EXAMEN ACCESO A LA UNIVERSIDAD (ÉRETTSÉGI KÖZÉPSZINTŰ)

MAYO (MÁJUS) 2023

MATEMÁTICAS (MATEMATIKA)

Pelayo Palacio Pérez

****

EJERCICIO 1

1. Tenemos dos conjuntos: $A = \{a; b; e; g\}$ y $B = \{a; b; c; d; f\}$. Determine el conjunto $B \backslash A$ enumerando su elementos.

EJERCICIO 1

1. Tenemos dos conjuntos: $A = \{a; b; e; g\}$ y $B = \{a; b; c; d; f\}$.
Determine el conjunto $B \backslash A$ enumerando su elementos.

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia $B - A$ $(= B \backslash A)$ son los elementos que están en B pero **no** están en A, es decir, $B - A = B \cap \overline{A}$. En este caso particular:

$$B - A = \{a; b; c; d; f\} - \{a; b; e; g\} = \{c; d; f\}$$

Nota: en general, $B - A \neq A - B$

****

EJERCICIO 2

2. Bori, Kristóf y Marci juegan a un juego de rol. Al principio del juego cada uno comienza sacando una carta de las 10 cartas existentes sin reemplazamiento. ¿De cuántas maneras diferentes pueden empezar el juego?

EJERCICIO 2

2. Bori, Kristóf y Marci juegan a un juego de rol. Al principio del juego cada uno comienza sacando una carta de las 10 cartas existentes sin reemplazamiento. ¿De cuántas maneras diferentes pueden empezar el juego?

Bori tiene 10 posibilidades para la primera carta, Kristóf tendrá 9 y Marci 8. Por el principio multiplicativo tendremos un total de:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ posibilidades}$$

****

EJERCICIO 3

3. El salario de Zita ha sido aumentado de 275 000 Ft a 308 000 Ft. ¿Cuál es el porcentaje de este aumento?

EJERCICIO 3

3. El salario de Zita ha sido aumentado de 275 000 Ft a 308 000 Ft. ¿Cuál es el porcentaje de este aumento?

Calculamos la variación porcentual como sigue:

$$\frac{308000 - 275000}{275000} = 12 \Longrightarrow \text{ El porcentaje de aumento es del } 12\,\%$$

Nota: otra forma es hacerlo con una regla de tres directa:

$$\begin{cases} 275000 \longrightarrow 100\,\% \\ 308000 \longrightarrow x\,\% \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{308000}{275000} = 1,12\,\% \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ El porcentaje de aumento es del 12 %.

****

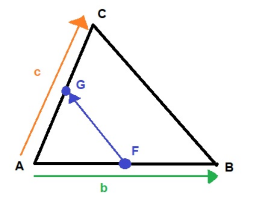
EJERCICIO 4

4. En un triángulo ABC: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$. El punto medio del lado AB es F, el punto medio del lado AC es G. Exprese el vector $\overrightarrow{FG}$ mediante los vectores **b** y **c**. Justifique su respuesta.

EJERCICIO 4

4. En un triángulo ABC: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$. El punto medio del lado AB es F, el punto medio del lado AC es G. Exprese el vector $\overrightarrow{FG}$ mediante los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Justifique su respuesta.

Si dibujamos lo que nos dice el enunciado obtenemos algo similar a lo siguiente:



Observamos que $F = \frac{1}{2}\overline{AB}$ y $G = \frac{1}{2}\overline{AC}$. El vector $\overline{FG}(= G - F)$ será, pues:
$\frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{c-b}{2}$

****

EJERCICIO 5

5. Determine cinco números positivos de los cuales tienen 3 como valor de la mediana y que a su vez su rango sea 7.

EJERCICIO 5

5. Determine cinco números positivos de los cuales tienen 3 como valor de la mediana y que a su vez su rango sea 7.

Este problema no tiene una solución única. Hay que elegir 5 números positivos en orden donde tengamos un "3" en la tercera posición (será la mediana) y la diferencia entre el primero y el quinto sea igual a "7" (el rango). Damos tres ejemplos de posibles soluciones:

$$1, 2, 3, 4, 8$$

$$1, 1, 3, 8, 8$$

$$3, 3, 3, 3, 10$$

****

EJERCICIO 6

6. Tenemos un número en el sistema binario: 101011. ¿Cuál es el número en el sistema decimal?

EJERCICIO 6

6. Tenemos un número en el sistema binario: 101011. ¿Cuál es el número en el sistema decimal?

Para transformar un número en binario en decimal no tenemos más que multiplicar los dígitos del número por la potencia de 2 correspondiente (empezando por 2^0). Así pues:

$$101011_{\text{base } 2} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0_{\text{base } 10} =$$

$$= 32 + 8 + 2 + 1 = 43$$

****

EJERCICIO 7

7. Determine el valor de $\log_2(2x)$ si sabemos que $\log_2 x = 5$. Justifique su respuesta.

EJERCICIO 7

7. Determine el valor de $\log_2(2x)$ si sabemos que $\log_2 x = 5$. Justifique su respuesta.

Para resolver este ejercicio usaremos las propiedades de los logaritmos. Si sabemos que $\log_2 x = 5$, entonces:

$$\log_2(2x) = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + 5 = 6$$

Nota: se podría haber calculado directamente como sigue:

- $\log_2 x = 5 \Longrightarrow x = 2^5 = 32$ (definición de logaritmo de un número)
- $\log_2(2x) = \log_2(2 \cdot 32) = \log_2(64) = \log_2(2^6) = 6$

****

EJERCICIO 8

8. Enumere los números enteros para que se cumplan a la vez las siguientes inecuaciones $-6 \leq x \leq 2$ y $-4 < x < 10$.

