TEMA 10: SUCESIVAS AMPLIACIONES DE NÚMERO. EVOLUCIÓN HISTÓRICA Y PROBLEMAS QUE RESUELVE CADA UNA.

TIEMPO: 70 — 69

Esquema

1) Introducción
   - 1.1) Naturales
     - 1.1.1) Concepto de número
     - 1.1.2) Sistemas de numeración
   - 1.2) Racionales
     - 1.2.1) Antigüedad + Babilonios + Griegos
     - 1.2.2) India + Árabes + Europa
   - 1.3) Enteros y el cero
     - 1.3.1) China
     - 1.3.2) India + Árabes
     - 1.3.3) Europa
   - 1.4) Reales
     - 1.4.1) Antigüedad
     - 1.4.2) Weierstrass + Meray
   - 1.5) Complejos
     - 1.5.1) ss.XVI-XVIII
     - 1.5.2) s.XIX
   - 1.6) Otros

2 Formalización matemática
   - 2.1) Naturales
     - 2.1.1) Definición
   - 2.2) Enteros
     - 2.2.1) Definición
   - 2.3) Racionales
     - 2.3.1) Definición
   - 2.4) Reales
     - 2.4.1) Definición: Dedekin
   - 2.5) Complejos
     - 2.5.1) Definición
     - 2.5.2) Definición: i, forma binómica
     - 2.5.3) Teorema Fundamental del Álgebra

1) Introducción:

Naturales:

▷ **Concepto de Número**: a lo largo de la Historia de la Humanidad surgen nuevos problemas, nuevas necesidades que requieren respuestas más o menos adecuadas. Uno de los grandes "inventos humanos" son los números (otros son la rueda, el dominio del fuego,...).

▷ El primer paso hacia al invención de los números es aprender a contar o comparar dos magnitudes/cantidades. Pero esto ya lo pueden hacer algunos animales (algunos pájaros distinguen hasta cuatro unidades) y el ser humano desde sus comienzos, también. Al principio sólo distinguía entre uno-dos-muchos y poco a poco va siendo capaz de ir más allá. Sin embargo, esto no significa en absoluto el conocimiento de los números (esto ocurre incluso hoy en día con tribus muy primitivas). Entonces, ¿cómo aprende el hombre a contar? Se establece lo que podemos llamar "correspondencia unidad por unidad" (número de muescas con número de ovejas, un caballo equivale a un guijarro, etc. También se utilizaban partes del cuerpo como las dedos o la muñeca). Al establecer una correspondencia unidad a unidad se empieza a introducir el concepto de orden. Añadir que la percepción de diversas cantidades se da entre otras especies vivas pero la facultad de contar es exclusivamente humana. Contar objetos es atribuir a cada uno de ellos un símbolo (palabra, gesto), así a cada objeto le corresponde una sucesión de símbolos ordenados. La mano del hombre se presenta como la máquina de calcular más sencilla y más natural que existe (y que dará lugar a nuestro sistema de numeración actual).

▷ Pero al principio las personas no contaban de manera abstracta y a agrupar los objetos en relación a una base dada; se recurría al trueque y a ciertos patrones fijos de cambio: "el precio de la novia", ovejas por grano, etc. y no hemos de olvidar que las primeras monedas aparecen en el s.VII a.C. pero el valor de éstas ni siquiera es constante hoy en día, así que a distintas zonas corresponderán distintas concepciones del "cuánto es". Antes de la invención de las cifras podemos observar diversas "máquinas de calcular":

▷ La mano: con los dedos se pueden contar hasta varios millones, pero muy lejos de eso es el uso frecuente que se hace de la mano al contar: se puede llevar un calendario menstrual usando las falanges de los dedos, los niños pequeños suman y restan con los dedos de la mano,....

▷ Cuerdas y nudos: el color de las cuerdas, la posición de los nudos, su grosor,... servían para llevar estadísticas, calendarios, menajes, etc. Muy usados sobre todo como sistema contable en base 10 por los Incas y los Persas.

▷ Muescas: desde muy antiguo (Prehistoria) tenemos restos en lo que hay grupos de muescas hechos sobre hueso que representan cantidades (en Inglaterra el sistema se abolió en el s.XIX).

