# TEMA 12: ESPACIOS VECTORIALES. VARIEDADES LINEALES. APLICACIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES. TEOREMA DE ISOMORFÍA

## TIEMPO: 58 — 56

## Esquema

1) Introducción
    1.1) Nacimiento: s.XVII (Descartes y Fermat)
    1.2) Definición de vector (Bellavitis y Hamilton)
    1.3) Definición de un espacio vectorial (Peano)
    1.4) Desarrollo
2 Definiciones y subespacios vectoriales
    2.1) Definición: espacio vectorial
    2.2) Definición: subespacio vectorial
        2.4.1) Intersección
        2.4.2) Suma
3) Bases de un espacio vectorial
    3.1) Definición: c.l., l.d., l.i., s.g., base
    3.2) Resultados
    3.3) Teorema: todo e.v. (finito) tiene base
    3.4) Definición: dimensión del espacio
    3.5) Teorema (de extensión)
    3.6) Cambio de base
4) Aplicaciones entre espacios vectoriales
    4.1) Definición: homomorfismo
        4.1.1) Resultados
    4.2) Definición: Ker($f$), Im($f$)
    4.3) Definición: isomorfismo
    4.4) Teorema de las dimensiones
    4.5) Factorización canónica de un homomorfismo
    4.6) Primer Teorema de Isomorfía
    4.7) Más propiedades
5) Variedades lineales de un espacio vectorial
    5.1) Definición
    5.2) Teorema

# 1) Introducción:

▷ Los espacios vectoriales se derivan de la geometría afín a través de la introducción de coordenadas en el plano o el espacio tridimensional. En el s.XVII, Descartes y Fermat fundaron las bases de la geometría analítica mediante la vinculación de las soluciones de una ecuación con dos variables a la determinación de una curva plana. Para lograr una solución geométrica sin usar coordenadas, Bolzano introdujo ciertas operaciones sobre puntos, rectas,... predecesoras de los vectores. El origen de la definición de los vectores se la debemos a Giusto Bellavitis y su bipoint, que es un segmento orientado, uno de cuyos extremos es el origen y el otro el objetivo. Hamilton, el creador de los cuaterniones, fue el que inventó el nombre de vector.

▷ Grossmann, en el s.XIX, previó conjuntos de objetos abstractos dotados de operaciones (él va más allá y tiene en cuenta una multiplicación interna también). El matemático Peano dio la primera definición moderna de un espacio vectorial a finales del s.XIX.

▷ Un desarrollo importante de los espacios vectoriales se debe a la construcción de funciones por Lebesgue. Esto, más tarde, sería formalizado por Banach y Hilbert. En ese tiempo se hicieron los primeros estudios sobre espacios vectoriales de dimensión infinita.

# 2)Definiciones y subespacios vectoriales:

▷ **Definición**: dado un cuerpo $\mathbb{K}$ definimos un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ a $(V, +, \cdot)$ donde $V$ es un conjunto no vacío y a sus elementos los llamaremos vectores. Además dotamos a $V$ de dos operaciones internas: "+" (asociativa, conmutativa, con elemento neutro y elemento opuesto) y otra externa: "·" (distributiva, asociativa mixta y con elemento neutro).

▷ **Definición**: sea $(V, +, \cdot)$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y consideramos $T \subset V$. Decimos que $(T, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $V$ si es cerrado para las operaciones de $V$ y con ellas tiene estructura de espacio vectorial. Esto es equivalente a probar que: $\emptyset \neq T$ es subespacio $\longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\, a, b \in T$, $\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in T$.

▷ Los subespacios impropios son $(V, +, \cdot)$ y $(0, +, \cdot)$. El resto, de existir, son subespacios propios.

▷ **Definición**: dados $T_1$ y $T_2$ subespacios vectoriales de $V$, definimos la intersección de ambos subespacios como la intersección conjuntista de ambos: $T_1 \cap T_2$ (que es un subespacio vectorial).

▷ **Definición**: dados $T_1$ y $T_2$ subespacios vectoriales de $V$, definimos la suma de ambos subespacios como: $T_1 + T_2 = \{v \in V \text{ tal que } v = a + b \text{ con } a \in T_1,\, b \in T_2\}$ (que es un subespacio vectorial).

▷ Las dos operaciones anteriores cumplen que $T_1 \cap (T_1 + T_2) = T_1 = T_1 + (T_1 \cap T_2)$, con lo que el conjunto de todos los subespacios vectoriales $(W, +, \cdot)$ es un retículo.

