Geometría euclídea. Proyecciones ortogonales.

David Matellano Arroyo

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

16 de mayo de 2024

índice de contenidos

Ver los apéndices

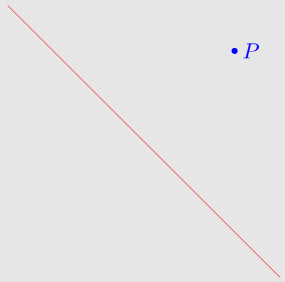
Proyección ortogonal de P sobre una recta

Método del vector normal

Proyección de P sobre r

☞ Dados r y P:

Figuras



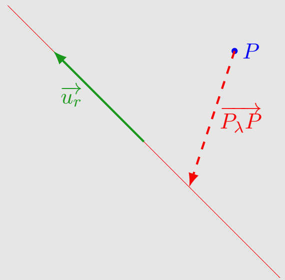
Proyección ortogonal de P sobre una recta

Método del vector normal

Proyección de P sobre r

- Dados r y P:
- Creamos $\overrightarrow{P_\lambda P}$ e imponemos $\vec{u_r} \cdot \overrightarrow{P_\lambda P} = 0$

Figuras



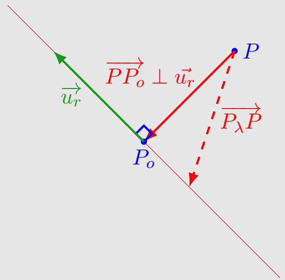
Proyección ortogonal de P sobre una recta

Método del vector normal

Proyección de P sobre r

- Dados r y P:
- Creamos $\overrightarrow{P_\lambda P}$ e imponemos $\vec{u_r} \cdot \overrightarrow{P_\lambda P} = 0$
- Una vez hallado λ, obtenemos P_o.

Figuras



Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda} = P_\lambda - P_r = (-2+3\lambda, 1-2\lambda, -3+\lambda)$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda} = P_\lambda - P_r = (-2+3\lambda, 1-2\lambda, -3+\lambda)$

Imponemos $\vec{u_r} \cdot \vec{u_\lambda} = 0 \Rightarrow 14\lambda - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{11}{14}$

Ejemplo

Ejemplo

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r : $r \equiv \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Obtenemos $\vec{u_r} = (3,-2,1)$ y $P_\lambda = (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda)$

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda} = P_\lambda - P_r = (-2+3\lambda, 1-2\lambda, -3+\lambda)$

Imponemos $\vec{u_r} \cdot \vec{u_\lambda} = 0 \Rightarrow 14\lambda - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{11}{14}$

☞ Con $\lambda = \dfrac{11}{14}$ obtenemos $P_o = \left(\dfrac{19}{14}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{11}{14}\right)$

Ver con WxMaxima

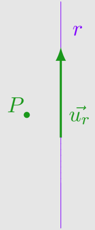
Proyección ortogonal de P sobre una recta

Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

☞ Dados r y P:

Figuras



Proyección ortogonal de P sobre una recta

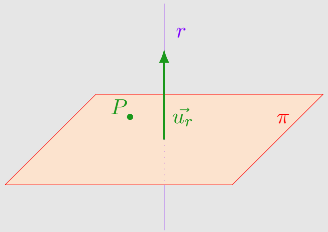
Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

☞ Dados r y P:

Creamos $\pi \perp r$ / $P \in \pi$

Figuras



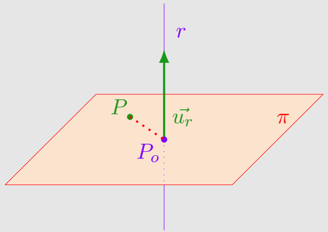
Proyección ortogonal de P sobre una recta

Mediante un plano normal a r

Uso de un plano $\pi \perp r$

- ☞ Dados r y P:
- Creamos $\pi \perp r \; / \; P \in \pi$
- ☞ Hallamos $P_o \equiv \pi \cap r$

Figuras



Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Pautas

Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$

Operaciones

☞ $\vec{n} = (3,-2,1) \to (3,-2,1)\cdot(1,2,3)+d=0$

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Pautas

- Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$
- Hallamos d y obtenemos π

