

EXAMEN DE GRADO MEDIO
MAYO 2015
COMUNIDAD DE MADRID
MATEMÁTICAS

Pelayo Palacio Pérez

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1

María, Paula y Elisa han organizado un viaje para los alumnos de un instituto. Han cobrado 1500 euros por el trabajo realizado. María trabajó 12 días, Paula 8 días y Elisa 10 días,

- a) ¿Cuánto dinero le corresponderá a cada una? (1 punto).

Al viaje han ido 270 estudiantes en total, de los que $\frac{1}{6}$ son de 3º ESO, $\frac{2}{5}$ de 4º ESO y el resto de Bachillerato.

- b) ¿Qué fracción del total son de Bachillerato? (1 punto).

- c) ¿Cuántos estudiantes han ido de cada curso? ¿Qué porcentaje de los alumnos que han ido al viaje son de 3º y 4º de ESO? Exprese el resultado con una aproximación a las centésimas (1 punto).

a) ¿Cuánto dinero le corresponderá a cada una?

- Este es un problema de repartos proporcionales directos. La idea es repartir el dinero de forma proporcional a todos los días trabajados (la suma de los días) y después a cada organizadora le corresponderá esa cantidad multiplicada por el número de días trabajados. Hecha esta aclaración:

- Dinero por día = $\frac{1.500}{12 + 8 + 10} = \frac{1.500}{30} = 50 \text{ €}$

Para María: $50 \cdot 12 = 600$

Para Paula: $50 \cdot 8 = 400$

Para Elisa: $50 \cdot 10 = 500$

- Solución: a María le corresponderán 600 €, a Paula 400 € y a Elisa 500 €.

Nota: obsérvese que $600 + 400 + 500 = 1.500$, que es el monto original.

b) Al viaje han ido 270 estudiantes en total, de los que $\frac{1}{6}$ son de 3º ESO, $\frac{2}{5}$ de 4º ESO y el resto de Bachillerato. ¿Qué fracción del total son de Bachillerato?

- Para calcular la fracción de alumnos que son de Bachillerato hay que restar al total, la fracción unidad, la suma de las fracciones que representan a los alumnos de 3º y 4º ESO.

$$1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5} \right) = \{\text{m.c.m.}(6,5)=30\} = 1 - \left(\frac{5}{30} + \frac{12}{30} \right) = 1 - \left(\frac{17}{30} \right) =$$

$$= 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$$

- Solución: la fracción del total que son de Bachillerato es de $\frac{13}{30}$

Nota: si sumamos $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{13}{30} = \frac{30}{30} = 1$ que es el total.

c) ¿Cuántos estudiantes han ido de cada curso? ¿Qué porcentaje de los alumnos que han ido al viaje son de 3° y 4° de ESO? Exprese el resultado con una aproximación a las centésimas.

- Como tenemos 270 alumnos en total calculamos directamente los estudiantes de cada curso:

$$3^{\circ} \text{ ESO: } \frac{1}{6} \text{ de } 270 = \frac{1 \cdot 270}{6} = 45$$

$$4^{\circ} \text{ ESO: } \frac{2}{5} \text{ de } 270 = \frac{2 \cdot 270}{5} = 108$$

$$\text{Bachillerato: } \frac{13}{30} \text{ de } 270 = \frac{13 \cdot 270}{30} = 117$$

- Solución: de 3° ESO han ido 45 alumnos, de 4° ESO han ido 108 alumnos y de Bachillerato han ido 117 alumnos.

Nota: si sumamos $45+108+117 = 270$ que es el número de estudiantes.

c) ¿Cuántos estudiantes han ido de cada curso? ¿Qué porcentaje de los alumnos que han ido al viaje son de 3º y 4º de ESO? Exprese el resultado con una aproximación a las centésimas.

- Para la segunda pregunta usamos la definición de porcentaje: % de alumnos de 3º y 4º de ESO =

$$= \frac{\text{alumnos de 3º ESO} + \text{alumnos de 4º ESO}}{\text{total de alumnos}} = \frac{45 + 108}{270} =$$

$$= \frac{153}{270} = 0,5666666\dots = 56,6666\dots \% \approx 56,67 \%$$

- Solución: el porcentaje de alumnos de 3º y 4º de ESO es del 56,67%.

