TEMA 8: GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Vectores

Para conocer algunas magnitudes físicas (velocidad, aceleración, fuerza, …) no es suficiente con medir su valor numérico, sino también la dirección y el sentido de las mismas. Estas magnitudes físicas se denominan magnitudes vectoriales y se determinan mediante vectores.

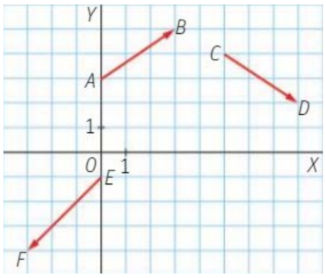
Un vector fijo del plano queda determinado por un par de puntos del plano dados en un orden. El primer punto, A, se denomina origen del vector y el segundo, B, extremo del vector. Se representan geométricamente mediante una flecha que va desde el origen A hasta el extremo B y se designan $\overrightarrow{AB}$.

En un vector debemos distinguir los siguientes elementos:

- El **módulo**, que es la longitud del vector y se representa $|\overrightarrow{AB}|$.
- La **dirección**, que es la de la recta que contiene a A y B, y todas sus paralelas.
- El **sentido**, que es del origen al extremo. Una misma dirección tiene dos sentidos.

Si tomamos como sistema de referencia los ejes cartesianos del plano, podemos representar analíticamente un vector a partir de las coordenadas del par de puntos que lo determinan. Es decir si los puntos son $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ serán $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Ej. 1: Veamos cuáles son las coordenadas de los vectores representados:



$$\overrightarrow{AB} = (3 - 0{,}5 - 3) = (3{,}2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (8 - 5{,}2 - 4) = (3, -2)$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(-3 - 0, -4 - (-1)\right) = (-3, -3)$$

Si os dais cuenta, es muy similar al proceso para hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos.

Vamos a aprovechar este ejemplo para calcular el módulo, es decir la longitud del vector. Cuando se trabaja con magnitudes físicas, por ejemplo con el vector fuerza, el módulo es el valor numérico de dicha magnitud. En el dibujo se observa, que el vector coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen como longitud el valor absoluto de las coordenadas del vector. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras tendremos:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \qquad |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

A partir de ahora vamos a considerar vectores libres en el plano, eso quiere decir que solamente vamos a considerar sus coordenadas, independientemente de su orígenes y extremos.

2. Operaciones con vectores

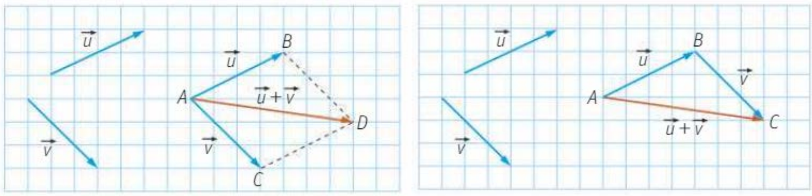
- Suma y resta: Basta con sumar o restar las coordenadas de los vectores.

Ej. 1: Consideremos los vectores $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (3,-3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (4,2) + (3,-3) = (7,-1)$$

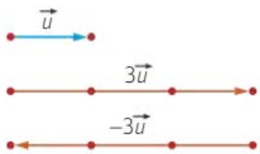
$$\vec{u} - \vec{v} = (4,2) - (3,-3) = (1,5)$$

Gráficamente la suma de vectores se puede hacer de dos formas:



Para la resta se procede igual pero cambiando el vector $\vec{v}$ por $-\vec{v}$.

- Multiplicación por un número: Al multiplicar un vector por un número, lo que hacemos es cambiar su longitud y, en el caso de que multipliquemos por un número negativo, también su sentido.



Ej. 1: Si consideramos $\vec{u} = (4,2)$, tendremos $2\vec{u} = (8,4)$.

- Combinación lineal de vectores: Consiste en la suma de vectores multiplicados por números, que pueden ser positivos o negativos.