EJERCICIO 8

8. Enumere los números enteros para que se cumplan a la vez las siguientes inecuaciones $-6 \leq x \leq 2$ y $-4 < x < 10$.

Este ejercicio se puede resolver dibujando ambos intervalos de soluciones y comprobando qué números cumplen que están en ambos. Aquí lo resolveré sin el dibujo, construyendo los conjuntos numéricos y extrayendo los números que están en ambos conjuntos:

- $A = \{-6 \leqslant x \leqslant 2\} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
- $B = \{-4 < x < 10\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

****

EJERCICIO 9

9. Para un campeonato de fútbol sala fue anunciada la participación de 16 equipos de un instituto. ¿De cuántas maneras distintas se pueden elegir dos equipos para jugar el primer partido?

EJERCICIO 9

9. Para un campeonato de fútbol sala fue anunciada la participación de 16 equipos de un instituto. ¿De cuántas maneras distintas se pueden elegir dos equipos para jugar el primer partido?

Este es un problema de combinatoria donde, si nos hacemos las preguntas pertinentes obtenemos:

a) ¿Importa el orden? No pues da igual que sea el equipo A contra el C que el equipo C contra el A, se habla de primer partido sin hacer distinción de que ser local o visitante es relevante $\Longrightarrow$ Usaremos Combinaciones

b) ¿Se pueden repetir elementos? No

Así pues, la solución será cómo elegir 2 equipos de entre los 16 participantes:

$$C_2^{16} = \binom{16}{2} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = 120 \text{ formas diferentes}$$

****

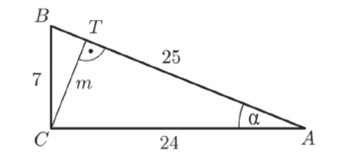
EJERCICIO 10

10. Los lados de un triángulo rectángulo ABC son: $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$ unidades. Calcule la longitud de la altura relativa a la hipotenusa. Justifique su respuesta.

EJERCICIO 10

10. Los lados de un triángulo rectángulo ABC son: $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$ unidades. Calcule la longitud de la altura relativa a la hipotenusa. Justifique su respuesta.

Realizamos un dibujo donde colocamos los datos del enunciado para obtener algo similar a lo siguiente:



A partir de ahí hay dos formas básicas de resolver el ejercicio: por igualdad de áreas (como se resolverá aquí) o por trigonometría.

Área del triángulo $= \dfrac{7 \cdot 24}{2} = \dfrac{m \cdot 25}{2} \iff m = \dfrac{7 \cdot 24}{25} = 6,72\text{cm}^2$

Nota: por trigonometría sólo hay que darse cuenta de que $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{7}{25} = \dfrac{m}{24}$ y despejar.

****

EJERCICIO 11

11. La recta *e* está definida con la ecuación $5x - y = 7$.

a) Determine un vector normal de esta recta *e*.

b) Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3;2)$ y que es paralela a la recta *e*.

EJERCICIO 11

11. La recta e está definida con la ecuación $5x - y = 7$.

a) Determine un vector normal de esta recta e.

b) Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3;2)$ y que es paralela a la recta e.

Tenemos la recta $e \equiv 5x - y = 7$ que ya está dada en forma normal, es decir, $e \equiv A \cdot x + B \cdot y = C$, donde (A, B) es un vector normal a la recta.

a) Un vector normal es: $\overrightarrow{n} = (5, -1)$

b) Una recta paralela a la nuestra tiene el mismo vector director y, por tanto, el mismo vector normal. Por lo tanto: $r \equiv 5x - y = C$. Para hallar C imponemos que pasa por el punto $(3; 2)$.

$$5 \cdot 3 - (2) = C \Longrightarrow C = 13$$

b) La recta pedida es: $r \equiv 5x - y = 13$

****

EJERCICIO 12

12. La función f está definida en el conjunto de los números reales no negativos y por otro lado, las funciones g y h están definidas en el conjunto de los números reales:

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \qquad g(x) = (x-2)^2 - 3 \qquad h(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

Escriba en cada una de las filas de la siguiente tabla las funciones que cumplan las afirmaciones escritas.

El valor de su mínimo es (-2):	2 puntos	
Tiene dos raices como mínimo:	2 puntos	

EJERCICIO 12

12. La función f está definida en el conjunto de los números reales no negativos y por otro lado, las funciones g y h están definidas en el conjunto de los números reales:

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \qquad g(x) = (x-2)^2 - 3 \qquad h(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

Escriba en cada una de las filas de la siguiente tabla las funciones que cumplan las afirmaciones escritas.

