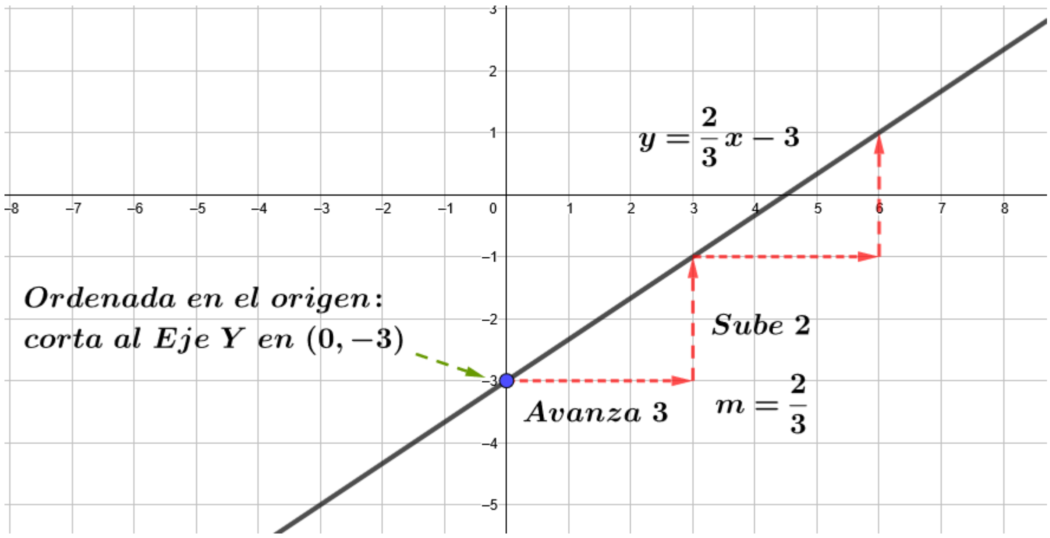
LA FUNCIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN AFÍN

Las gráficas de ambas son **rectas.** La **expresión** de la función afín es $y = mx + n$, donde m es la **pendiente**, que es un número que representa la inclinación de la recta, e indica el número de unidades que aumenta o disminuye la recta en el eje Y al aumentar una unidad en el eje X y n es la **ordenada en el origen**, que representa el punto de corte de la recta con el eje Y, es decir, la recta pasa por el punto $(0, n)$.

La **expresión** de la función lineal es $y = mx$, es decir, es como la función afín pero todas las lineales pasan por $(0,0)$.

Para **representarlas** lo más cómodo es hacer una tabla de valores, y basta con dos puntos dado que son rectas.



Para hallar la ecuación se presentan 3 casos:

1.- Nos dan m y n: sencillísimo, es simplemente sustituirlas en $y = mx + n$.

Ejemplo: hallar la ecuación de la función afín (recta) con $m = \frac{2}{3}$ y $n = -5$. Es $y = \frac{2}{3}x - 5$.

2.- Nos dan la pendiente m y un punto $A(x_A, y_A)$: en la ecuación $y = mx + n$ sustituimos m y las coordenadas del punto y despejamos n.

Ejemplo: hallar la ecuación de la función afín (recta) con $m = \frac{2}{3}$ y que pasa por $A(5,-2)$. Hacemos: $-2 = \frac{2}{3} \cdot 5 + n$ y despejamos n, que da $n = -\frac{16}{3}$, así que la ecuación es $y = \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}$, que también se puede escribir $y = \frac{2x - 16}{3}$.

3.- Nos dan dos puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$: primero hallamos la pendiente con $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$ y, una vez hallada, estamos en la situación anterior, con esa pendiente y uno de los puntos, los sustituimos en $y = mx + n$ y despejamos n.

Un método alternativo es sustituir las coordenadas del punto A y del punto B y obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, m y n.

Ejemplo: hallar la ecuación de la función afín (recta) que pasa por $A(5,-2)$ y $B(9,0)$. Primero hallamos $m = \frac{0 - (-2)}{9 - 5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ahora con $m = \frac{1}{2}$ y $B(9,0)$, sustituimos $0 = \frac{1}{2} \cdot 9 + n$ y despejamos $n = -\frac{9}{2}$. La ecuación es $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$.

Otra forma es sustituir las coordenadas de $A(5,-2)$ y obtengo $-2 = m \cdot 5 + n$ y sustituir las coordenadas de $B(9,0)$ y obtengo $0 = m \cdot 9 + n$ y resolver el sistema lineal formado por esas dos ecuaciones: $\begin{cases} 5m + n = -2 \\ 9m + n = 0 \end{cases}$ El método más sencillo es reducción, multiplicando una de ellas por -1.