Ej. 1: $5\vec{u} + 4\vec{v} = 5(4,2) + 4(3,-3) = (20,10) + (12,-12) = (32,-2)$

Ej. 2: $6\vec{u} - 2\vec{v} = 6(4,2) - 2(3,-3) = (24,12) - (6,-6) = (18,18)$

Ej. 3: Hallar b para que el vector $\vec{w} = (20,-8)$ se pueda poner como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la siguiente forma:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + b\vec{u}$$

Sustituyendo los vectores por sus coordenadas, queda:

$$(20,-8) = 2(4,2) + b(3,-3) = (8,4) + (3b,-3b) = (8+3b, 4-3b)$$

Para que se cumpla la igualdad tendrá que ser $b = 4$.

3. Punto medio de un segmento.

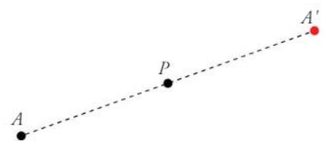
Consideremos los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. El punto medio del segmento que une ambos puntos, tiene por coordenadas:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Es decir, es la media de las coordenadas de los dos puntos, como es lógico.

Ej. 1: El punto medio entre $A(1,5)$ y $B(3,3)$ es $M(2,4)$.

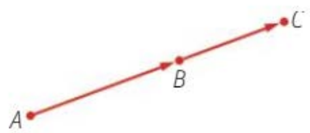
Ej. 2: Si queremos calcular el punto simétrico de $A(3,5)$ respecto de $P(6,8)$, que será el punto $A'(x,y)$ (el que está a igual distancia pero en el lado opuesto), solamente debemos tener en cuenta que P es el punto medio del segmento que va de A a A':



$$(6,8) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) \rightarrow x = 9 \;\; y = 11 \rightarrow A'(9,11)$$

4. Puntos alineados.

Para saber si tres puntos A, B y C están alineados, es decir, si pertenecen a una misma recta, lo único que tenemos que hacer es formar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y ver si son proporcionales. En caso afirmativo, estarán alineados.



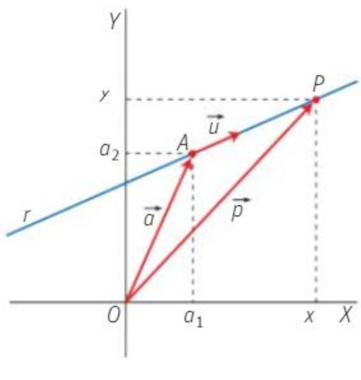
Ej. 1: Sean los puntos $A(1,3), B(5,1), C(13,-3)$ y $D(8,2)$

Como $\overrightarrow{AB} = (4,-2)$ y $\overrightarrow{BC} = (8,-4)$ que son proporcionales (las coordenadas de uno son el doble que las del otro), A, B y C están alineados.

Como $\overrightarrow{AB} = (4,-2)$ y $\overrightarrow{BD} = (3,1)$ y $\frac{4}{3} \neq \frac{-2}{1}$, no son proporcionales y por tanto A, B y D no están alineados.

5. Ecuaciones de la recta.

Fijémonos en la siguiente gráfica:



Para llegar a un punto $P(x,y)$ de la recta r, podemos ir por dos caminos:

- El primero va desde $O(0,0)$ hasta $A(a_1,a_2)$ y luego desde A hasta P. Es decir, sumando los vectores $\vec{a} = (a_1,a_2)$ (vector de posición del punto A) y $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$, donde $\vec{u}$ es un vector de longitud 1 (vector unitario) con la misma dirección que la recta y t es el número adecuado que hace que $t\vec{u}$ llegue hasta P. Observad, que si P estuviera a la izquierda de A, t sería un número negativo.

- El segundo es el camino que va directamente de O hasta P, es decir, el vector $\vec{p} = (x, y)$ (vector de posición del punto P.

Tenemos entonces que: $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$.