El valor de su mínimo es (-2):	2 puntos	
Tiene dos raices como mínimo:	2 puntos	

El plano cartesiano está de apoyo por si no se ven directamente las propiedades que se piden. Razonemos sin en dibujo (las demostraciones en la página siguiente):

EJERCICIO 12

a) Lo cumplen las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

- a1) La función $\sqrt{x}$ tiene un mínimo en $x = 0$, así que la función $\sqrt{x} - 2$ tendrá un mínimo en $x = 0$ también y el valor de ese mínimo será $f(0) = \sqrt{0} - 2 = -2 \Longrightarrow$ Es solución para este apartado.
- a2) La función x^2 es una parábola cuyo mínimo se alcanza en $x = 0$, así que $(x-2)^2 - 3$ también es un parábola pero con su mínimo desplazado a $x = 2$ y el valor de ese mínimo será $g(2) = (2-2)^2 - 3 = -3 \neq -2 \Longrightarrow$ No es solución para este apartado.
- a3) La función $\text{sen}(x)$ oscila infinitas veces en el intervalo imagen $[-1, 1]$. La función $2\text{sen}(x)$ solamente la estira verticalmente en ambas direcciones, lo que nos da el intervalo $[-2, 2]$ (por ejemplo, $h(\frac{3\pi}{2}) = 2\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -2$) $\Longrightarrow$ Es solución para este apartado.

b) Lo cumplen las funciones $g(x)$ y $h(x)$.

- b1) La función $\sqrt{x}$ es siempre creciente así que $\sqrt{x} - 2$ también lo será $\Longrightarrow$ Sólo tendrá, a lo sumo, una raíz. No es una solución para este apartado.
- b2) La función x^2 es una parábola cuyas ramas se van a $+\infty$ así que $(x-2)^2 - 3$ también tiene ese comportamiento. Si probamos que la función es negativa en algún momento, obtendremos que tiene exactamente dos raíces reales y lo anterior es cierto porque $g(2) = (2-2)^2 - 3 = -3 < 0$
- b3) La función $\text{sen}(x)$ oscila infinitas veces y tiene infinitas raíces. La función $2\text{sen}(x)$ solamente la estira verticalmente en ambas direcciones, no cambia el número de raíces $\Longrightarrow$ Tiene al menos dos raíces (de hecho, infinitas).

****

EJERCICIO 13 a)

13. Escribimos en una hoja los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 formando un círculo. Unimos dos números con una línea (arista) sí y solo sí uno es el divisor del otro (no unimos ni un número con él mismo). El resultado de este proceso es un grafo de 6 vértices.

6 5

1 4

2 3

a) Dibuje el grafo obtenido.

EJERCICIO 13 a)

13. Escribimos en una hoja los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 formando un círculo. Unimos dos números con una línea (arista) sí y solo sí uno es el divisor del otro (no unimos ni un número con él mismo). El resultado de este proceso es un grafo de 6 vértices.

6 5

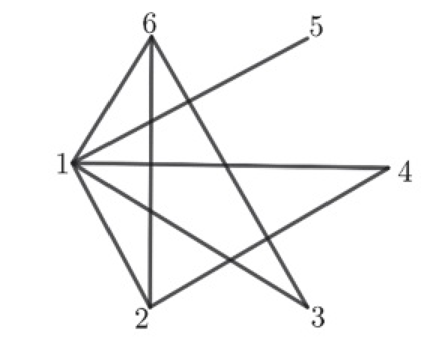
1 4

2 3

a) Dibuje el grafo obtenido.

Para dibujar el grafo recordemos que el número "1" es divisor de todos los demás (así que de él saldrán cinco líneas, una a cada número), el "2" divide al "4" y al "6" por ser pares, el "3" sólo divide al número "6" y el "4", el "5" y el "6" no dividen a ningún otro. El grafo resultante será el que se reproduce en la siguiente página:

EJERCICIO 13 a)



****

EJERCICIO 13 b)

b) Determine los valores lógicos de las siguientes afirmaciones (verdadera o falsa). Justifique su respuesta.

I. Hay un número entero positivo que tiene cuatro divisores positivos.

II. Si n, un número entero no es el divisor del número entero m, entonces n y m son números primos relativos.

EJERCICIO 13 b)

b) Determine los valores lógicos de las siguientes afirmaciones (verdadera o falsa). Justifique su respuesta.

I. Hay un número entero positivo que tiene cuatro divisores positivos.
II. Si n, un número entero no es el divisor del número entero m, entonces n y m son números primos relativos.

Resolvamos directamente las dos cuestiones planteadas:

a) **Verdadero:** El número "6", por ejemplo, tiene cuatro divisores positivos pues Div(6)$= \{1, 2, 3, 6\}$. Otro ejemplo podría ser el 8 $(= 2^3)$ que tiene cuatro divisores: Div(8)$= \{1, 2, 4, 8\}$

b) **Falso:** los números 4 y 6 no son divisibles entre sí pero no son primos relativos porque m.c.d$(4,\ 6) = 2$.

Nota: recordemos que dos números son primos relativos si, y sólo si, se cumple que m.c.d.$(n,\ m) = 1$.