Operaciones

- $\vec{n} = (3,-2,1) \to (3,-2,1) \cdot (1,2,3) + d = 0$
- $d = -2 \to \pi \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$

Mediante un plano normal a r

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Pautas

- Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$
- Hallamos d y obtenemos π
- Obtenemos $P_o \equiv r \cap \pi$

Ver con WxMaxima

Operaciones

- $\vec{n} = (3,-2,1) \to (3,-2,1) \cdot (1,2,3) + d = 0$
- $d = -2 \to \pi \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$
- $(3,-2,1) \cdot (-1+3\lambda, 3-2\lambda, \lambda) - 2 = 0$
- $\lambda = \dfrac{11}{14} \to P_o = \left(\dfrac{19}{14}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{11}{14}\right)$

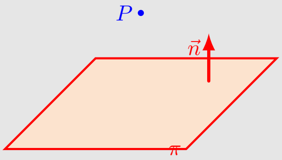
Proyección ortogonal de P sobre un plano

Mediante una recta normal al plano

Hallamos $r \perp \pi \; / \; P \in r$

☞ Dados P y π:

Figuras



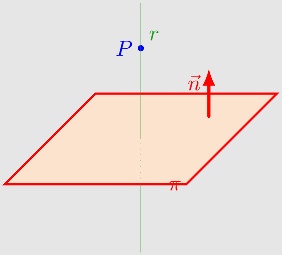
Proyección ortogonal de P sobre un plano

Mediante una recta normal al plano

Hallamos $r \perp \pi \ / \ P \in r$

- Dados P y π:
- Creamos $r \perp \pi \ P \in r$

Figuras



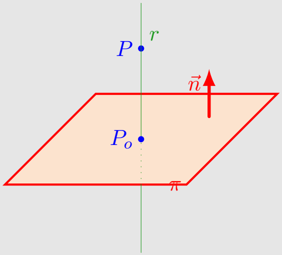
Proyección ortogonal de P sobre un plano

Mediante una recta normal al plano

Hallamos $r \perp \pi \;/\; P \in r$

- Dados P y π:
- Creamos $r \perp \pi \; P \in r$
- Obtenemos $P_o \equiv r \cap \pi$

Figuras



Mediante una recta normal al plano

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Mediante una recta normal al plano

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Pautas

Creamos $r_n \perp \pi \ / \ P \in r_n$

Operaciones

☞ $\vec{r_n} = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$

Mediante una recta normal al plano

Ejemplo

Mediante un plano normal a r

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Pautas

Creamos $r_n \perp \pi \; / \; P \in r_n$

☞ Obtenemos $P_o \equiv r_n \cap \pi$

Operaciones

☞ $\vec{r_n} = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$

☞ $(1,1,1)\cdot(1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda) - 1 = 0$

☞ $\lambda = -\dfrac{5}{3} \rightarrow P_o = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

Ver con WxMaxima

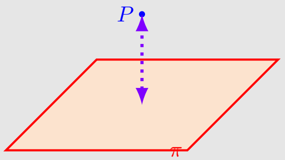
Proyección ortogonal de P sobre un plano

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ⚠ ¡con su signo!

Figuras



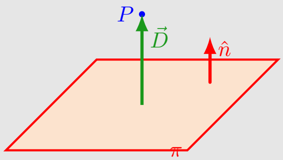
Proyección ortogonal de P sobre un plano

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

- Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ⚠ ¡con su signo!
- ☞ Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

Figuras



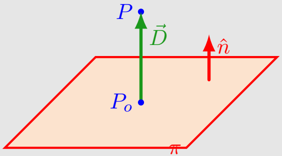
Proyección ortogonal de P sobre un plano

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

- Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ⚠ ¡con su signo!
- ☞ Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
- ☞ Obtenemos $P_o = P - \vec{D}$

Figuras



Proyección ortogonal de P sobre un plano

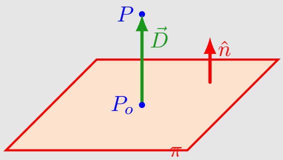
Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

Mediante una traslación con un vector $\vec{D}$

- Calculamos $d = d(P, \pi)$, pero ⚠ ¡con su signo!
  - Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
  - Obtenemos $P_o = P - \vec{D}$
- Si quisiéramos el simétrico $P' = P - 2\vec{D}$

Volver a proyección recta-plano.