▷ Si tenemos que $T_1 \cap T_2 = \{0_V\}$, entonces todo elemento del subespacio suma $T_1 + T_2$ se puede escribir de manera única como: $v = a + b$, donde $a \in T_1$, $b \in T_2$ y son únicos.

# 3) Bases de un espacio vectorial:

▷ **Definición**: sea $(V, +, \cdot)$ un e.v. y consideramos $\{b_1, \ldots, b_n\}$, "n" elementos de $V$. Llamaremos combinación lineal de los mismos a otro elemento $b \in V$ que se obtiene mediante la suma de los $b_j$ operados externamente con escalares: $b = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot b_j$

▷ **Definición**: dados $\{b_1, \ldots, b_j\} \in (V, +, \cdot)$ decimos que son linealmente dependientes si podemos obtener una combinación lineal de ellos igualada al vector cero sin que todos los escalares sean cero. Equivalentemente, los vectores son linealmente dependientes si al menos uno de ellos es combinación lineal de los restantes. En caso contrario diremos que son linealmente independientes.

▷ **Definición**: llamaremos sistema de generadores de un e.v. a un conjunto de elementos del mismo de tal forma que cualquier otro elemento sea combinación lineal de éstos. Si un espacio posee un sistema de generadores finito, diremos que es un e.v. finito.

▷ **Teorema**: sea un conjunto de elementos de $V$, $C = \{b_1, \ldots, b_m\}$. El conjunto de todas sus combinaciones lineales es un subespacio vectorial de $(V, +, \cdot)$.

▷ **Teorema**: consideramos $C = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset V$, tal que son l.i. Entonces, si un vector $b \in V$ es combinación lineal de ellos, ésta es única.

▷ **Teorema**: sean $\{b_1, \ldots, b_m\}$ un sistema de generadores de $V$ que son l.d. Entonces existe al menos uno de los "$b_j$" tal que los $m - 1$ restantes siguen siendo un sistema generador.

▷ **Definición**: llamaremos base de un e.v. a un conjunto de elementos del mismo que cumplen dos condiciones: son l.i. y forman un sistema generador de $(V, +, \cdot)$.

▷ **Teorema**: todo espacio vectorial finito posee una base.

▷ **Teorema**: sea una base de $(V, +, \cdot)$, $\mathbb{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Entonces:

1) El máximo número de elementos linealmente independientes es "$m$".
2) El mínimo número de elementos de $V$ que forman un sistema generador es "$m$".

▷ **Corolario**: todas las bases de un espacio vectorial tienen igual número de elementos. A dicho número lo llamaremos dimensión del espacio y lo notaremos por $\dim(V) = m$.

▷ **Teorema**: sea $(V, +, \cdot)$ con $\dim(V) = n$. Entonces $\mathbb{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es base $\longleftrightarrow b_1, \ldots, b_n$ son l.i. o un s.g.

$\triangleright$ **Teorema (de extensión)**: sean $\mathbb{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ base de $V$, $W = \{w_1, \ldots, w_k\} \subset V$ conjunto l.i. con $k < n$. Entonces $\exists w_{k+1}, \ldots, w_n$ tales que $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de $(V, +, \cdot)$.

$\triangleright$ Cambio de base: sean $b \in V$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ base de $V$ y $\{\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_n\}$ base de $V$.
Por un lado: $b = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \beta \cdot \widehat{b}_j$.
Por otro lado: $\widehat{b}_1 = \gamma_{11} \cdot b_1 + \ldots + \gamma_{1n} \cdot b_n$, ..., $\widehat{b}_n = \gamma_{1n} \cdot b_1 + \ldots + \gamma_{nn} \cdot b_n$.
Entonces se cumple la siguiente relación: $(\alpha_1,...,\alpha_n) = (\beta_1,...,\beta_n)\cdot A$ donde $A$ es una matriz cuadrada de orden "$n$" que se llama matriz de cambio de base y cuyas filas son las componentes de los vectores de la base $\{\widehat{b}_1,\ldots, \widehat{b}_n\}$ respecto de la base $\{b_1,\ldots ,b_n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} f(\widehat{b}_1) \\ \vdots \\ f(\widehat{b}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

# 4) Aplicaciones entre espacios vectoriales:

▷ Sean $(V, +, \cdot)$ y $(\widehat{V}, +, \cdot)$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ conmutativo.