****

EJERCICIO 13 c)

Consideramos los dos siguientes sucesos:

A: Al lanzar un dado regular una vez, el número obtenido en la cara superior es un divisor de 24.
B: Al lanzar un dado regular dos veces, los números obtenidos en las caras superiores no son 6 en ninguno de los casos.

c) ¿Cuál de estos sucesos tiene mayor probabilidad?

EJERCICIO 13 c)

Consideramos los dos siguientes sucesos:

A: Al lanzar un dado regular una vez, el número obtenido en la cara superior es un divisor de 24.
B: Al lanzar un dado regular dos veces, los números obtenidos en las caras superiores no son 6 en ninguno de los casos.

c) ¿Cuál de estos sucesos tiene mayor probabilidad?

a) En este apartado tenemos que el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De aquí los divisores de "24" son: 1, 2, 3, 4 y 6 $\Longrightarrow$ Aplicamos la Regla de Laplace para obtener: $P(A) = \dfrac{\text{Casos a favor}}{\text{Casos totales}} = \dfrac{5}{6}$.

b) En este apartado el espacio muestral es $E = \{(1;1), (1;2), \ldots, (6;5), (6;6)\}$, donde hay un total de $6^2 = 36$ posibilidades. El número de caras en las que no aparece un "6" en la cara superior son de la forma $(1;1), (1;2), \ldots, (1;5), \ldots, (5;5)$ para un total de: $5 \cdot 5 = 25$ casos a favor $\Longrightarrow P(B) = \dfrac{25}{36}$

Como $\dfrac{5}{6} = \dfrac{30}{36} > \dfrac{25}{36} \Longrightarrow$ El suceso A es más probable.

****

EJERCICIO 14 a) b)

14. En una clase de física 6 parejas de alumnos se encargaban de analizar la aceleración de un cuerpo deslizado por una pendiente. Cada pareja pudo realizar cuatro medidas. Los resultados de las cuatro medidas de Emma y Norbi se ve en la tabla adjunta:

	1. medida	2. medida	3. medida	4. medida
aceleración (m/s^2)	1,9	2,0	1,8	2,3

a) Calcule la desviación típica de las cuatro medidas de Emma y Norbi.

La media aritmética de las medidas de otras cinco parejas es exactamente 1,9 m/s^2.

b) ¿Cuál es la media aritmética de las 24 medidas de todas las parejas? Redondee su respuesta en dos decimales.

EJERCICIO 14 a) b)

14. En una clase de física 6 parejas de alumnos se encargaban de analizar la aceleración de un cuerpo deslizado por una pendiente. Cada pareja pudo realizar cuatro medidas. Los resultados de las cuatro medidas de Emma y Norbi se ve en la tabla adjunta:

	1. medida	2. medida	3. medida	4. medida
aceleración (m/s^2)	1,9	2,0	1,8	2,3

a) Calcule la desviación típica de las cuatro medidas de Emma y Norbi.

La media aritmética de las medidas de otras cinco parejas es exactamente 1,9 m/s^2.

b) ¿Cuál es la media aritmética de las 24 medidas de todas las parejas? Redondee su respuesta en dos decimales.

Para calcular la desviación típica, σ, tenemos dos caminos. Nosotros usaremos el segundo. Sean N el número total de datos y $\overline{x}$ la media de una serie de datos:

1) $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$

2) $$\sigma^2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(x_j - \overline{x})^2}{N}$$

EJERCICIO 14 a) b)

Aplicando la segunda fórmula obtenemos la solución del apartado **a)**

- $\overline{x} = \dfrac{1,9 + 2,0 + 1,8 + 2,3}{4} = 2\text{m}/\text{s}^2$
- $\sigma^2 = \dfrac{(1,9-2)^2 + (2,0-2)^2 + (1,8-2)^2 + (2,3-2)^2}{4} = 0,035$
- $\sigma = +\sqrt{0,035} \approx 0,187\text{m}/\text{s}^2$

Para el apartado **b)** razonamos como sigue:

- La suma de las 4 medidas de Emma y Norbi es $= 8$.
- la suma de las 20 medidas de sus compañeros es $= 20 \cdot 1,9 = 38$
- la media de las 24 medidas es $= \dfrac{8+38}{24} = 1,9166\ldots \approx 1,92\text{m}/\text{s}^2$

****

EJERCICIO 14 c) d)

En otra clase de física los alumnos estudiaron el movimiento de un proyectil disparado en dirección vetical desde el nivel del suelo hasta que llega otra vez al suelo. Según las medidas la distancia entre el suelo y el proyectil, dependiendo del tiempo viene determinado por la función:
$h(t) = 6t - 5t^2$. (El tiempo se mide en segundos y la distancia, en metros.)

c) Según la formula ¿a qué distancia se encuentra el proyectil respecto al suelo después de 0,5 s del disparo?

d) ¿Después de cuánto tiempo alcanza el proyectil una altura de 1 m respecto al suelo?