Figuras



Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Pautas

Obtenemos $d = d(P,\pi)$, pero con su signo.

Operaciones

$$d = \frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)-1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Sin valor absoluto.

Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Pautas

Obtenemos $d = d(P,\pi)$, pero con su signo.

- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

Operaciones

- $d = \dfrac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

Sin valor absoluto.

- $\vec{D} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$

Mediante una traslación

Ejemplo

Mediante una traslación con un vector $\vec{D} \parallel \vec{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Pautas

- Obtenemos $d = d(P,\pi)$, pero con su signo.
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
- Realizamos la proyección $P_o = P - \vec{D}$

Operaciones

- $d = \dfrac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

Sin valor absoluto.

- $\vec{D} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$
- $P_o = P - \vec{D} = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

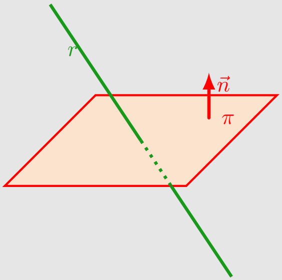
Ver con WxMaxima

Proyección de una recta sobre un plano

Estrategias

- Dados π y r:

Figuras



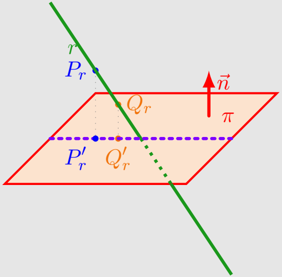
Proyección de una recta sobre un plano

Estrategias

- Dados π y r:

Podemos realizar la proyección de $(P_r, Q_r) \in r$ para obtener r_o

Figuras



Proyección de una recta sobre un plano

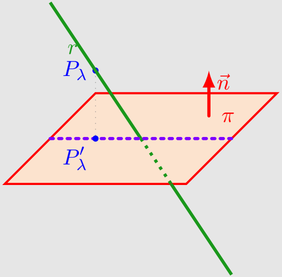
Estrategias

- Dados π y r:

Podemos realizar la proyección de $(P_r, Q_r) \in r$ para obtener r_o

Podemos hallar r_o haciendo la proyección de un punto genérico $P_\lambda \in r$

Figuras

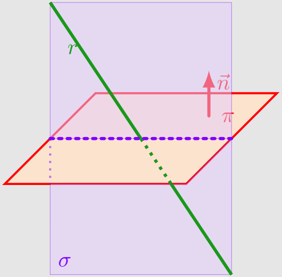


Proyección de una recta sobre un plano

Estrategias

- Dados π y r:
- Podemos realizar la proyección de $(P_r, Q_r) \in r$ para obtener r_o
- Podemos hallar r_o haciendo la proyección de un punto genérico $P_\lambda \in r$
- Podemos hallar r_o como $\pi \cap \sigma \ / \ \sigma \perp \pi$ y $r \subset \sigma$

Figuras



Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

☞ Un primer método sería obtener dos puntos P_r, Q_r y realizar sus proyecciones. Así, $\vec{r_o} = P_{ro} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_{ro}Q_{ro}}$

◂ Recordar proyección $P \rightarrow \pi$.

⏩ Ver con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Veámoslo con el método del punto genérico $P_\lambda \in r$

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Veámoslo con el método del punto genérico $P_\lambda \in r$

Proyección de un punto genérico de r

Creamos $P_\lambda \in r$

Operaciones

☞ $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Veámoslo con el método del punto genérico $P_\lambda \in r$

Proyección de un punto genérico de r

Creamos $P_\lambda \in r$

☞ Hallamos $d = D(P_\lambda, \pi)$

Operaciones

☞ $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$

☞ $d_\lambda = \dfrac{\vec{n} \cdot P_\lambda + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{3\lambda + 1}{\sqrt{3}}$

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Veámoslo con el método del punto genérico $P_\lambda \in r$

Proyección de un punto genérico de r

Creamos $P_\lambda \in r$

- Hallamos $d = D(P_\lambda, \pi)$
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