El vector que nos da la dirección de la recta no es necesario que sea unitario, así que, a partir de ahora lo designaremos por $\vec{d}$ y le llamaremos vector de dirección de la recta. De esta forma tendremos:

- **Ecuación vectorial:**

$$\boxed{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}}$$

- **Ecuaciones paramétricas:** Si sustituimos en la expresión anterior los vectores por sus coordenadas, tendremos que $(x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) = (a_1 + td_1, a_2 + td_2)$. Si ahora igualamos coordenada a coordenada llegamos a las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases}}$$

- **Ecuación continua:** Si despejamos t de cada una de las ecuaciones anteriores tendremos:

$$t = \frac{x - a_1}{d_1} \qquad t = \frac{y - a_2}{d_2}$$

Por tanto, si ahora igualamos ambas expresiones, llegamos a la ecuación continua de la recta:

$$\boxed{\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2}}$$

- **Ecuación implícita o general:** Si hacemos el producto en cruz en la ecuación anterior tendremos:

$$d_2(x - a_1) = d_1(y - a_2)$$

Quitando paréntesis, pasando todo a la izquierda y operando llegamos a la ecuación implícita o general de la recta:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

- **Ecuación explícita:** Despejando la y de la ecuación anterior llegamos a la, ya conocida, ecuación explícita de la recta:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Veamos todo esto con un ejemplo y veréis que es muy fácil.

Ej. 1: Sea una recta que pasa por el punto $(2,5)$ y tiene como vector de dirección $\vec{d} = (3, -4)$.

Sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$$

Su ecuación continua será:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{-4}$$

Fijaros que arriba se restan las coordenadas del punto que conocemos de la recta y abajo se ponen las coordenadas del vector de dirección.

Si ahora multiplicamos en cruz y pasamos todo a la izquierda, llegaremos a la ecuación implícita o general de la recta:

$$-4(x-2) = 3(y-5)$$

$$-4x + 8 = 3y - 15$$

$$-4x + 8 - 3y + 15 = 0$$

$$-4x - 3y + 23 = 0$$

Es bastante común expresar la ecuación general de forma que el coeficiente de la x sea positivo, así que, cambiando el signo de todos los términos de la ecuación anterior nos quedará:

$$4x + 3y - 23 = 0$$

Finalmente, si ahora despejamos la y, llegamos a la ecuación explícita:

$$3y = -4x + 23$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}$$

6. Aspectos a tener en cuenta para resolver ejercicios sobre rectas.

- Si conocemos el vector de dirección de la recta $\vec{d} = (d_1, d_2)$, su pendiente será $m = \frac{d_2}{d_1}$.

- Si conocemos la pendiente m de la recta, teniendo en cuenta lo anterior, su vector de dirección será $\vec{d} = (1, m)$.

- Si conocemos un vector de dirección de la recta, también nos vale como vector de dirección cualquier otro paralelo a él, es decir proporcional.

- En ocasiones, en lugar de darnos un punto de la recta y su vector de dirección, nos dan dos puntos de la recta. En estos casos, podemos tomar como vector de dirección el que une los dos puntos, o cualquier otro paralelo (proporcional).

7. Rectas, paralelismo y perpendicularidad.

Dos rectas son paralelas si sus vectores de dirección son proporcionales, es decir, tienen la misma pendiente, y no tienen ningún punto en común, pues en ese caso sería la misma recta.

Para saber si dos rectas son perpendiculares debemos tener en cuenta que si el vector de dirección de una es (d_1, d_2), el de una recta perpendicular sería $(-d_2, d_1)$, o cualquier otro proporcional. En definitiva, para obtener un vector perpendicular a otro, lo que tenemos que hacer es intercambiar las coordenadas y cambiarle el signo a una de ellas (la que queramos). Teniendo en cuenta esto, si la pendiente de una recta es m, la de otra recta perpendicular será $-\frac{1}{m}$.

Es muy útil saber que en la expresión $ax + by + c = 0$, el vector (a, b) es perpendicular a dicha recta.

Ej. 1: Si una recta tiene vector de dirección $(3,4)$, otra recta perpendicular a ella tendrá vector de dirección $(-4,3)$ o $(4, -3)$ o cualquier otro proporcional, como $(-8,3)$.

Ej. 2: Si una recta tiene pendiente 7, la recta perpendicular tendrá pendiente $-\frac{1}{7}$.