EJERCICIO 14 c) d)

En otra clase de física los alumnos estudiaron el movimiento de un proyectil disparado en dirección vetical desde el nivel del suelo hasta que llega otra vez al suelo. Según las medidas la distancia entre el suelo y el proyectil, dependiendo del tiempo viene determinado por la función:
$h(t) = 6t - 5t^2$. (El tiempo se mide en segundos y la distancia, en metros.)

c) Según la formula ¿a qué distancia se encuentra el proyectil respecto al suelo después de 0,5 s del disparo?

d) ¿Después de cuánto tiempo alcanza el proyectil una altura de 1 m respecto al suelo?

En estos dos apartados están comprobando si sabemos interpretar los valores de una función en un contexto real.

c) En este apartado nos piden evaluar la función en $t = 0,5$:

$h(0,5) = 6 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5^2 = 1,75$

A los 0, 5 segundos el proyectil alcanza una altura de 1,75 metros.

d) En este apartado nos piden hallar los $\hat{t}$ de forma que $h(\hat{t}) = 1$.

$h(t) = 6t - 5t^2 = 1 \iff 5t^2 - 6t + 1 = 0 \iff t = 1$ y $t = 0,2$

Tenemos dos soluciones: el proyectil alcanza la altura de 1 metro a los 0,2 y 1 segundos tras el disparo.

****

EJERCICIO 15 a)

15. Tenemos un cuadrado de 4 cm de lados. En uno de los vértices de este cuadrado trazamos dos segmentos de tal manera que se divide en tres partes iguales el ángulo recto de dicho vértice.

a) ¿Cuánto se mide el área del triángulo que esta sombreado de color gris en el dibujo?

EJERCICIO 15 a)

15. Tenemos un cuadrado de 4 cm de lados. En uno de los vértices de este cuadrado trazamos dos segmentos de tal manera que se divide en tres partes iguales el ángulo recto de dicho vértice.

a) ¿Cuánto se mide el área del triángulo que esta sombreado de color gris en el dibujo?

Para hallar el área de un triángulo rectángulo nos basamos en que un cateto es la altura con respecto al otro cateto.
Como dividimos el ángulo recto en tres partes, cada una de ellas forma un ángulo de 30º.

$$\tan(30^\circ) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{4}$$

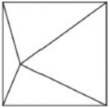
$$\text{Cateto opuesto} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,31\text{cm}.$$

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 2,31}{2} = 4,62\text{cm}^2$$

****

EJERCICIO 15 b)

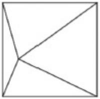
Tenemos otro cuadrado del mismo tamaño. Fijamos ahora un punto cualquiera en interior de este cuadrado y unimos este punto con todos los vértices del cuadrado tal y como se observa en el dibujo. Coloreamos los interiores de estos triángulos formados, con los colores azul, verde o amarillo.Utilizamos todos los colores teniendo en cuenta que los triángulos presenten un solo color en su interior. Los triángulos que tienen lados comunes no pueden ser coloreados con el mismo color.



b) Teniendo en cuenta lo anterior ¿de cuántas maneras distintas se puede colorear el cuadrado completo?

EJERCICIO 15 b)

Tenemos otro cuadrado del mismo tamaño. Fijamos ahora un punto cualquiera en interior de este cuadrado y unimos este punto con todos los vértices del cuadrado tal y como se observa en el dibujo. Coloreamos los interiores de estos triángulos formados, con los colores azul, verde o amarillo.Utilizamos todos los colores teniendo en cuenta que los triángulos presenten un solo color en su interior. Los triángulos que tienen lados comunes no pueden ser coloreados con el mismo color.



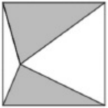
b) Teniendo en cuenta lo anterior ¿de cuántas maneras distintas se puede colorear el cuadrado completo?

Supongamos que pintamos un triángulo del color azul. Hay otros dos triángulo que tienen un borde común con el pintado de azul así que tenemos que pintarlos de verde o amarillo.
Por ahora tenemos: Azul - Verde - Verde, Azul - Amarillo - Amarillo, Azul - Verde - Amarillo y Azul - Amarillo - Verde.
Para el último triángulo, y estando forzados a usar los tres colores por el enunciado, nos quedarían las siguientes posibilidades: Azul - Verde - Verde - Amarillo, Azul - Amarillo - Amarillo - Verde, Azul - Verde - Amarillo - Azul y Azul - Amarillo - Verde - Azul. Es decir, cuatro coloraciones.
Como el primer triángulo lo podemos colorear de tres formas distintas, el total de posibilidades es $= 3 \cdot 4 = 12$

****

EJERCICIO 15 c)

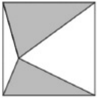
Entre los triángulos formados cogemos dos que sean opuestos (solo tienen un vértice común) del cuadrado que tiene lados de 4 cm, y tomamos la suma de las áreas de estos triángulos. Repetimos esto con los otros dos triángulos restantes.



c) Justifique que estas dos sumas de áreas son iguales, por lo tanto el área de la parte gris del cuadrado será igual al área de la parte blanca del cuadrado.

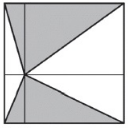
EJERCICIO 15 c)

Entre los triángulos formados cogemos dos que sean opuestos (solo tienen un vértice común) del cuadrado que tiene lados de 4 cm, y tomamos la suma de las áreas de estos triángulos. Repetimos esto con los otros dos triángulos restantes.



c) Justifique que estas dos sumas de áreas son iguales, por lo tanto el área de la parte gris del cuadrado será igual al área de la parte blanca del cuadrado.