Operaciones

- $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$
- $d_\lambda = \dfrac{\vec{n} \cdot P_\lambda + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{3\lambda + 1}{\sqrt{3}}$
- $\vec{D} = \dfrac{3\lambda + 1}{3} \cdot (1, 1, 1)$

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Veámoslo con el método del punto genérico $P_\lambda \in r$

Proyección de un punto genérico de r

Creamos $P_\lambda \in r$

- Hallamos $d = D(P_\lambda, \pi)$
- Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$
- Realizamos la proyección $r_o = P_\lambda - \vec{D}$

Operaciones

- $P_\lambda = (2\lambda + 1, \lambda, 1)$
- $d_\lambda = \dfrac{\vec{n} \cdot P_\lambda + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{3\lambda + 1}{\sqrt{3}}$
- $\vec{D} = \dfrac{3\lambda + 1}{3} \cdot (1, 1, 1)$
- $r_o = \left(\lambda + \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3} - \lambda\right)$

Ver con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Obtengamos r_o como intersección de dos planos.

$r_o \equiv \pi \cap \sigma$

¡Método no válido si $r \perp \pi$!

Creamos $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r}$

Operaciones

☞ $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r} = (-1, 2, -1)$

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Obtengamos r_o como intersección de dos planos.

$r_o \equiv \pi \cap \sigma$

¡Método no válido si $r \perp \pi$!

Creamos $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r}$

☞ Imponemos que $P_r \in \sigma \rightarrow d_s = -\vec{n\sigma} \cdot \vec{P_r}$

Operaciones

☞ $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r} = (-1, 2, -1)$

☞ $d_s = -(-1, 2, -1) \cdot (1, 0, 1) = 2$

Proyección ortogonal de r sobre π

Ejemplo

Enunciado

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de r sobre π.

Obtengamos r_o como intersección de dos planos.

$r_o \equiv \pi \cap \sigma$

¡Método no válido si $r \perp \pi$!

Creamos $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r}$

- Imponemos que $P_r \in \sigma \to d_s = -\vec{n\sigma} \cdot \vec{P_r}$
- Creamos $\sigma \to r_o \equiv \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases}$

Operaciones

- $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r} = (-1, 2, -1)$
- $d_s = -(-1,2,-1) \cdot (1,0,1) = 2$
- $\sigma \equiv -x + 2y - z + 2 = 0$

$$r_o \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Ver con WxMaxima

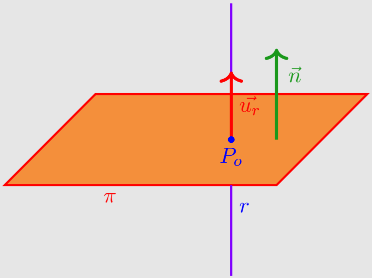
Proyección de una recta sobre un plano

Recta perpendicular al plano

Casos especiales

⚠ Si $r \perp \pi \Rightarrow r_o$ es el punto de corte de r y π

Figuras



Proyección de una recta sobre un plano

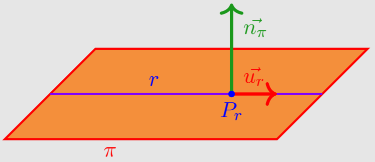
Recta perpendicular al plano

Casos especiales

⚠ Si $r \perp \pi \Rightarrow r_o$ es el punto de corte de r y π

⚠ Si $r \subset \pi \Rightarrow r_o \equiv r$

Figuras



Apéndices

Retornar al índice principal

Cálculos con WxMaxima

Distancia entre puntos

Ajustes previos

- Hemos de cargar el paquete **vect**

(% i4) load(vect)$/* Carga paquete vectores*/

Cálculos con WxMaxima

Distancia entre puntos

Ajustes previos

- Hemos de cargar el paquete **vect**
- Además, es útil crear funciones para el producto vectorial, mixto y $|\overrightarrow{u}|$.

```
(%i4)  load(vect)$/* Carga paquete vectores*/
        vect(u,v):=express(u~ v)$/* Producto vectorial*/
       modulo(u):=sqrt(u.u)$/* Cálculo de |u|*/
       pmixto(u,v,w):=determinant(matrix(u,v,w))$/* producto mixto*/
"vect: warning: removing existing rule or rules for "."."
```

