EXAMEN DE GRADO MEDIO MAYO 2016 COMUNIDAD DE MADRID MATEMÁTICAS

Pelayo Palacio Pérez

****

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1

Hemos hecho una marcha y para llegar a nuestro destino, hemos recorrido por la mañana un tercio del camino; por la tarde, un tercio de lo que faltaba y aún nos quedan 20km para llegar. ¿Cuál es la distancia total a la que está dicho destino desde el inicio de la marcha? (**1,5 puntos**)

¿Cuál es la distancia total a la que está dicho destino desde el inicio de la marcha?

Tenemos un problema de fracciones que vamos a resolver de dos formas: usando ecuaciones (la más sencilla pero más abstracta) y usando fracciones (más complicada pero más visual).

- Antes de resolver el problema escribamos lo que nos dice el enunciado y concretemos las medidas de los distintos tramos.

a) Por la mañana hemos recorrido un tercio: $\Longrightarrow \dfrac{1}{3}$

b) Por la tarde un tercio de lo que quedaba, es decir, un tercio de los dos tercios que nos quedaban por recorrer: $\Longrightarrow \dfrac{1}{3}$ de $\dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \dfrac{2}{9}$

c) Nos quedan 20km

Con esto ya en claro podemos pasar a resolver el problema.

¿Cuál es la distancia total a la que está dicho destino desde el inicio de la marcha?

1) Usando ecuaciones:

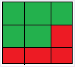
- Sea $x =$ longitud total del camino en km. Obtenemos la siguiente ecuación:
$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} + 20 = x$$
Una ecuación de primer grado que resolvemos por el método habitual.
- $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} + 20 = x \ \left(\text{m.c.m}(3{,}9{,}1){=}9\right)$
$\frac{3x}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{180}{9} = \frac{9x}{9}$
$3x + 2x + 180 = 9x$
$9x - 3x - 2x = 180$
$4x = 180$
$x = \frac{180}{4} = 45$
- <u>Solución</u>: la distancia total del camino es de $x = 45$km.

¿Cuál es la distancia total a la que está dicho destino desde el inicio de la marcha?

2) Usando fracciones:

- Antes de la parada hemos recorrido una cierta fracción del camino: $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+3}{9}=\frac{5}{9}\Longrightarrow$ Por lo que nos quedan $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ del camino aún por recorrer.

  Si dibujamos una figura y la dividimos en nueve partes, habríamos andado 5 (en verde) ya y sólo nos quedarían 4 (en rojo).

  Esas cuatro partes son 20km así que cada una de ellas significa 5km de camino. Como tenemos 9, el total será de $5\cdot 9=45$km en total.Haciendo los cálculos de forma más general:

  $\frac{4}{9}$ son $20\Longrightarrow$ Total $=\frac{20\cdot 9}{4}=45$

- <u>Solución</u>: la distancia total del camino es de $x=45$km.

****

EJERCICIO 2

EJERCICIO 2

Una finca rectangular tiene 2500m de largo y 1800 de ancho:

a) ¿Qué anchura deberá tener una finca de 3750m de largo, para que tenga la misma superficie que la anterior? (**0,5 puntos**).

b) En otra finca cercana a la anterior y también de forma rectangular se cede para calles una superficie en forma de "L" de 7500m^2, resultado de desplazar las lindes de la parcela 20m. Si el rectángulo resultante tiene una longitud de 300m ¿Cuál es la anchura de la parcela resultante? (**1 punto**).

a) ¿Qué anchura deberá tener una finca de 3750m de largo, para que tenga la misma superficie que la anterior?

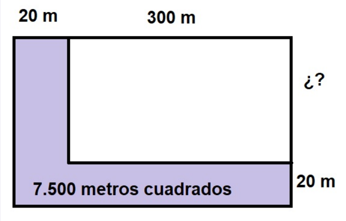
- La fórmula del área de un rectángulo es $A = b \cdot h$, en nuestro caso:

  $A = 2500 \cdot 1800 = 4.500.000\text{m}^2$
- Para que la finca de 3.750m de largo tenga la misma superficie, y suponiendo que también es rectangular, se debe cumplir que:

  $$A = 4.500.000 = 3.750 \cdot h \Longrightarrow h = \frac{4.500.000}{3.750} = 1.200$$
- Solución: el ancho de la finca deberá ser de 1.200 metros.

b) En otra finca cercana a la anterior y también de forma rectangular se cede para calles una superficie en forma de "L" de 7500m^2, resultado de desplazar las lindes de la parcela 20m. Si el rectángulo resultante tiene una longitud de 300m ¿Cuál es la anchura de la parcela resultante?