Aplicaciones de la función afín

En problemas donde hay una parte fija y una parte variable donde se pueda aplicar la función afín, dicha función se construye así: **la parte variable será *m* y la parte fija será *n***. Aquí hay que tener en cuenta que se tienen que cumplir la condición de que la parte variable exprese una relación de proporcionalidad.

Por ejemplo, si nos dicen que un electricista cobra 80 € fijos por desplazamiento más 30 € por hora trabajada, la función afín es $y = 30x + 80$, donde y es el dinero que va a cobrar por la reparación y x es el tiempo que dura dicha reparación.

A veces los problemas nos dan dos situaciones, y nos piden que saquemos la expresión (la "fórmula") de la función afín. Por ejemplo:

Un electricista cobra en su factura gasto de desplazamiento más una cantidad por hora de trabajo. Si por cierta reparación que duró tres horas te cobró 105 €, y por otra en la que estuvo cinco horas trabajando nos cobró 155 €, halla la cantidad que nos cobra por desplazamiento y la cantidad que cobra por cada hora trabajada, y escribe la ecuación de la función que relaciona el tiempo con el precio que se nos cobra.

Aquí realmente nos están dando dos puntos, es decir, que cuando $x = 3$ entonces $y = 105$ y que cuando $x = 5$ entonces $y = 155$. Entonces podemos calcular m con la fórmula y n sustituyendo la m que hemos obtenido y uno de los puntos. En este caso concreto daría:

$m = \frac{155 - 105}{5 - 3} = \frac{50}{2} = 25$ €/h. Usando $x = 5$, $y = 155$ tenemos $155 = 25 \cdot 5 + n$ y despejando $n = 30$.

Otro problema muy frecuente es que nos piden comparar dos ofertas según las condiciones de cada una, por ejemplo:

Una fontanera de emergencias cobra 26 € fijos de gasto por desplazamiento, y 12 € por cada hora de trabajo. Otro fontanero cobra 20 € fijos por desplazamiento y 14 € por cada hora de trabajo.
Sabiendo esto, se pide:
(a) Las ecuaciones de las funciones que relacionan el tiempo (en horas) que dedica la fontanera y el fontanero a la reparación con el coste (€).
(b) Cuál es la mejor tarifa para una reparación que dura 4 horas.
(c) Razonar cuál es la mejor tarifa, según cuántas horas dure la reparación.

Las fórmulas es fácil obtenerlas: $y = 12x + 26$ para la fontanera, $y = 14x + 20$ para el fontanero.
Para 4 horas, sustituimos $x = 4$ en ambas y la que dé menor y es la mejor (para nosotros). En este caso, la mejor es 74 que nos cobraría la fontanera frente a 76 que nos cobraría el fontanero.

Para comparar las ofertas planteamos un sistema, que resolvemos por igualación. La solución no dice cuándo las ofertas son iguales, y de ahí deducimos cuándo es mejor cada una. En nuestro ejemplo las ofertas son iguales para $x = 3$ horas, que ambos nos cobran 62 €. Si la reparación dura menos de 3 horas será más rentable el fontanero y si dura más de 3 hora será más rentable la fontanera.

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Su **expresión** general es $y = ax^2 + bx + c$. Su gráfica se denomina **parábola**.

Su orientación depende únicamente del signo de a :

Si $a > 0$ (positivo) tendrá las ramas hacia arriba, y se denomina convexa.
Si $a < 0$ (negativo) tendrá las ramas hacia abajo, y se denomina cóncava.

El **vértice** de la parábola se calcula primero determinando su coordenada $x_v = \frac{-b}{2a}$.

La coordenada y_v se calcula sustituyendo el valor de x_v en la expresión de la función.

Todas las parábolas tienen un **eje de simetría**, que es una recta vertical que pasa justo por el vértice, cuya ecuación es $x = \frac{-b}{2a}$.

Los **puntos de corte** se calculan de la siguiente manera:

El punto de corte con el Eje Y se calcula sustituyendo $x = 0$ en la expresión de la función, y se obtiene el punto $(0, c)$.

Los puntos de corte con el Eje X se calculan resolviendo la ecuación que se obtiene al hacer $y = 0$: $ax^2 + bx + c = 0$. Recuerda que pueden salir dos soluciones distintas, una solución doble o no tener solución real, por lo tanto podemos obtener dos puntos de corte con el **Eje** X **,** uno o ninguno. Si las soluciones son x_1 y x_2 , los puntos son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

Por último hacemos una **tabla de valores** para completar la gráfica.