▷ Guijarros: cálculo viene del latín "*calculus*". Al principio cada guijarro valía por uno, posteriormente el grosor importaría. Este método llevaría a la invención del ábaco.

▷ Invención de las cifras: como hemos visto, cada vez estamos más cerca de que aflore el concepto abstracto de número. Éste vendrá en una sociedad bastante compleja, urbana, que requiere un control de las actividades de la población. De hecho el nacimiento de la escritura y las cifras es el mismo: tener controlados la producción, el comercio y a las personas de la ciudad. Por ello no es de extrañar que los primeros vestigios de escritura no sean poemas (aún faltaría para ello) sino las llamadas *facturas* (tablillas de arcilla en las que se cuentas objetos, animales o personas). Estamos hablando del $\approx$ 3.300 a.C. donde ya los sumerios descubren el concepto abstracto de cifra y de que que tener "un palito vertical" significa x unidades y es más que tener "un palito horizontal".

Obviamente habrán de pasar miles de años para tener el sistema estructurado de números que tenemos hoy en día (naturales-enteros-racionales-reales-etc.), pero ya se habían puesto las bases para ello.

Sistemas de numeración: actualmente expresamos los números en base 10 y además aprovechamos el principio posicional y la existencia del cero para representar grandes números (y operar con ellos) de manera muy cómoda y efectiva. Pero no siempre ha sido así (ni siquiera en la actualidad todas las personas trabajan en base 10). Hagamos un breve repaso de estos otros sistemas de numeración:

▷ Base 5: comerciantes de Bombay y algunos pueblos de África y Oceanía la usan.

▷ Base 20 (vigesimal): los esquimales, mayas, aztecas, tribus de Centroáfrica,...

▷ Base 12: considerada "mejor" que la base 10 en el sentido de que tiene más divisores. Primero por sumerios y presente en muchos pueblos europeos en vísperas de la Revolución Francesa. 1 pie = 12 pulgadas, 1 pulgada = 12 líneas, etc. Hoy en día todavía compramos los huevos por docenas.

▷ Base 60 (sexagesimal): no se sabe si su origen fue la combinación de las bases 12 y 5 o que $60 = m.c.m.(12, 10)$. Lo que se sabe es que los sumerios la empleaban ya y después pasaría al resto de Mesopotamia. Hoy día medimos el tiempo y los ángulos en esta base.

▷ Base 10: usada por los antiguos egipcios, griegos, romanos,...

▷ **El principio posicional**: descubierto hace unos 4.000 años en Mesopotamia, se basa en que el valor de las cifras viene dado por su posición en la escritura del número correspondiente. Esto permite representar cualquier número (por grande que sea) con un número muy pequeño de cifras.

▷ Sólo tres civilizaciones lo descubrieron: chinos, mayas y en Mesopotamia. Los chinos hace unos 2.000 años con una base decimal y los mayas en los siglos III-IV de nuestra era. Mayas y mesopotamios, además, inventaron el cero. Los mayas no le dieron ninguna posibilidad operacional, pero en Mesopotamia si se la dieron (aunque no lo concibieran como un número).

▷ En el s.XVII Blaise Pascal da, por primera vez, una definición general de los sistemas de numeración en base m con $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

▷ **Definición**: llamamos sistema de numeración al conjunto de normas y convenios que se utilizan para escribir cualquier número con un conjunto pequeño de símbolos.

Racionales:

▷ Aunque hoy en día nos parezca contraintuitivo, los racionales fueron descubiertos, asimilados y usados mucho antes que los números negativos. Las explicaciones están relacionadas con la asociación de los números y soluciones de ecuaciones a cantidades reales (ovejas, repartos proporcionales, razones geométricas,...) y en ese contexto los números negativos requieren de un grado de abstracción y generalización al que nos costaría milenios llegar.