EJERCICIO 2

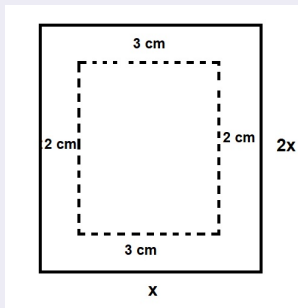
EJERCICIO 2

La página de un libro mide el doble de alto que de ancho, los márgenes laterales miden 2cm cada uno, y los márgenes superior e inferior 3cm.

- Expresa la superficie total de la página en lenguaje algebraico (**0,5 puntos**).
- Expresa la superficie útil de papel (lo que queda dentro de los márgenes) (**0,5 puntos**).
- Si la página del libro mide 10cm de ancho, ¿qué superficie útil tiene? (**0,5 puntos**).

a) Exprese la superficie total de la página en lenguaje algebraico.

Para resolver esta pregunta realizamos un dibujo en el colocamos los datos que nos han dado:



- El área de un rectángulo es base por altura. En este caso: $A_{\text{total}} = x \cdot 2x$
- Solución: la superficie total de la página es de $2x^2\text{ cm}^2$.

b) Exprese la superficie útil de papel (lo que queda dentro de los márgenes).

- Usando el dibujo anterior como referencia vemos que el ancho útil es el que nos queda tras quitar al ancho total (x) 4 centímetros (2 del margen izquierdo y 2 del margen derecho), así pues:

Ancho útil: $x - 4$

- De manera análoga razonamos que el alto útil es el alto total ($2x$) menos 6 centímetros (3 del margen superior y 3 del inferior), así pues:

Alto útil: $2x - 6$

El área del rectángulo será de: $A_{\text{útil}} = (x - 4) \cdot (2x - 6)$

- Solución: la superficie útil es de $(x - 4)(2x - 6)$ cm².

c) Si la página del libro mide 10cm de ancho, ¿qué superficie útil tiene?

- Como tenemos el valor del ancho total tenemos el valor de 'x'. Sin más que sustituir en la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$A_{\text{útil}} = (10 - 4) \cdot (2 \cdot 10 - 6) = 6 \cdot 14 = 84$$

- Solución: la superficie útil de la página es de 84 cm².

EJERCICIO 3

EJERCICIO 3

Un taller de lavado de coches ofrece dos tipos de tarifa:

TIPO I) 12 euros por hacerse socio y 6 euros por lavado durante un año.

TIPO II) Sin hacerse socio, 8 euros por cada lavado.

- a) Escriba la función que represente el número de lavados en función del precio, para cada tipo de tarifa (**1,5 puntos**).
- b) ¿Qué tipo de tarifa es más conveniente según el número de lavados realizados al año? Justifique la respuesta (**1 punto**).

a) Escriba la función que represente el número de lavados en función del precio, para cada tipo de tarifa.

En este apartado se nos pide calcular la función que relaciona ambas cantidades. Del enunciado deducimos que la variable independiente va a ser $x = n^\circ$ de lavados durante un año y la variable dependiente $y =$ importe de la tarifa. Hay que tener en cuenta que en la opción TIPO I) hay un pago inicial que hay que tener en cuenta. Teniendo en cuenta las relaciones indicadas anteriormente:

- Opción TIPO I): $y = f(x) = 12 + 6 \cdot x$
- Opción TIPO II): $y = g(x) = 8 \cdot x$

- **Solución:** para la opción TIPO I) la expresión es: $y = 12 + 6x$ y para la opción TIPO II) es: $y = 8x$

b) ¿Qué tipo de tarifa es más conveniente según el número de lavados realizados al año? Justifique la respuesta.

La opción TIPO II) sale más rentable para pocos lavados pues empezamos sin pagar el importe fijo. Sin embargo, como el precio por lavado es menor en la opción TIPO I) a la larga esta opción saldrá más barata.

Para saber en qué momento se produce el cambio habrá que ver en qué momento ambos presupuestos son iguales y, a partir de ahí, la opción TIPO I saldrá más barata.

- Resolvemos: $12 + 6 \cdot x = 8 \cdot x$

$$12 = 8x - 6x$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

- **Solución:** con el número anterior podemos decir que:
 - Si lavamos el coche menos de 6 veces al año la opción TIPO II sale más rentable.
 - Si lavamos el coche 6 veces al año da igual qué opción elijamos pues ambas cuestan lo mismo (48€ exactamente).
 - Si lavamos el coche más de 6 veces al año la opción TIPO I sale más rentable.