Si por el punto elegido dibujamos una cruz con sus lados paralelos a los lados del cuadrado obtenemos el siguiente dibujo:



Del dibujo es obvio que en cada uno de los cuatro rectángulos las partes coloreada y no coloreada con la mitad del área (los lados de los triángulos son las diagonales) así pues, la suma total de cada una de las partes es la mitad del área total del cuadrado como queríamos demostrar.

****

EJERCICIO 16 a) b)

16. Resuelva las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales:

a) $2 \cdot \sqrt{3-x} = x+5$

b) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x^2}{x^2-1} = 2$

EJERCICIO 16 a) b)

16. Resuelva las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales:

a) $2\cdot\sqrt{3-x}=x+5$

b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}=2$

Para la primera ecuación elevamos al cuadrado para eliminar la raíz, resolvemos la ecuación y luego comprobamos las soluciones.
Para la segunda ecuación, teniendo en cuenta que $x \neq \pm 1$ (el denominador se anularía), multiplicamos por el m.c.m(denominadores) y resolvemos.

a) $2\sqrt{3-x} = x+5 \Longleftrightarrow 4(3-x) = (x+5)^2$

$12 - 4x = x^2 + 10x + 25 \Longleftrightarrow x^2 + 14x + 13 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado para obtener: $x = -1$, $x = -13$

Comprobamos $x = -1$: $2\sqrt{3-(-1)} = -1+5 \Longleftrightarrow 4 = 4 \Longleftrightarrow$ Es solución.

Comprobamos $x = -13$: $2\sqrt{3-(-13)} = -13+5 \Longleftrightarrow 8 \neq -8 \Longleftrightarrow$ No es solución

EJERCICIO 16 a) b)

16. Resuelva las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales:

a) $2\cdot\sqrt{3-x}=x+5$

b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}=2$

b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}=2$

$\text{m.c.m}(x+1,\ x^2-1)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}=2\dfrac{x^2-1}{x^2-1}$

$x^2-x+x^2=2x^2-2 \iff x=2$

Comprobamos $x=2$: $\dfrac{2}{2+1}+\dfrac{2^2}{2^2-1}=2 \iff 2=2 \iff$ Es solución.

****

EJERCICIO 16 c)

El primer término de una progresión aritmética es 18. La suma de los primeros seis términos es igual a la suma de los siete primeros términos.

c) Justifique que la suma de los primeros trece términos es igual a cero y calcule el término trece.

EJERCICIO 16 c)

El primer término de una progresión aritmética es 18. La suma de los primeros seis términos es igual a la suma de los siete primeros términos.

c) Justifique que la suma de los primeros trece términos es igual a cero y calcule el término trece.

Una progresión aritmética es una progresión de la forma $a_1 \in \mathbb{R}$ $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ donde $d \in \mathbb{R}$ y $n \in \{1,2,3,\dots\}$. Que la suma de los primeros seis términos sea igual a la de los siete primeros nos indica que $a_7 = 0$. Como $a_1 = 18$ tenemos una progresión aritmética decreciente, es decir, $d < 0$. Usemos la fórmula de la suma:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n \iff \begin{cases} S_6 = \dfrac{2\cdot 18 + 5d}{2}\cdot 6 \\ S_7 = \dfrac{2\cdot 18 + 6d}{2}\cdot 7 \end{cases}$$

$$S_6 = S_7 \iff 108 + 15d = 126 + 21d \iff d = -3$$

Calculamos lo que nos piden:

- $a_{13} = 18 + (13-1)\cdot(-3) = -18$
- $S_{13} = \dfrac{2\cdot 18 + (13-1)\cdot(-3)}{2}\cdot 13 = 0$

****

EJERCICIO 17 a)

17. En el año 2018 la empresa *A* elaboró una cantidad de productos con un valor estimado de 500 millones de florines. En el mismo año la empresa *B* elaboró también una cantidad de productos con un valor estimado de 400 millones de florines. Los planes para el futuro son los siguientes: la empresa *A* quiere aumentar su valor de producción un 5 % por año y la empresa *B* quiere aumentar su valor de producción un 6 % por año.

a) Calcule que según los planes en los siguientes 20 años (de 2019 a 2038) en el caso de la empresa *A* ¿cuántos millones de florines será el valor de producción total durante estos veinte años transcurridos?

EJERCICIO 17 a)

17. En el año 2018 la empresa A elaboró una cantidad de productos con un valor estimado de 500 millones de florines. En el mismo año la empresa B elaboró también una cantidad de productos con un valor estimado de 400 millones de florines. Los planes para el futuro son los siguientes: la empresa A quiere aumentar su valor de producción un 5 % por año y la empresa B quiere aumentar su valor de producción un 6 % por año.

a) Calcule que según los planes en los siguientes 20 años (de 2019 a 2038) en el caso de la empresa A ¿cuántos millones de florines será el valor de producción total durante estos veinte años transcurridos?