▷ Antigüedad: Las fracciones ya eran conocidas en la Antigüedad, pero al no existir un sistema de numeración preciso o apropiado, recibieron durante mucho tiempo notaciones imprecisas, heterogéneas e inadaptadas a las aplicaciones prácticas.
Con el desarrollo de la aritmética y el cálculo se descubrió que las fracciones estaban sujetas a las mismas reglas que los naturales y, por tanto, podían asimilarse a números.
Gracias a esta extensión, los números que antaño sólo servían para hacer recuentos se transformaron en "referencias" adaptadas a diversos usos. De ahora en adelante, no se conformaron con comparar dos magnitudes "a ojo", se las podía dividir (o, al menos, suponerlas divididas) en partes iguales a una magnitud de la misma clase elegida como patrón. Pero, a pesar de este progreso, los antiguos, a causa de sus notaciones imperfectas, no supieron ni unificar la noción de fracción ni construir un sistema coherente para sus unidades de medida.

▷ Babilonios: los babilonios, gracias a su numeración de posición en base sexagesimal, fueron los primeros que dieron a las fracciones una notación racional, convirtiéndolas en fracciones sexagesimales y expresándolas como algo parecido a la forma de expresar fracciones de horas en minutos y segundos: 17 min, 53 seg = 17/60h + 53/3600h. Pero los babilonios no conocieron el uso de la "coma decimal" para diferenciar los enteros de las fracciones sexagesimales de la unidad. De esta manera, la expresión 17;53 podía significar 17h, 53m o 0h, 17m, 53s. Era una notación "flotante" que sólo se podía precisar por el contexto.

▷ Griegos: los griegos, más tarde, intentaron dar una notación general a las fracciones ordinarias, pero como era difícil adaptar su numeración alfabética a esta simbolización, dejaron de intentarlo y adoptaron la notación sexagesimal babilónica.

▷ Hindúes + Árabes: la notación moderna de las fracciones ordinarias se debe a los hindúes que, gracias a su numeración decimal de posición, simbolizaron, más o menos como nosotros hacemos, una cierta fracción. Por ejemplo, para $\frac{27}{724}$ escribían $\begin{matrix}27\\724\end{matrix}$. Más tarde esta notación fue adaptada y perfeccionada por los árabes que inventaron la raya horizontal.

▷ Europa: posteriormente, gracias al descubrimiento de las fracciones llamadas "decimales" se descubrió poco a poco que resultaba práctico prolongar la numeración decimal de posición en el otro sentido, es decir, en términos modernos: representar números "después de la coma". Esto permitió representar todas las fracciones y hacer aparecer a los enteros como fracciones particulares.
En Europa el belga Simón Stévin fue el primero que, en el s.XVI, dio el paso decisivo hacia nuestro actual sistema de notación al escribir, donde nosotros escribíamos: 523,239 → 523 (0) 2(1) 3 (2) 9(3) indicando 523 partes enteras, 2 unidades decimales de primer orden, etc.
Diez años más tarde, el suizo Jost Bürgi lo simplificó escribiendo: $52\overset{\circ}{3}239$, es decir, poniendo encimas de las unidades el sigo (∘).
El mismo año, el italiano Magini sustituyó el redondel por un punto: 523.239 colocado entre las unidades y las décimas (notación que se conserva en los países anglosajones).
La coma que nosotros utilizamos fue ideada por el holandés Wilbord Snellius a principios del s.XVII.

Enteros y el Cero:

▷ China: en ninguna las civilizaciones de la Antigüedad se aceptaron los números negativos como hoy en día lo hacemos. Los griegos, por ejemplo, aunque atisbaron su uso (Diofanto) los rechazaron por no encontrarles ninguna utilidad práctica. Sin embargo, en la antigua China sí se operaba con ellos sin dificultad. Ellos estaban acostumbrados a calcular utilizando dos conjuntos de varillas, uno de color rojo para representar números positivos y otro de color negro para los negativos. Sin embargo, no aceptaron la idea de que un número negativo fuera solución de una ecuación.

▷ India + Árabes: no seria hasta el s.V d.C. cuando los hindúes le dieron al cero el valor de número (cantidad nula) que tiene hoy en día y en la obra del s. VII de Brahmagupta observamos que ya aparece en las operaciones como un número más. En su obra también aparece sistematizada la aritmética de los números negativos.
Todos estos conocimientos (negativos, el cero y el sistema de numeración hindú) pasaron a los árabes por medio de Al-Khwarizmi. Con él se introducen en Europa los anteriores conceptos.