▷ **Definición**: decimos que una aplicación $f : V \longmapsto \widehat{V}$ es un homomorfismo o aplicación lineal si cumple dos condiciones:

1) $\forall a, b \in V,\ f(a+b) = f(a) + f(b)$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall b \in V,\ f(\alpha \cdot b) = \alpha f(b)$

Equivalentemente, juntando ambas condiciones: $f$ homomorfismo si $\forall a, b \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple que $f(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$

▷ **Teorema**: sea $f : V \longmapsto \widehat{V}$ homomorfismo. Entonces se cumple:

1) Dado $W \subset V$ subespacio vectorial, entonces $f(W) \subset \widehat{V}$ es subespacio vectorial.

2) Dado $\widehat{W} \subset \widehat{V}$ subespacio vectorial, entonces $f^{-1}(\widehat{W}) \subset V$ es subespacio vectorial.

▷ **Teorema**: sea $f : V \longmapsto \widehat{V}$ homomorfismo. Entonces se cumple:

1) Si $T \subset V$ es sistema generador $\Longrightarrow f(T)$ es sistema generador de $f(V)$.

2) Si $\{b_1, \ldots, b_n\}$ son l.d. $\Longrightarrow f(\{b_1, \ldots, b_n\})$ también son l.d.

3) Si $T \subset V$ es tal que $f(T)$ es l.i. $\Longrightarrow T$ es l.i. en $V$.

▷ **Definición**: llamamos núcleo del homomorfismo al conjunto de elementos de $V$ que tienen por imagen el neutro de $\widehat{V}$.

$$N(f) = \mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \text{ tq } f(x) = 0_{\widehat{V}}\}$$

▷ **Definición**: llamamos imagen del homomorfismo al conjunto siguiente: dado $f : V \longmapsto \widehat{V}$ homomorfismo, entonces:

$$Im(f) = \{f(x) \in \widehat{V} \text{ tq } x \in V\}$$

▷ **Teorema**: sea $f : (V, +, \cdot) \longmapsto (\widehat{V}, +, \cdot)$ homomorfismo. El conjunto $\mathrm{Ker}(f) \subset V$ es un subespacio vectorial y también $f(V) \subset \widehat{V}$ es subespacio vectorial.

▷ **Definición**: decimos que un homomorfismo es monomorfismo cuando la aplicación es inyectiva ($f(x) \neq f(y) \longleftrightarrow x \neq y$). Caracterización: "$f$" monomorfismo $\longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$.

▷ **Definición**: decimos que un homomorfismo es un epimorfismo cuando la aplicación es sobreyectiva (o suprayectiva), es decir: $\forall \widehat{v} \in \widehat{V}, \exists v \in V$ tq $f(v) = \widehat{v}$. Caracterización: "$f$" epimorfismo $\longleftrightarrow f(V) = \widehat{V}$.

▷ **Definición**: decimos que un homomorfismo es un isomorfismo cuando la aplicación es biyectiva, es decir: inyectiva y sobreyectiva.

▷ **Teorema**: si $f :(V, +, \cdot) \longmapsto (\widehat{V}, +, \cdot)$ es un isomorfismo, también lo es su aplicación inversa $f^{-1} :(V, +, \cdot) \longmapsto (\widehat{V}, +, \cdot)$.

▷ La composición de dos homomorfismos es homomorfismo. La composición de dos isomorfismos es isomorfismo. Si tenemos $f :(V, +, \cdot) \longmapsto (V, +, \cdot)$, diremos que es un endomorfismo. Si es biyectivo (Es decir, "$f$" isomorfismo), diremos que "$f$" es un automorfismo.

▷ **Teorema de las dimensiones**: sea $f :(V, +, \cdot) \longmapsto (\widehat{V}, +, \cdot)$ un homomorfismo tal que cumple que $\dim(\mathrm{Im}(f))$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) < \infty$. Entonces, se verifica:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

*Dem.* Tomamos $\{b_1, \ldots, b_r\}$ base de $\mathrm{Ker}(f) < V$ que es un subespacio y $\{\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_k\}$ base de $\mathrm{Im}(f) < \widehat{V}$ subespacio vectorial. Entonces, $\{a_1, \ldots, a_k\} \in V$ tal que $f(a_j) = \widehat{b}_j$, $j = 1, \ldots, k$.
Sólo hace falta ver que $\{b_1, \ldots, b_r, a_1, \ldots, a_k\}$ es una base de $V$.
Se comprueba que es un sistema de generadores + linealmente independientes.