- Para resolver este apartado no apoyaremos en el siguiente dibujo:



Si dividimos el área para calles en dos rectángulos, uno horizontal de largo $300 + 20 = 320$ metros y de ancho 20 metros y otro vertical de largo 20 metros y ancho "¿?" (justo lo que no sabemos), se tiene que cumplir lo siguiente:

b) En otra finca cercana a la anterior y también de forma rectangular se cede para calles una superficie en forma de "L" de 7500m^2, resultado de desplazar las lindes de la parcela 20m. Si el rectángulo resultante tiene una longitud de 300m ¿Cuál es la anchura de la parcela resultante?

- El área gris es igual a la suma del área del rectángulo horizontal más la del rectángulo vertical, es decir:

  $A = 7.500 = 320 \cdot 20 + 20 \cdot$"¿?". Despejando la incógnita nos queda:

  $$¿? = \frac{7.500 - 320 \cdot 20}{20} = \frac{7.500 - 6.400}{20} = \frac{1.100}{20} = 55$$

- Solución: el ancho de la parcela resultante es de 55 metros.

****

EJERCICIO 3

EJERCICIO 3

Pablo y María tienen, entre los dos, 270 €. Si María le diera a Pablo 10 €, entonces Pablo tendrá la mitad del dinero que le quedaría a María. Averigüe cuánto dinero tiene cada uno (**2 puntos**).

Averigüe cuánto dinero tiene cada uno.

Este en un problema de sistemas de ecuaciones lineales. Vamos a tener dos incógnitas, el dinero de Pablo y el dinero de María así que necesitaremos dos ecuaciones.
La primera será fácil pues nos dice que el total de euros (Pablo + María) es 270.
Para la segunda usaremos la segunda frase.
Si María le da 10€ a Pablo a María le quedan: María - 10 euros.
Y Pablo tendría entonces: Pablo + 10 euros.
Y si ocurre lo anterior Pablo "*tendrá la mitad del dinero que le queda a María*":
$\frac{1}{2}$(María-10 euros).
Llamando x = dinero de Pablo e y = dinero de María:

- $$\left.\begin{array}{c} \overbrace{x+y=270}^{\text{ecuación relativa al total de dinero}} \\ \underbrace{x+10=\frac{1}{2}(y-10)}_{\text{ecuación relativa al intercambio de dinero}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Averigüe cuánto dinero tiene cada uno.

Reordenamos el sistema anterior para presentarlo en la forma habitual:

- $\left.\begin{array}{l} x+y=270 \\ 2x+20=y-10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=270 \\ 2x-y=-30 \end{array}\right\}$ Y lo podemos resolver por el método, por ejemplo, de reducción sumando la primera ecuación con la segunda para hacer desaparecer la variable **y**.

- $x+y+2x-y=270-30 \Longrightarrow 3x=240 \Longrightarrow x=80$
- Sustituyendo el valor de "y" en cualquiera de las ecuaciones hallamos la otra incógnita. Si elegimos la primera:
  $x+y=270 \Longrightarrow 80+y=270 \Longrightarrow y=190$

- <u>Solución:</u> Pablo tenía 80 € y María 190 €.

****

EJERCICIO 4

EJERCICIO 4

Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 Kilómetros.

a) ¿Cuántos litros de gasolina consumirá al recorrer 500 Kilómetros? (**1 punto**).

b) Halle la ecuación que nos da el consumo del automóvil en litros (variable y), en función de los kilómetros recorridos (variable x) (**1 punto**).

a) ¿Cuántos litros de gasolina consumirá al recorrer 500 Kilómetros?

Este es un típico problema de proporcionalidad. En este caso es proporcionalidad directa pues a cuantos más kilómetros hagamos, más gasolina consumirá (asumimos que el consumo se mantiene constante). Podemos resolverlo por los dos métodos siguientes:

1) 800km $\longrightarrow$ 56 l, entonces $56 : 800 = 0{,}07$ l/km $\longrightarrow 0{,}07 \cdot 500 = 35$ litros.

- Solución: consumirá 35 litros.

2) $$\begin{cases} 800\text{km} \longrightarrow 56 \text{ litros} \\ 500\text{km} \longrightarrow x \text{ litros} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{500\text{km} \cdot 56 \text{ litros}}{800\text{km}} = 35 \text{ litros.}$$

- Solución: consumirá 35 litros.

b) Halle la ecuación que nos da el consumo del automóvil en litros (variable y), en función de los kilómetros recorridos (variable x)

En este apartado se nos pide calcular la función que relaciona ambas cantidades. El mismo enunciado nos dice cuál va a ser la variable independiente (x = km recorridos) y la variable dependiente (y = consumo del automóvil). Teniendo en cuenta las relaciones indicadas anteriormente:

- Al saber el consumo de litros por kilómetro (calculado según el primero de los método del apartado anterior): $0{,}07 \cdot x$
- **Solución:** la expresión buscada es: $y = 0,07x$.

****

EJERCICIO 5

EJERCICIO 5

Se ha llevado un control de velocidad en una carretera de la Comunidad de Madrid y se han obtenido los siguientes datos.