▷ Europa: no sería hasta los siglos XVI y XVII cuando la aritmética y notación de los números enteros fuera ampliamente difundida en Europa a través de los trabajos de Stiffels, Wallis y Descartes.

Reales:

▷ Ya desde la Antigüedad (y antes de que los griegos se dieran cuenta) se descubrió que había magnitudes que no se "podían medir" (como la diagonal de un cuadrado). Entre los griegos esto produjo un gran desasosiego pues muchos creían que los racionales regían el mundo. Sin embargo ya en el siglo V a.C. se había probado que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{17}$ no eran racionales.
Durante siglos esta categoría de números no estuvo bien definida debido a los sistemas de numeración, el asignarles palabras o valores aproximados que no permitían ser relacionados,...
Ya en la Edad Media se descubrió que estos números "*eran identificables a números decimales que no se terminan nunca y cuyas cifras después de la coma no se reproducen en el mismo orden*". Aún y así habrían de pasar algunos siglos para que se dejase de relacionar a estos números con magnitudes. Esta separación no ocurriría hasta el s. XIX.

▷ Weierstrass: fue de los primeros en proponer una definición de los números reales sin la teoría de las magnitudes, construyéndolos a partir de los racionales de manera que sea el mínimo conjunto que los complete. Esta idea la llevará a cabo Dedekin, quien mediante sus "cortaduras" introduce los irracionales y, por tanto, los reales.

▷ Meray da una teoría aritmética sobre los irracionales y Cantor ya introduce los primeros resultados sobre la topología de la recta real (ss. XIX - XX).

▷ Pero los número reales van más allá de la intuición: tenemos los números algebraicos (raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes en $\mathbb{Q}$) que cubren $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{17}$, etc. pero, aún y así, existen números irracionales trascendentes, es decir, que no pueden ser solución a ninguna ecuación polinómica sobre $\mathbb{Q}$. Por ejemplo: π, e, ln(2),... que son números computables, pero éstos no son más que una pequeña parte de todos los reales (de hecho, los números computables son numerables).
Por otro lado, tanto los racionales como los irracionales son densos en $\mathbb{R}$ para la topología usual, (esto es, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$) pero $\mathbb{Q}$ es numerable (biyectivo con $\mathbb{N}$) mientras que $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no lo es.

Complejos:

▷ ss.XVI-XVIII: desde el Renacimiento los matemáticos necesitaron de un cuerpo de números que incluyera raíces cuadradas negativas como, por ejemplo, la ecuación $x^2+1=0$. Para ello introdujeron los números complejos. Para resolver la ecuación anterior introdujeron el número $i=\sqrt{-1}$ (sería Euler en el s.XVIII quien lo llamaría así). Sin embargo, estos nuevos números permanecerían en un nivel puramente manipulativo hasta el s.XIX cuando se formalizarían matemáticamente.

▷ s.XIX: esta formalización vendría de la mano de Gauss y Hamilton quienes los definieron como una pareja de números reales cumpliendo una serie de propiedades. Lo anterior, unido a los trabajos del noruego Wessel - quien encontró la manera de representarlos geométricamente - dieron la base a los usos de los complejos en el campo de la Física: electrostática, magnetismo, hidrodinámica,...y, finalmente, la mecánica cuántica. Y no sólo en la Física, sino en las Matemáticas muchas ramas se desarrollaron gracias a los números complejos: Funciones de Variable Compleja, Análisis Armónico, Geometría,.... El resultado más espectacular que proporcionó la incipiente teoría de los números complejos fue el Teorema Fundamental del Álgebra, asegurando que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Otros conjuntos numéricos

▷ Además de los ya vistos, existen muchos otros conjuntos numéricos que tienen su importancia en las Matemáticas o en otras ciencias como los cuaterniones, los números algebraicos, los números no computables,... que responden a preguntas/problemas que nuestro esquema habitual de números no hace. No entraremos en detalles sobre ellos más que esta mención.

