# TEMA 24: FUNCIONES EN FORMA DE TABLA. INTERPOLACIÓN POLINÓMICA. INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN DE DATOS.

# TIEMPO: 81 — 80

## Esquema

1) Introducción
   1.1) Interpolación, ¿qué es y por qué?
   1.2) Primer intento
   1.3) Interpolación, extrapolación, error
2 Teorema de existencia y unicidad
   2.1) Teorema (existencia y unicidad)
   2.2) Interpolación lineal
   2.3) Interpolación cuadrática
3) Interpolación de Lagrange
   3.1) Tres valores + Definición
   3.2) Casos generales + Definición
4) Diferencias divididas
   4.1) Método de las aproximaciones sucesivas
      4.1.1) Definición
   4.2) Método de las diferencias divididas
      4.2.1) Definición
      4.2.2) Fórmula de Newton
5) Operadores
   5.1) Definición + ejemplo + propiedades
   5.2) Operador diferencia progresiva: propiedades
   5.3) Definición: $\triangle^n$
   5.4) Polinomio de interpolación de Newton para diferencias progresivas
      5.4.1) Definición
6) Error de interpolación
   6.1) Teorema
   6.2) Cota del error
   6.3) Polinomio de Tchebytchev
   6.4) Ejemplo de Runge

# 1) Introducción:

▷ Interpolación, ¿qué es y por qué?: el problema de la interpolación corresponde al que a menudo se plantea cuando se dispone de una tabla de valores de una función o ley experimental y se desean obtener valores de dicha función que no figuran en la tabla.

▷ Si formulamos la cuestión en términos más precisos: si disponemos de "$n$+1" puntos $(x_0, y_0), \ldots,$ $, \ldots (x_n, y_n)$, se trata de obtener una función $f(x)$ que tome los valores $f(x_j) = y_j$, $\forall j = 0, ..., n$ y de tal manera que sea posible calcular los valores de $f(x)$ correspondientes a valores intermedios de la variable "$x$". Así pues, a diferencia del ajuste de funciones, donde sólo se exige que se verifiquen ciertos criterios de aproximación, en el caso de la interpolación se impone la condición de que la gráfica de la función construida pase por los puntos dados.

▷ Entre todas las funciones que pudieran pasar por los "$n + 1$" puntos, escogeremos las más elementales, esto es, las polinómicas, teniendo en cuenta el Teorema de Weierstrass que dice que toda función continua en $[a, b]$ es límite uniforme de polinomios (diferentes maneras de buscar esos polinomios las veremos en este tema).

▷ Primer intento: obviamente, si disponemos de "$n + 1$" puntos tenemos las condiciones para hallar un polinomio con "$n + 1$" coeficientes (es decir, de grado "$n$') y bastaría resolver un sistema $(n + 1) \times (n + 1)$. Esta complicación cuando $n \to \infty$ nos llevará a abordar el problema mediante otros procedimientos.

▷ Interpolación, extrapolación, error: si se trata de obtener el valor de la imagen de un punto situado en $[x_0, x_n]$ diremos que seguimos un proceso de interpolación. Cuando se trata de hallar ese valor fuera del intervalo dado, diremos que seguimos un proceso de extrapolación. La precisión de ambos métodos dependerá de la aproximación de la nueva abscisa con respecto a $x_0, \ldots, x_n$. Terminaremos el tema con una discusión acerca del error cometido con los métodos antes mencionados.

## 2) Teorema de existencia y unicidad:

▷ **<u>Teorema</u>**: dados $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, "$n+1$" puntos en el plano, existe una única función polinómica de grado "$n$" que pasa por las abscisas $x_0, \ldots, x_n$ y las ordenadas $y_0, \ldots, y_n$ (es decir, $f(x_j) = y_j$, $\forall j = 0, \ldots, n$).

*Proof.* Sea $y = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ con $a_n \neq 0$. Si imponemos las condiciones obtenemos:

$$\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n \\ \vdots \\ y_n = a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n \end{cases}$$

donde tenemos "$n+1$" incógnitas, los coeficientes $a_j$. El determinante de la matriz de coeficientes es un determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}} (x_i - x_j) = (x_1 - x_0)\cdots(x_n - x_0)(x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \neq 0$$

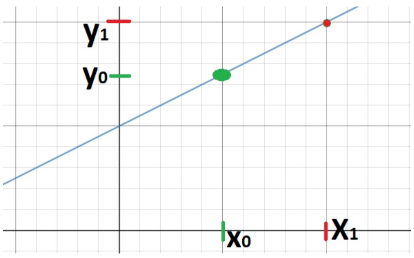
por ser $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$.
Por tanto el sistema es compatible determinado $\Rightarrow \exists_1$ solución $(a_0, \ldots, a_n) \Rightarrow \exists_1 f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ cumpliendo que $f(x_j) = y_j$, $\forall j = 0, ...n$.

□

▷ *Nota*: este teorema, además de asegurar la existencia y unicidad, nos da un método constructivo para hallar dicho polinomio (aunque en general será muy laborioso). Vamos a ver dos ejemplos particulares: la interpolación lineal y la cuadrática y después generalizaremos.