□

▷ **Teorema**: dada una base $\{b_1, \ldots, b_m\} = B$ de $V$ y dados $\{\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_m\}$ elementos de $\widehat{V}$, existe un único homomorfismo tal que $f(b_j) = \widehat{b}_j$. En este caso:

a) "$f$" monomorfismo $\longleftrightarrow$ $\{\widehat{b}_j\}_{j=1,\ldots,m}$ son linealmente independientes.

b) "$f$" epimorfismo $\longleftrightarrow$ $\{\widehat{b}_j\}_{j=1,\ldots,m}$ son sistema generador de $\widehat{V}$

▷ **Corolario**: $(V, +, \cdot)$ es isomorfo a $(\widehat{V}, +, \cdot)$ $\longleftrightarrow$ tienen la misma dimensión.

▷ Factorización canónica de un homomorfismo: sea $f :(V, +, \cdot) \longmapsto (\widehat{V}, +, \cdot)$ homomorfismo. Definamos la siguiente relación de equivalencia: $\forall a, b \in V$, $aRb \longleftrightarrow f(a) = f(b)$, que se comprueba que es de equivalencia.
Consideramos $V/R$ ($< V$ subespacio vectorial) el conjunto cociente de las clases de equivalencia y definamos la proyección: $p :(V, +, \cdot) \longmapsto (V/R, +, \cdot)$, $p(v) = [v]$ que es un epimorfismo.
Definimos ahora $h :(V/R, +, \cdot) \longmapsto (\mathrm{Im}(f), +, \cdot)$ como $[v] \mapsto h([v]) = f(v) = \widehat{v}$ que es un isomorfismo.
Por último, consideramos la inclusión canónica: $i :(\mathrm{Im}(f), +, \cdot) \longmapsto (\widehat{V}, +, \cdot)$ dada por $i(\widehat{v}) = \widehat{v}$, que es claramente un epimorfismo.
Tenemos, pues, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (V,+,\cdot) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (\widehat{V},+,\cdot) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ (V/R,+,\cdot) & \xrightarrow{\quad h \quad} & (\mathrm{Im}(f),+,\cdot) \end{array}$$

Luego, tenemos $f = i \circ h \circ p$ y a esta descomposición de nuestro homomorfismo la conocemos como factorización canónica del homomorfismo "$f$".

▷ En el caso particular de que tomemos $aRb \longleftrightarrow a - b \in H$ con $H < V$ subespacio y elegimos $H \equiv \mathrm{Ker}(f)$, obtenemos el Primer Teorema de Isomorfía.

▷ **Teorema de Isomorfía**: sea $f$ :$(V,\ +,\ \cdot) \longmapsto (\widehat{V},\ +,\ \cdot)$ un homomorfismo. La aplicación $h$ :$(V/\mathrm{Ker}(f),\ +,\ \cdot) \longmapsto (\mathrm{Im}(f),\ +,\ \cdot)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

▷ El conjunto $(Hom(V;\widehat{V}),\ +,\ \cdot)$ es un espacio vectorial.

▷ Los espacios $(Hom(V;\widehat{V}),\ +,\ \cdot)$ y $(M_{n\times p},\ +,\ \cdot)$ (donde $n = \dim(V)$, $p = \dim(\widehat{V})$) son isomorfos.

▷ El conjunto $(End(V),\ +,\ \cdot,\ \circ)$ tiene estructura de álgebra.

▷ Si tenemos un automorfismo, podemos definir su opuesto/inverso y esto nos dice que $(Aut(V),\ +,\ \cdot,\ \circ)$ es un grupo (y lo llamaremos Grupo Lineal).

▷ Una matriz cuadrada tendrá inversa $\longleftrightarrow$ el homomorfismo asociado es un automorfismo.

# 5) Variedades lineales de un espacio vectorial:

▷ **<u>Definición</u>**: sean $S < V$ subespacio vectorial, $a \in V$ un vector. Llamaremos <u>variedad lineal</u> de $V$ al conjunto de todos los vectores obtenidos como suma del vector "$a$" y cada uno de los vectores de $S$. A dicho subespacio lo llamaremos <u>subespacio director</u> de la variedad lineal y al vector "$a$" como <u>vector de posición</u> de $a + S$, donde:

$$a + S = \{b \in V \text{ tal que } b = a + s \text{ con } s \in S\}$$

▷ Todo subespacio vectorial es variedad pero no toda variedad es subespacio. Además, si se cumple que la $\dim(S) < \infty$, llamaremos <u>dimensión de la variedad</u> a la dimensión de $S$.

▷ **<u>Teorema</u>**: dos variedades lineales $a + S$, $h + H$ son iguales $\longleftrightarrow$ ocurre que $S = H$ y además que $a - h \in S$ (o $H$).