2) Formalización matemática:

Naturales:

$\triangleright$ Podemos construir los números naturales según la axiomática de Peano o a través de equivalencias entre los cardinales de conjuntos finitos. Veamos la primera:

$\triangleright$ Construcción de los naturales con la axiomática de Peano:

1) El cero (“0”) es un número, es decir, $\mathbb{N}$ es no vacío.
2) $\forall x \in \mathbb{N}$ existe uno, y solo un número natural llamado siguiente o sucesor de “x” (en particular, al sucesor de cero lo llamaremos uno “1”).
3) $\forall x \in \mathbb{N}$, cero no es su siguiente.
4) Si los siguientes de dos números son iguales, entonces esos números son iguales.
5) Axioma de inducción completa: si un cierto subconjunto de $\mathbb{N}$ contiene al cero y al siguiente de cualquier número de dicho subconjunto, entonces ese subconjunto es, de hecho, todo $\mathbb{N}$.

$\triangleright$ Si no incluimos el cero como número natural, los tres primeros axiomas quedarían:

1*) $\mathbb{N}$ es no vacío. Al primer natural lo llamamos “1”

2*) $\forall x \in \mathbb{N}$ existe uno, y solo un número natural llamado siguiente o sucesor de “x” (en particular, al sucesor de “1” lo llamaremos dos “2”).

3*) $\forall x \in \mathbb{N}$, “1” no es su siguiente.

Problema: con los números naturales, ecuaciones del tipo $a + x = b$ no tienen solución salvo que $b \geq a$, como consecuencia de que ningún elemento, salvo el cero, es simetrizable para la operación “suma” $\Longrightarrow$ **Solución**: los números enteros.

Enteros:

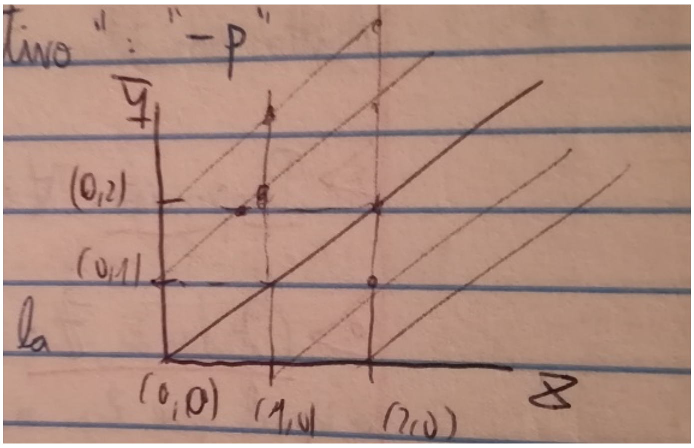
$\triangleright$ En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación binaria: $(a, b)R(c, d) \longleftrightarrow a + d = b + c$ que es, trivialmente, una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica, y transitiva).

$\triangleright$ **Definición**: llamamos conjunto de los Números Enteros ($\mathbb{Z}$) al conjunto $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{R}$

$\triangleright$ Vamos a elegir los representantes canónicos de cada clase. Sea (a, b), tendremos:

a) $a > b \longrightarrow$ tomamos como representante $(n,0)$ donde $a = n + b$ y lo llamaremos “positivo”: $+n$
b) $a = b \longrightarrow$ tomamos como representante el $(0,0)$ y lo llamaremos “cero”: 0
c) $a < b \longrightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ tal que $a + p = b \longrightarrow (0,p)$ y lo llamaremos “negativo”: $-p$

▷ Si consideramos la semirrecta diagonal del primer cuadrante cada clase de equivalencia estará formada por las parejas naturales que están sobre la misma semirrecta paralela a la citada. Los representantes canónicos son los puntos de origen de la semirrecta. Giramos el eje $\overline{OY}$ hasta prolongar el $\overline{OX}$ para obtener la representación usual como una recta.



<u>Problema</u>: consideramos el Dominio de Integridad $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y nos damos cuenta que no siempre existe solución a la ecuación $a \cdot x = b$ con $a,\ b \in \mathbb{Z}$ ($a \neq 0$ para no trivializar) $\Longrightarrow$ **<u>Solución</u>**: los números racionales.

Racionales:

▷ Si tenemos D un dominio de integridad, podemos tomar $D^* = D - \{0\}$ y definimos la siguiente relación de equivalencia:
Dados $a,\ b \in D,\ s,\ \hat{s} \in D^*$ diremos que $(a,\ s) \sim (b,\ \hat{s}) \longleftrightarrow a \cdot \hat{s} = b \cdot s$

▷ La construcción abstracta se puede hacer en el ámbito $S \subset D^*$ (estricto), pero en nuestro caso particular no nos daría lo esperado. Es trivial comprobar que lo anterior es una relación de equivalencia.