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos las coordenadas paramétricas de r :

```
(%i3) P:[1,2,3]$r:[(x-2)/3=(1-y)/2,(1-y)/2=z-1]$var:[x,y,z]$
(%i4) linsolve(r,var);
```

(%o4) $[x = 3\,\%r1 - 1, y = 3 - 2\,\%r1, z = \%r1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Obtenemos $\vec{u_r}$ y P_λ

(% i6) Pλ:[3*λ-1,3-2*λ,λ];ur:[3,-2,1];

(Pλ) $[3\lambda-1, 3-2\lambda, \lambda]$

(ur) $[3, -2, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Hallamos $\vec{u_\lambda}$

(% i7) uλ:Pλ-P;

(uλ) $[3\lambda-2, 1-2\lambda, \lambda-3]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Imponemos y resolvemos $\vec{u_r} \cdot \vec{u_\lambda} = 0$

(% i8) e1:uλ.ur=0,expand;

(e1) $14\lambda - 11 = 0$

(% i9) sol:solve(e1);

(sol) $\left[\lambda = \dfrac{11}{14}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\vec{u_\lambda} \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ $P_o = r(\lambda)$

Volver a la presentación.

(% i10) Po:at(Pλ,sol);

(Po) $\left[\frac{19}{14}, \frac{10}{7}, \frac{11}{14}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ r en paramétricas: P_λ

(%i3) P:[1,2,3]$r:[(x-2)/3=(1-y)/2,(1-y)/2=z-1]$var:[x,y,z]$
(%i4) linsolve(r,var);

(%o4) $[x = 3\,\%\mathrm{r1} - 1, y = 3 - 2\,\%\mathrm{r1}, z = \%\mathrm{r1}]$

(%i6) Pλ:[3*λ-1,3-2*λ,λ];ur:[3,-2,1];

(Pλ) $[3\lambda - 1, 3 - 2\lambda, \lambda]$

(ur) $[3, -2, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

Hacemos $\vec{n} = \vec{u_r}$ y que $P \in \pi$

(% i11) pi:ur.var+d=0;

(pi) $z - 2y + 3x + d = 0$

(% i12) e2:ur.P+d=0,expand;

(e2) $d + 2 = 0$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Hallamos d y obtenemos π

(% i13) sol:solve(e2);

(sol) $[d=-2]$

(% i14) pi:ur.var-2=0;

(pi) $z-2y+3x-2=0$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre r

Utilizando $\pi \perp r$

- Dado $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2} = z-1$, calcule la proyección ortogonal de P sobre r.

☞ Obtenemos $P_o \equiv r \cap \pi$.

◂ Volver a la presentación.

(% i16) e3:ur.Pλ-2=0,expand; solve(e3);

(e3) $14\lambda - 11 = 0$

(% o16) $\left[\lambda = \dfrac{11}{14}\right]$

(% i17) Po:at(Pλ, %);

(Po) $\left[\dfrac{19}{14}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{11}{14}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Creamos $r_n \perp \pi$ / $P \in r_n$

(% i26) rn:P+λ*n;

(rn) $[\lambda+1, \lambda+2, \lambda+3]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Utilizando $r_n \perp \pi$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

☞ Obtenemos $P_o \equiv r_n \cap \pi$

◂ Volver a la presentación.

(% i28) e1:n.rn+d=0,expand;
sol:solve(e1);

(e1) $3\lambda+5=0$

(sol) $\left[\lambda=-\left(\frac{5}{3}\right)\right]$

(% i29) Po:at(rn,sol);

(Po) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right),\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

Obtenemos $d = d(P, \pi)$, pero con su signo.

```
(%i30) d:(n.P+d)/modulo(n) /* Sin valor absoluto */;
```

(d) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

☞ Creamos $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

(% i31) D:d*n/modulo(n);

(D) $\left[\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de P sobre un plano

Utilizando $\vec{D} = d \cdot \hat{n}$

- Dado el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$, calcule la proyección ortogonal de P sobre π.

☞ Realizamos la proyección $P_o = P - \vec{D}$

Volver a la presentación.