EJERCICIO 4

EJERCICIO 4

El departamento de Lengua de un instituto decide hacer una prueba de ortografía a un grupo de 30 alumnos de 4º de ESO. El número de faltas ortográficas cometidas al hacer un escrito se refleja en la siguiente tabla

Nº de faltas	0	1	2	3	4	5	6	8
Alumnos	4	3	4	6	8	2	2	1

- a) Calcule la media, la desviación típica y el coeficiente de variación (**2,5 puntos**).
- b) ¿Qué porcentaje de alumnos han cometido al menos tres faltas? (**0,5 puntos**).

Expresé los resultados con una aproximación a las centésimas.

a) Calcule la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Las fórmulas que vamos a aplicar para calcular los parámetros pedidos son:

- a) Media: $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i \cdot F_i}{N}$ (multiplicar cada valor por su frecuencia absoluta, luego sumarlos y dividir entre el total de datos).
- b) Desviación típica: $\sigma = +\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i}{N}}$ (restar a cada valor el valor de la media, elevar ese resultado al cuadrado, multiplicarlo por su frecuencia absoluta, luego sumarlos, dividir por el total de datos y extraer la raíz cuadrada con su valor positivo.).
- c) Coeficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|}$ (dividir la desviación típica entre el valor absoluto de la media si esta no es cero)

Para llevar a cabo lo anterior necesitaremos crear una tabla de datos con las columnas siguiente: variable (x_i), frecuencias absolutas (F_i), $x_i \cdot F_i$ y $(x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i$

a) Calcule la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Creamos la tabla con las columnas anteriormente citadas:

x_i	F_i	$x_i \cdot F_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i$
0	4	$0 \cdot 4 = 0$	$(0 - 3,03)^2 \cdot 4 = 9,1809 \cdot 4 = 36,7236$
1	3	$1 \cdot 3 = 3$	$(1 - 3,03)^2 \cdot 3 = 4,1209 \cdot 3 = 12,3627$
2	4	$2 \cdot 4 = 8$	$(2 - 3,03)^2 \cdot 4 = 1,0609 \cdot 4 = 4,2436$
3	6	$3 \cdot 6 = 18$	$(3 - 3,03)^2 \cdot 6 = 0,0009 \cdot 6 = 0,0054$
4	8	$4 \cdot 8 = 32$	$(4 - 3,03)^2 \cdot 8 = 0,9409 \cdot 8 = 7,5272$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$	$(5 - 3,03)^2 \cdot 2 = 3,8809 \cdot 2 = 7,7618$
6	2	$6 \cdot 2 = 12$	$(6 - 3,03)^2 \cdot 2 = 8,8209 \cdot 2 = 17,6418$
8	1	$8 \cdot 1 = 8$	$(8 - 3,03)^2 \cdot 1 = 24,7009 \cdot 1 = 24,7009$
Total	30	91	110,9662

a) Calcule la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Aplicamos las fórmulas

- Media: $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i \cdot F_i}{N} = \frac{91}{30} = 3,0333 \dots \approx 3,03$

- Desviación típica:

$$\sigma = +\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot F_i}{N}} = \sqrt{\frac{110,9662}{30}} = 1,9232 \dots \approx 1,92$$

- Coeficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} = \frac{1,92}{|3,03|} = 0,6336 \dots \approx 0,63$

- Solución: la media es 3,03, la desviación típica es 1,92 y el coeficiente de variación es 0,63.

b) ¿Qué porcentaje de alumnos han cometido al menos tres faltas?

Los estudiantes que han cometido al menos tres faltas son los que han cometido 4, 5, 6 u 8 faltas.

- Usamos la definición de porcentaje: % de estudiantes que cometen más de 3 faltas =

$$= \frac{\text{alumnos que cometen 4, 5, 6 u 8 faltas}}{\text{total de alumnos}} = \frac{8 + 2 + 2 + 1}{30} = \frac{13}{30} = 0,4333\dots = 43,33\dots \%$$

- Solución: el porcentaje de alumnos que han cometido más de 3 faltas es del 43,33 %.