Ejemplo resuelto: representar la función $y = -x^2 + 2x + 3$.

Primero sacamos los coeficientes, como hacíamos en la ecuación de segundo grado: $a = -1$, $b = +2$ $c = +3$. Como $a = -1$, es negativo (matemáticamente se pone $a < 0$, que significa *a* menor que cero) entonces la parábola tendrá las ramas hacia abajo, y se denomina cóncava.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(+2)}{2 \cdot (-1)} = +1$$

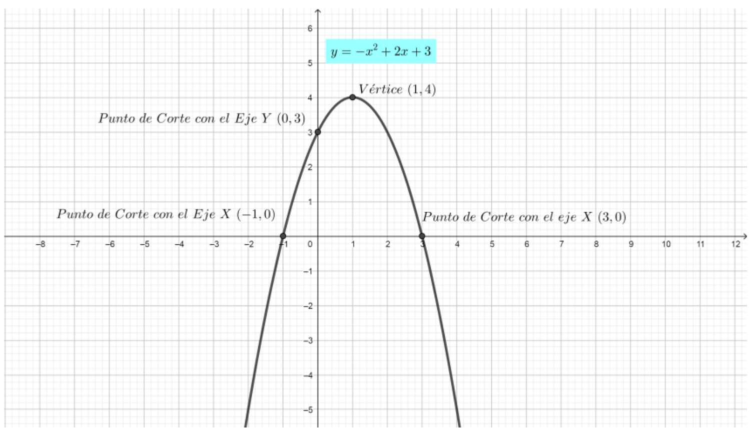
La coordenada y_v se calcula sustituyendo el valor de x_v en la expresión de la función del enunciado: $y_v = -(+1)^2 + 2 \cdot (+1) + 3 = +4$ ¡Ojo con el signo menos del cuadrado que va fuera del paréntesis!

El punto de corte con el Eje Y se calcula sustituyendo $x = 0$ en la expresión de la función, y se obtiene el punto $-(0)^2 + 2 \cdot (0) + 3 = 3 \rightarrow \text{Punto}(0,3)$.

Los puntos de corte con el Eje X se calculan resolviendo la ecuación que se obtiene al hacer $y = 0$: $-x^2 + 2x + 3 = 0$. Soluciones: $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$, por lo que los puntos son $(-1,0)$ y $(3,0)$.

Hacemos por último una **tabla de valores** con valores de *x* cercanos al vértice para perfilar mejor la función.

x	$y = -x^2 + 2x + 3$
-2	$-(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 3 = -5$
2	$-(2)^2 + 2 \cdot (2) + 3 = 3$
4	$-(4)^2 + 2 \cdot (4) + 3 = -5$



Ejemplo resuelto: representar la función $y = 2x^2 + 8x + 6$.

Primero sacamos los coeficientes, como hacíamos en la ecuación de segundo grado: $a = 2$, $b = +8$ $c = +6$. Como $a = 2$, es positivo (matemáticamente se pone $a > 0$) entonces la parábola tendrá las ramas hacia arriba, y se denomina convexa. Para el vértice primero usamos la fórmula de x_v:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(+8)}{2\cdot 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

La coordenada y_v se calcula sustituyendo el valor de x_v en la expresión de la función del enunciado: $y_v = 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 6 = -2$. Así que el vértice está en el punto $V(-2,-2)$.

Asegúrate de que introduces en la calculadora exactamente esa expresión, ¡ojo a la posición de los signos y los paréntesis que es importante!

El punto de corte con el Eje Y se calcula sustituyendo $x = 0$ en la expresión de la función, y se obtiene el punto $(0,6)$.

Los puntos de corte con el Eje X se calculan resolviendo la ecuación que se obtiene al hacer $y = 0$: $2x^2 + 8x + 6 = 0$. Obtenemos las soluciones $x_1 = -3$ y $x_2 = -1$, por lo que los puntos son $(-3,0)$ y $(-1,0)$.

Hacemos por último una **tabla de valores** con valores de *x* cercanos al vértice para perfilar mejor la función. En este caso como la parábola es bastante picuda solo damos un valor porque enseguida coge valores demasiado grandes para dibujarlos.

x	$y = 2x^2 + 8x + 6$
-4	$2\cdot(-4)^2 + 8\cdot(-4) + 6 = +6$