▷ **<u>Definición de $\mathbb{Q}$</u>**: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim,\ +,\ \cdot) \equiv (\mathbb{Q},\ +,\ \cdot)$ es el <u>cuerpo de los racionales</u> o <u>cuerpo de las fracciones sobre el dominio de integridad $(\mathbb{Z},\ +,\ \cdot)$</u>.

<u>Problema</u>: $\mathbb{Q}$ no es algebraicamente cerrado (no toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ converge a un racional) y hay números como π, e o raíces cuadradas de primos, usados en multitud de contextos, que no son racionales $\Longrightarrow$ **<u>Solución</u>**: los números reales.

Reales:

▷ Los números reales solucionan los dos problemas que comentamos sobre los racionales. Si nos ciñéramos a la completitud, no sería suficiente pues la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ no es $\mathbb{R}$ sino los números algebraicos (donde sí están $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$ pero no están los números trascendentes como π o e). Es por ello que necesitamos ambas condiciones.

$\triangleright$ Existen múltiples construcciones de los números reales pero la construcción es única salvo isomorfismos. Aquí daremos la empelada por Dedekin usando sus "cortaduras" (pues es una construcción bastante abstracta y que se puede emplear en otros contextos muy generales).

$\triangleright$ La teoría de los números reales en la forma de Dedekin está basada en la idea de cortar el dominio de los números racionales, es decir, dividimos el conjunto de todos los racionales en dos conjuntos no vacíos A y B de manera que cada número racional pertenece a uno sólo de ambos y cualquier elemento $a \in A$ es mayor que cualquier elemento $b \in B$. El conjunto A es llamado la clase alta y el conjunto B la clase baja. El corte puede notarse por $A|B$.

$\triangleright$ **Axioma de Dedekin**: dados dos conjuntos A y B que forman una cortadura de Dedekin, es decir, que cumplen:

a) $\forall x \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x \in A$ o $x \in B$ con $A \cap B = \emptyset$ con A, $B \neq \emptyset$

b) $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$, $x \geq y$

Entonces $\exists_1 \gamma (\in \mathbb{R})$ tal que $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$, $b \leq \gamma \leq a$

$\triangleright$ *Nota*: Es claro que γ va a ser el supremo y el ínfimo de ambos conjuntos.

Problema: en $\mathbb{R}$ no existen las raíces pares de números negativos / logaritmos de números negativos / exponenciales de base negativa /... $\Longrightarrow$ **Solución**: los números complejos.

Complejos:

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$ al conjunto siguiente: $\mathbb{C} = \{(a, b) \text{ tq } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ donde las operaciones suma y producto se definen de la siguiente manera:

a) Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$

b) Producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos unidad imaginaria, i al complejo $(0, 1)$.

$\triangleright$ *Nota*: i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

$\triangleright$ **Definición**: todo número complejo puede escribirse de la forma: $z = (a, b) = a + b \cdot i$. Esta forma se conoce como la forma binómica de z.

▷ **Teorema Fundamental del Álgebra**: todo polinomio con coeficientes complejos de grado "n" tiene exactamente "n" raíces complejas (contando multiplicidad).

Proof. Para demostrarlo usaremos elegantes resultados del Análisis Complejo.
Supongamos $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ que no es constante (grado ≥ 1). Supongamos que no se anula, es decir, que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$
Consideremos $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, función holomorfa y acotada (pues $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$).
En estas condiciones, el Teorema de Liouville nos dice que $g(z)$ es constante $\longrightarrow f$ también lo es, en contra de la hipótesis $\longrightarrow f(z) = (z - \alpha_1) f_1(z)$ para cierto $\alpha_1 \in \mathbb{C}$.
Si $f_1(z) \equiv$ cte, hemos acabado. Si no, aplicamos el mismo razonamiento e iteramos el proceso tantas veces como el grado de $f(z)$.
Al final, obtenemos que $f(z) = C(z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$

□