Cada año el valor de producción de la empresa A es 1,05 el valor del año anterior. Tenemos, por lo tanto, una progresión geométrica, $a_n = a_0 \cdot r^n$, de razón $r = 1,05$. Nos preguntan por el valor de producción total durante los 20 años, **no** el valor en el vigésimo año $\Longrightarrow$ Hay que calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \Longrightarrow S_{20} = 500 \cdot 1,05^1 \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} \approx 17.359,6...$$

Solución: 17.360 millones de Ft.

****

EJERCICIO 17 b)

Publicaron estos planes en una web de economía en Internet. En el foro relacionado con este artículo se desencadenó un debate. Según un opinante en el futuro la diferencia entre los valores de producción de las empresas A y B disminuye año tras año.

b) Calcule los datos que faltan en la tabla adjunta y justifique que la afirmación del opinante es falsa.

	2018	2019	2020	2021
El valor de producción de la empresa A (millones Ft)	500			
El valor de producción de la empresa B (millones Ft)	400			

EJERCICIO 17 b)

Publicaron estos planes en una web de economía en Internet. En el foro relacionado con este artículo se desencadenó un debate. Según un opinante en el futuro la diferencia entre los valores de producción de las empresas A y B disminuye año tras año.

b) Calcule los datos que faltan en la tabla adjunta y justifique que la afirmación del opinante es falsa.

	2018	2019	2020	2021
El valor de producción de la empresa A (millones Ft)	500			
El valor de producción de la empresa B (millones Ft)	400			

La tabla se rellena de manera muy directa nada más que aplicando la fórmula para una progresión geométrica:

Empresa	Razón	2018	2019	2020	2021
A	1,05	500	525	$551,25$	$578,81$
B	1,06	400	424	$449,44$	$476,41$
Diferencia por año:		100	101	101,81	102,4

Cada año la diferencia aumenta, contradiciendo la afirmación del opinante.

****

EJERCICIO 17 c)

Según otro participante de este debate, ocurre todo lo contrario: la diferencia entre los valores de producción entre las dos empresas aumenta año tras año y el valor de producción de la empresa B nunca consigue superar el valor de producción de la empresa A. Pero según un tercer opinante esta afirmación tampoco es correcta.

c) Calcule en qué año el valor de producción de la empresa B podrá alcanzar el valor de producción de la empresa A. (Suponemos que los valores de producción se comportan según los planes establecidos por las empresas.)

EJERCICIO 17 c)

Según otro participante de este debate, ocurre todo lo contrario: la diferencia entre los valores de producción entre las dos empresas aumenta año tras año y el valor de producción de la empresa *B* nunca consigue superar el valor de producción de la empresa *A*. Pero según un tercer opinante esta afirmación tampoco es correcta.

c) Calcule en qué año el valor de producción de la empresa *B* podrá alcanzar el valor de producción de la empresa *A*. (Suponemos que los valores de producción se comportan según los planes establecidos por las empresas.)

Nos preguntan para qué año, es decir, para qué "n", ocurre que $400 \cdot 1,06^n = 500 \cdot 1,05^n$. Equivalentemente, para qué $t \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad: $400 \cdot 1,06^n \geqslant 500 \cdot 1,05^n$.

$$400 \cdot 1,06^n = 500 \cdot 1,05^n \iff 1,06^n = \frac{500}{400} \cdot 1,05^n \iff$$
$$\iff \frac{1,06^n}{1,05^n} = \frac{500}{400} \iff \left(\frac{1,06}{1,05}\right)^n = 1,25 \iff \text{(Tomamos logaritmos)}$$
$$\iff n \cdot \log\left(\frac{1,06}{1,05}\right) = \log(1,25) \iff n = \frac{\log(1,25)}{\log(1,06) - \log(1,05)} \iff$$
$$\iff n \approx 23,5\ldots \implies n = \{\text{es un natural (un año)}\} = 24 \implies$$ El valor de la empresa B alcanza (supera de hecho) el valor de A a los 24 años después de la primera medida (año 2018), es decir, en el año 2042.

****

EJERCICIO 18 a)

18. La caja de bombones "Gömbvarázs" tiene forma de prisma. La base del prisma es un hexágono regular cuya arista de la base es de 5 cm y su altura es 3 cm. La caja contiene seis esferas de chocolate de 2,8 cm de diámetro.

a) ¿Qué tanto porciento representa la suma de los volumenes de todas estas esferas respecto al volumen total de la caja?

EJERCICIO 18 a)

18. La caja de bombones "Gömbvarázs" tiene forma de prisma. La base del prisma es un hexágono regular cuya arista de la base es de 5 cm y su altura es 3 cm. La caja contiene seis esferas de chocolate de 2,8 cm de diámetro.

a) ¿Qué tanto porciento representa la suma de los volumenes de todas estas esferas respecto al volumen total de la caja?

Calculemos el volumen de las esferas por un lado, el de la caja por otro y veamos el cociente entre ambas magnitudes.

