^n$ es el valor que nos da una unidad monetaria y su interés al cabo de "n" años. Si fueran en meses los períodos de tiempo: $C_m = C \cdot (1 + \frac{r}{12})^{12m}$ donde $m =$ número de meses.

▷ Llamaremos "anualidades de capitalización" a las cantidades que se abonan al principio de cada año para formar con ellas y su interés compuesto un determinado capital al cabo de un cierto tiempo. Supongamos "a" la anualidad fija y "C" el capital. Tras "n" años:

$$C = a \cdot (1 + r)^n + a \cdot (1 + r)^{n-1} + \ldots + a \cdot (1 + r) = a \cdot (1 + r)\Big(\overbrace{\frac{(1 + r)^n - 1}{r}}^{\text{Suma de una p.g.}}\Big).$$ Despejando:

$$a = \frac{C \cdot r}{(1 + r)((1 + r)^n - 1)}$$

▷ Llamaremos "anualidades de amortización" a las cantidades fijas que se deben pagar al finalizar con ellas y sus intereses una cierta deuda y los intereses recargados.
Si lo vemos con el interés compuesto (que es como funciona en realidad):
1) Primera anualidad: $a \cdot (1 + r)^{n-1}$
2) Segunda anualidad: $a \cdot (1 + r)^{n-2}$
$\vdots$
n) Última anualidad: a
Sumando obtenemos:

$$a(1+(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{n-1}) = \{\text{es la suma de una p.g.}\} = a\Big(\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\Big) = C\cdot(1+r)^n.$$

Luego, la cantidad de amortización ha de ser:

$$a = C \cdot r\frac{(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

▷ **Números de Fibonacci**: $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Tienen multitud de propiedades, entre ellas que: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, el número áureo.

▷ **Número** e: $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

6) Progresiones de orden superior:

▷ **Operador diferencia**: sea $f(x)$ una función real de variable real y $\forall x \in D(f(x))$ se tiene que $x + nh \in D(f(x))$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall h \equiv$ cte> 0. Llamaremos diferencia primera de $f(x)$ a la función $\triangle f$ definida por $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$, donde el símbolo $\triangle$ se llama operador diferencia y "h" es el intervalo de diferencia.

▷ Llamaremos diferencia segunda de $f(x)$ a la primera diferencia de $\triangle f$, es decir:

$$\triangle^2 f(x) = \triangle(\triangle f(x)) = \triangle f(x+h) - \triangle f(x)$$

En general, se conoce como la diferencia n-ésima de $f(x)$ a la función:

$$\triangle^n f(x) = \triangle(\triangle^{n-1} f(x)) = \triangle^{n-1} f(x+h) - \triangle^{n-1} f(x), \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \triangle^0 = f(x)$$

▷ *Nota*: para simplificar los cálculos, tomaremos $h = 1$

▷ El operador diferencia es un operador lineal

a) $\triangle(f+g) = \triangle f + \triangle g$

b) $\triangle(\lambda f) = \lambda \triangle f$

Y además se cumple que:

c) $\triangle(f \cdot g)(x) = \triangle f(x) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \triangle g(x) = \triangle f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot \triangle g(x)$

d) $\triangle(f/g)(x) = \dfrac{\triangle f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \triangle g(x)}{g(x+1) \cdot g(x)}$

Donde observamos cierto paralelismo entre el operador diferencia y el operador derivada.

▷ Podemos comprobar que se cumple la siguiente fórmula:

$$\triangle^2 f(x) = \binom{2}{0} f(x+2) - \binom{2}{1} f(x+1) + \binom{2}{2} f(x)$$

Y, en general:

$$\triangle^n f(x) = \binom{n}{0} f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \binom{n}{2} f(x+n-2) - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x)$$

▷ **Fórmula de interpolación de Newton**: operando y despejando $f(x+k)$ de cada $\triangle^k$ obtenemos que:

$$f(x+n) = \binom{n}{0} f(x) + \binom{n}{1} \triangle f(x) + \binom{n}{2} \triangle^2 f(x) + \ldots + \binom{n}{n} \triangle^n f(x)$$

que se conoce como la fórmula de interpolación de Newton.

$\triangleright$ **Definición**: llamamos progresión aritmética de orden $k \in \mathbb{N}^*$ a la sucesión de números reales que obtenemos al sustituir en un polinomio, con coeficientes reales y de grado k, valores naturales consecutivos desde un cierto número en adelante.

$\triangleright$ **Teorema**: una función entera de variable entera es un polinomio de grado $k \longleftrightarrow$ todas sus diferencias de orden $k+1$ son cero.