8. Posiciones relativas de dos rectas.

Para saber cuál es la posición relativa entre dos rectas debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Si tienen la misma pendiente serán paralelas (si no tienen ningún punto en común) o coincidentes (son la misma recta).

- Si tienen distinta pendiente serán secantes. El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

Ej. 1: Consideremos las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 + 7t \end{cases} \qquad s: 14x + 4y - 5 = 0$$

Tenemos que $\overrightarrow{d_r} = (-2,7)$ o lo que es lo mismo, su pendiente es $m_r = -\frac{7}{2}$.

Por otro lado, despejando en la ecuación de s, llegamos a $y = -\frac{14}{4}x + \frac{5}{4}$, con lo que su pendiente es $m_s = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$. Como tienen la misma pendiente, serán paralelas o coincidentes. Para ver, en cuál de los dos casos estamos, tomamos el punto $(3,5)$ de r y lo sustituimos en la ecuación de s:

$$14 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 5 = 57 \neq 0$$

Como no verifica la ecuación, no pertenece a s y por tanto serán paralelas.

Ej. 2: Consideremos ahora las siguientes rectas:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} \qquad s: y = 2x + 1$$

El vector de dirección de r es $\overrightarrow{d_r} = (2,5)$ y por tanto su pendiente es $m_r = \frac{5}{2}$. Como la pendiente de s es $m_s = 2$, serán secantes. Veamos en qué punto se cortan, para ello, pongamos la ecuación de r en forma general y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = -11 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \to 5x - 2(2x + 1) = -11 \to x = -9 \quad y = -17$$

Por tanto, las rectas se cortan en el punto $(-9, -17)$.

9. Más ejemplos de ejercicios sobre rectas.

Ej. 1: Hallar el vector de dirección de las siguientes rectas:

a) $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \rightarrow \vec{d} = (1,3)$

b) $x + 2 = \frac{y-6}{5} \rightarrow \vec{d} = (1,5)$

c) $6x - 5y + 7 = 0 \rightarrow \vec{d} = (5,6)$ (ya que $(6,-5)$ es un vector perpendicular a la recta)

d) $y = 9x - 5 \rightarrow \vec{d} = (1,9)$

Ej. 2: Hallar la ecuación de una recta que sea paralela a las siguientes y que pase por el punto $(3,-1)$:

a) $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

b) $4x + y - 3 = 0$ La ecuación de la recta que nos piden será de la forma $4x + y + c = 0$. El valor de c lo hallaremos teniendo en cuenta que el punto $(3,-1)$ debe verificar la ecuación, así que:

$$4 \cdot 3 + (-1) + c = 0 \rightarrow c = -11$$

La ecuación de la recta pedida es $4x + y - 11 = 0$.

c) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5}$

Ej. 2: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(2,8)$.

Tomaremos como vector de dirección el vector que une ambos puntos: $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (0,5)$.

Como no nos piden ningún tipo de ecuación en particular, ponemos las paramétricas que son muy sencillas:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

He elegido el punto A pero podía haber puesto también el B. Si os dais cuenta, existe una expresión todavía más sencilla para esta recta: $x = 2$ (gráficamente, lo que tenemos es una recta vertical que pasa por $x = 2$)

Ej. 3: Hallar tres puntos por los que pase la siguiente recta:

$$\begin{cases} x = -6 + 2t \\ y = 3t \end{cases}$$

Por ejemplo, tendremos para $t = 0$ el punto $(-6,0)$, para $t = 1$ el punto $(-4,3)$ y para $t = -1$ el punto $(-8,-3)$.

10. Distancia entre dos puntos. Ecuación de la circunferencia.

La distancia entre dos puntos A y B es simplemente la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$, es decir, su módulo, como vimos en el punto 1. Si tenemos en cuenta esto, y sabiendo que la circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia r (el radio) de otro punto (x_0, y_0) (el centro), tendremos que los puntos (x, y) de la circunferencia cumplen:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Aunque la forma más habitual de expresarla es:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Ej. 1: La ecuación de la circunferencia de radio 7 y centro en el punto $(4, -1)$ es:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$$

Ej. 2: El centro y el radio de la circunferencia $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, son $C = (3,2)$ $r = 4$.