Velocidad(Km/h)	70	80	90	100	110	120
Nº de coches	5	19	17	35	22	17

a) Calcule la media y la desviación típica, realizando previamente una tabla para obtener los datos necesarios para el cálculo (**2,5 puntos**).

b) ¿Qué porcentaje circula a más de 90Km/h? (**0,5 puntos**).

Exprese los resultados con una aproximación a las centésimas.

a) Calcule la media y la desviación típica, realizando previamente una tabla para obtener los datos necesarios para el cálculo.

Para construir la tabla nos fijamos en qué valores aparecen (ordenamos de menor a mayor) y las veces que aparecen (frecuencia absoluta). Para el cálculo de la media y la desviación típica añadiremos una serie de columnas que nos ayudarán con los cálculos. Según las vayamos necesitando las añadiremos a la table base que es la siguiente:

VELOCIDAD x_i	Nº DE COCHES (FR. ABSOLUTA) F_i
70	5
80	19
90	17
100	35
110	22
120	17
Total	115 (=5+19+17+35+22+17)

a) Calcule la media y la desviación típica, realizando previamente una tabla para obtener los datos necesarios para el cálculo.

Para calcular la media podemos seguir dos caminos:

1) Sumar todos los datos y dividir entre 115 (no recomendado y poco obvio tal y como se presentan los datos).

2) Usar la fórmula $\bar{x} = \dfrac{\sum_i x_i \cdot F_i}{N}$ que viene a decir que podemos multiplicar cada valor por su frecuencia absoluta, luego sumarlos y dividir entre el total de datos.

   Para este cálculo añadiremos la columna $x_i \cdot F_i$:

x_i	F_i	$x_i \cdot F_i$
70	5	$70 \cdot 5 = 350$
80	19	$80 \cdot 19 = 1.520$
90	17	$90 \cdot 17 = 1.530$
100	35	$100 \cdot 35 = 3.500$
110	22	$110 \cdot 22 = 2.420$
120	17	$120 \cdot 17 = 2040$
Total	115	$11.360\ (= 350 + 1.520 + \ldots + 2040)$

a) Calcule la media y la desviación típica, realizando previamente una tabla para obtener los datos necesarios para el cálculo.

Con el resultado anterior ya podemos aplicar la fórmula:

- $\bar{x} = \dfrac{11.360}{115} = 98{,}7826\ldots \approx 98,78$
- Solución: la media de velocidades es de 98,78 km/h.

a) Calcule la media y la desviación típica, realizando previamente una tabla para obtener los datos necesarios para el cálculo.

La desviación típica es la medida de dispersión por excelencia y nos dice cómo de alejados están nuestros datos de la media. Para ello solemos usar la fórmula: $\sigma = +\sqrt{\dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i}{N}}$, es decir, para cada valor hay que calcular su diferencia con respecto a la media, elevar ese resultado al cuadrado y multiplicarlo por su frecuencia absoluta. Una vez calculado esto para los distintos valores, los sumamos y los dividimos por el total de datos. Por último, extraemos la raíz cuadrada con su valor positivo. Añadimos una columna a la tabla para ayudarnos con los cálculos ($(x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i$):

a) Calcule la media y la desviación típica, realizando previamente una tabla para obtener los datos necesarios para el cálculo.

x_i	F_i	$x_i \cdot F_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i$
70	5	350	$(70 - 98,78)^2 \cdot 5 = 828,2884 \cdot 5 = 4.141,442$
80	19	1.520	$(80 - 98,78)^2 \cdot 19 = 352,6884 \cdot 19 = 6.701,0796$
90	17	1.530	$(90 - 98,78)^2 \cdot 17 = 77,0884 \cdot 17 = 1.310,5028$
100	35	3.500	$(100 - 98,78)^2 \cdot 35 = 1,4884 \cdot 35 = 52,094$
110	22	2.420	$(110 - 98,78)^2 \cdot 22 = 125,8884 \cdot 22 = 2.769,5448$
120	17	2040	$(120 - 98,78)^2 \cdot 17 = 450,2884 \cdot 17 = 7.654,9028$
Total	115	10.160	22.629,566 $(= 4.141,442 + \ldots + 7.654,9028)$

Con estos datos ya podemos aplicar la fórmula:

- $\sigma = +\sqrt{\dfrac{22.629,566}{115}} = +\sqrt{196,7788\ldots} \approx 14,02778\ldots \approx 14,03$
- Solución: la desviación típica es 14,03.

b) ¿Qué porcentaje circula a más de 90Km/h?

Los coches que circulan a más de 90 km/h son los que van a 100 km/h, 110 km/h y 120 km/h.

- Usamos la definición de porcentaje: % de coches a más de 90 km/h =
$$= \frac{\text{coches a 100, 110, 120 km/h}}{\text{total de coches}} = \frac{35+22+17}{115} = \frac{74}{115} = 0,64347\ldots =$$
$$= 64,347\ldots\,\% \approx 64,35\,\%$$
- Solución: el porcentaje de coches a más de 90 km/h es del 64,35 %.