- El radio de cada esfera es: $R = 2,8/2 = 1,4\text{cm}$

  El volumen de cada esfera es: $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 \approx 11,494\text{cm}^3$

  El volumen de las seis esferas es: $V = 6 \cdot 11,494 = 68,964\text{cm}^3$

EJERCICIO 18 a)

18. La caja de bombones "Gömbvarázs" tiene forma de prisma. La base del prisma es un hexágono regular cuya arista de la base es de 5 cm y su altura es 3 cm. La caja contiene seis esferas de chocolate de 2,8 cm de diámetro.

a) ¿Qué tanto porciento representa la suma de los volumenes de todas estas esferas respecto al volumen total de la caja?

- La caja está formada por seis triángulos equiláteros de base 5cm. Para calcular la altura de los triángulos usamos el Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow h = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

Área del hexágono $= 6\cdot$ Área del triángulo $= 6 \cdot \dfrac{5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} \approx 64,952\text{cm}^2$

Volumen de la caja: $V =$Área base$\cdot$ altura caja$= 64,952 \cdot 3 = 194,856\text{cm}^3$

- Porcentaje del volumen de las esferas/volumen de la caja:

$$\% = \frac{68,964}{194,856} \approx 35,39\,\%$$

****

EJERCICIO 18 b)

Las esferas de bombones de chocolate "Gömbvarázs" están enpaquetadas en un folio de color rojo y de color dorado. La máquina deja caer uno tras otro a cada caja 6 bolas de bombones con diferente color al azar. La probabilidad de que caiga una bola roja es de $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que caiga una bola dorada es $\frac{2}{3}$.

b) Determine la probabilidad que entre las seis bolas de chocolate haya como mínimo cinco doradas.

EJERCICIO 18 b)

Las esferas de bombones de chocolate "Gömbvarázs" están enpaquetadas en un folio de color rojo y de color dorado. La máquina deja caer uno tras otro a cada caja 6 bolas de bombones con diferente color al azar. La probabilidad de que caiga una bola roja es de $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que caiga una bola dorada es $\frac{2}{3}$.

b) Determine la probabilidad que entre las seis bolas de chocolate haya como mínimo cinco doradas.

La probabilidad de que haya al menos 5 doradas entre las 6 bolas es equivalente a decir que haya o bien 5 bolas doradas o bien 6 bolas doradas. Usamos la distribución binomial para calcular las probabilidades pedidas: P[Al menos 5 bolas doradas] $=P$[Hay 5 bolas doradas] $+\,P$[Hay 6 bolas doradas] $=$

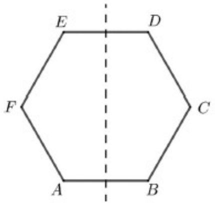
$$=\binom{6}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\binom{6}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\approx 0,351$$

****

EJERCICIO 18 c)

Cada lado del hexágono regular *ABCDEF* mide 5 cm. Hacemos girar el hexágono alrededor de la mediatriz del lado *AB* tal y como se observa en la figura.

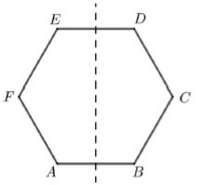
c) Calcule el área total de este cuerpo obtenido.



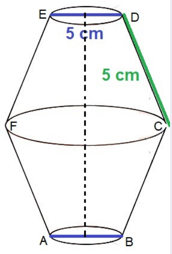
EJERCICIO 18 c)

Cada lado del hexágono regular $ABCDEF$ mide 5 cm. Hacemos girar el hexágono alrededor de la mediatriz del lado AB tal y como se observa en la figura.

c) Calcule el área total de este cuerpo obtenido.



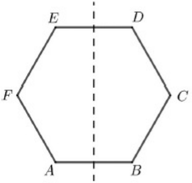
La figura que obtenemos al rotar el hexágono alrededor de las mediatriz de un lado es un doble cono truncado como el de la figura:



EJERCICIO 18 c)

Cada lado del hexágono regular $ABCDEF$ mide 5 cm. Hacemos girar el hexágono alrededor de la mediatriz del lado AB tal y como se observa en la figura.

c) Calcule el área total de este cuerpo obtenido.



Para hallar el área lateral de la figura seguiremos los siguientes pasos:

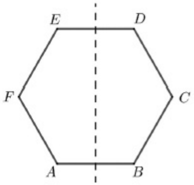
I) Hallar el área del círculo superior.
II) Hallar el área lateral del cono truncado superior.
III) El área total de la figura será el doble de la suma de las dos áreas antes calculadas.

Nota: hay que tener en cuenta que si se calcula directamente el área lateral de un cono truncado, estamos añadiendo el área del círculo inferior que habría que quitar pues está oculta a la vista.

EJERCICIO 18 c)

Cada lado del hexágono regular $ABCDEF$ mide 5 cm. Hacemos girar el hexágono alrededor de la mediatriz del lado AB tal y como se observa en la figura.

c) Calcule el área total de este cuerpo obtenido.



Procedemos a los cálculos:

I) $R = 5/2 = 2,5\text{cm} \Longrightarrow \text{Área} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 2,5^2 \approx 19,635\text{cm}^2$

II) Generatriz $= 5\text{cm}$, radio círculo inferior $= 5\text{cm} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \text{Área} = (5 + 2,5) \cdot 5 \cdot \pi \approx 117,81\text{cm}^2$

III) $\text{Área total} = 2 \cdot (19,635 + 117,81) = 274,89\text{cm}^2$