(% i32) 'Po=P-D;

(% o32) $\mathrm{Po} = \left[-\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

(% i36) pi:x+y+z-1=0$ r:[1,0,1]+λ*[2,1,0]$ n:[1,1,1]; d:-1$

(n) $[1, 1, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

Obtenemos $P_r, Q_r \in r$.

(% i37) P:at(r,λ=0);

(P) $[1, 0, 1]$

(% i38) Q:at(r,λ=1);

(Q) $[3, 1, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Hallamos P_o

(%i39) d1:(n.P+d)/modulo(n);

(d1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%i40) Po:P-d1*n/modulo(n);

(Po) $\left[\frac{2}{3}, -\left(\frac{1}{3}\right), \frac{2}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Hallamos Q_o

(% i41) d2:(n.Q+d)/modulo(n);

(d2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(% i42) Qo:Q-d2*n/modulo(n);

(Qo) $\left[\frac{5}{3}, -\left(\frac{1}{3}\right), -\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Creamos $\vec{u_o} = \overrightarrow{P_o Q_o}$

(% i43) uo:Qo-Po;

(uo) $[1, 0, -1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre π

Utilizando $P_r, Q_r \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Obtenemos $r_o \equiv P_o + \mu \cdot \overrightarrow{u_o}$

◂ Volver a la presentación.

(% i44) ro:Po+μ*uo;

(ro) $\left[\mu + \frac{2}{3}, -\left(\frac{1}{3}\right), \frac{2}{3} - \mu\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

(% i48) pi:x+y+z-1=0$ r:[1,0,1]+λ*[2,1,0]$ n:[1,1,1]; d:-1$

(n) $[1, 1, 1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

Obtenemos $P_\lambda \in r$.

(% i49) Pλ:r;/* Punto genérico de r*/

(Pλ) $[2\lambda + 1 , \lambda , 1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Hallamos $d_\lambda = d(P_\lambda, \pi)$

```
(%i50) dλ:(n.Pλ+d)/modulo(n) /* distancia de cualquier punto de r a pi */;
```

(dλ) $\dfrac{3\lambda+1}{\sqrt{3}}$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Creamos $\overrightarrow{D_\lambda} = d\lambda \cdot \hat{n}$

(% i51) Dλ:dλ*n/modulo(n);

(Dλ) $\left[\frac{3\lambda+1}{3}, \frac{3\lambda+1}{3}, \frac{3\lambda+1}{3}\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando $P_\lambda \in r$

- Dado el plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$ y la recta $\vec{r}=(1,0,1)+\lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Trasladamos P_λ con $\overrightarrow{D_\lambda}$, obteniendo r_o

Volver a la presentación.

(% i52) ro=r-Dλ,expand;

(% o52) $\left[\mu+\frac{2}{3},-\left(\frac{1}{3}\right),\frac{2}{3}-\mu\right]=\left[\lambda+\frac{2}{3},-\left(\frac{1}{3}\right),\frac{2}{3}-\lambda\right]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando un plano σ

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

(% i57) pi:x+y+z-1=0$ n:[1,1,1]; d:-1$ ur:[2,1,0];Pr:[1,0,1];

(n) $[1\,,1\,,1]$

(ur) $[2\,,1\,,0]$

(Pr) $[1\,,0\,,1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando un plano σ

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

Obtenemos $\vec{n_\sigma} = \vec{n} \times \vec{u_r}$.

(% i58) ns:vect(n,ur);

(ns) $[-1\,,2\,,-1]$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando un plano σ

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Hallamos $d_\sigma = -\vec{n_\sigma} \cdot P_r$

(%i59) ds:-ns.Pr;

(ds) 2

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando un plano σ

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Creamos el plano σ

(% i60) σ:ns.[x,y,z]+ds=0;

$(\sigma) \quad -z + 2y - x + 2 = 0$

Cálculos con WxMaxima

Proyección ortogonal de r sobre un plano π

Utilizando un plano σ

- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ y la recta $\vec{r} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, calcule la proyección ortogonal de la recta r sobre π.

☞ Expresamos r_o en paramétricas.

Volver a la presentación.

(% i61) ro:[pi,σ];

(ro) $[z + y + x - 1 = 0\, , - z + 2y - x + 2 = 0]$