▷ <u>Interpolación lineal</u>: dados los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$ con $x_0 < x_1$, teorema anterior nos asegura que existe una única recta que pasa por ellos.
La pendiente de la recta es $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, luego la recta pedida es:

$$f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$




▷ <u>Interpolación cuadrática</u>: dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2)$ no alineados y de abscisa distinta, existe una única función cuadrática que pasa por ellos. Si aplicamos el método del teorema nos quedará: dada $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} y_0 = a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c \\ y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \\ y_2 = a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c \end{cases}$$

Resolvemos este sistema compatible determinado y hallamos los coeficientes $a$, $b$ y $c$. Vemos ya que este método se complica ya si los valores $(x_j, y_j)$ son un poco rebuscados. Basándonos en este teorema buscaremos un método más general en las próximas secciones.

# 3) Interpolación de Lagrange:

▷ Consideremos tres valores de una función "$f$", $\{f(x_0), f(x_1), f(x_2)\}$ de tal forma que los puntos $(x_j, f(x_j))$ no estén alineados. La función:

$$f_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \text{ verifica:}$$

a) "$f_0(x)$" es una función polinómica de segundo grado.

b) $f_0(x_0) = 1$

c) $f_0(x_1) = f_0(x_2) = 0$

Análogamente, las funciones $f_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $f_0(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ verifican que son de segundo grado, que $f_j(x_j) = 1$ y que $f_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$.

Construimos $P(x) = f(x_0) \cdot f_0(x) + f(x_1) \cdot f_1(x) + f(x_2) \cdot f_2(x)$ que es un polinomio de grado dos que pasa por $(x_j, f(x_j)) \longrightarrow$ Es el polinomio que buscábamos y que nos da el teorema.

▷ **Definición**: al polinomio $P(x)$ se le llama interpolador de Lagrange para tres puntos.

▷ *Nota*: si los puntos estuvieran alineados, $P(x)$ sería una recta.

▷ Si tenemos "$n+1$" valores de "$f$": $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, $x_0 < \ldots < x_n$, entonces las funciones:

$$f_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

verifican las tres condiciones:

a) $f_i(x)$ es un polinomio de grado "$n$".

b) $f_i(x_i) = 1$

c) $f_i(x_j) = 0$, $\forall j \neq i$

▷ **Definición**: la función polinómica $P(x) = f(x_0) \cdot f_0(x) + \ldots + f(x_n) \cdot f_n(x)$ es llamada el interpolador de Lagrange para "$n+1$" puntos.

▷ *Nota*: si desarrollamos y agrupamos los términos de la forma $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ obtendríamos el mismo polinomio que haciendo las cuentas según el teorema.

# 4) Diferencias divididas:

▷ Método de las aproximaciones sucesivas: si al conjunto de punto que inicialmente tenemos y para los cuales hemos hallado su polinomio de interpolación le añadimos un punto más y queremos obtener el nuevo polinomio de interpolación, los cálculos anteriores no resultan válidos y tendríamos que rehacer todos los cálculos de nuevo. Veamos cómo evitarlo.

▷ Sean $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y su polinomio de interpolación $P_{n-1}(x)$.
$P_n(x) = P_{n-1}(x) + t_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$, de forma $P_n(x_j) = P_{n-1}(x_j)$, $\forall j = 0, ..., n-1$.
Como el nuevo polinomio debe tomar el valor numérico $f(x_n)$ para $x = x_n$.
$P_n(x_n) = f(x_n) = P_{n-1}(x_n) + t_n(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) \longrightarrow t_n = \dfrac{f(x_n) - P_{n-1}(x)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})}$ de forma que hemos solucionado el problema de añadir un nuevo punto después de haber obtenido un polinomio de interpolación $P_{n-1}(x)$ para los puntos tomados inicialmente.

▷ **Definición**: el método de las aproximaciones sucesivas o de interpolación progresiva consiste en:

a) $P_0(x) = f(x_0)$

b) $P_1(x) = P_0(x) + t_1(x - x_0) \longrightarrow P_1(x) = f(x_0) + t_1(x - x_0)$ donde $t_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

c) $P_n(x) = f(x_0) + t_1(x - x_0) + t_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + t_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$

▷ Método de las diferencias divididas: sean $x_0, \ldots, x_n$ una tabla de valores con sus imágenes respectivas $f(x_0), \ldots, f(x_n)$:

▷ **Definición**: dados $x_0 < x_1, f(x_0), f(x_1)$, llamaremos diferencia divida primera al número:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

▷ **Definición**: dados $x_0 < x_1 < x_2, f(x_0), f(x_1), f(x_2)$, llamaremos diferencia divida segunda al número:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

▷ **Definición**: llamaremos diferencia divida de orden "$n$" al número:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k)}$$

▷ A partir de aquí supongamos un polinomio $P(x)$ tal que $P(x) = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$. De acuerdo con las definiciones de diferencias divididas aplicadas a $P(x)$ obtenemos que:

$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P[x, x_0]\Big(\text{ pues } P[x, x_0] = \dfrac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}\Big) \longrightarrow$

$\longrightarrow P[x, x_0] = P[x_0, x_1] + (x - x_1)P[x, x_0, x_1] \longrightarrow$

$\vdots$

$\longrightarrow P[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] = P[x_0, \ldots, x_{n-1}] + (x - x_n)P[x, x_0, \ldots, x_n]$

Pero el último sumando vale cero (las diferencias divididas de orden "$k$" de un polinomio es un polinomio de grado "$n - k$" y en el último sumando $k = n + 1$). Deshaciéndolo todo y teniendo en cuenta que $P[x_0, \ldots, x_k] = f[x_0, \ldots, x_k]$:

▷ **<u>Definición</u>**: fórmula de Newton de diferencias divididas para la interpolación:

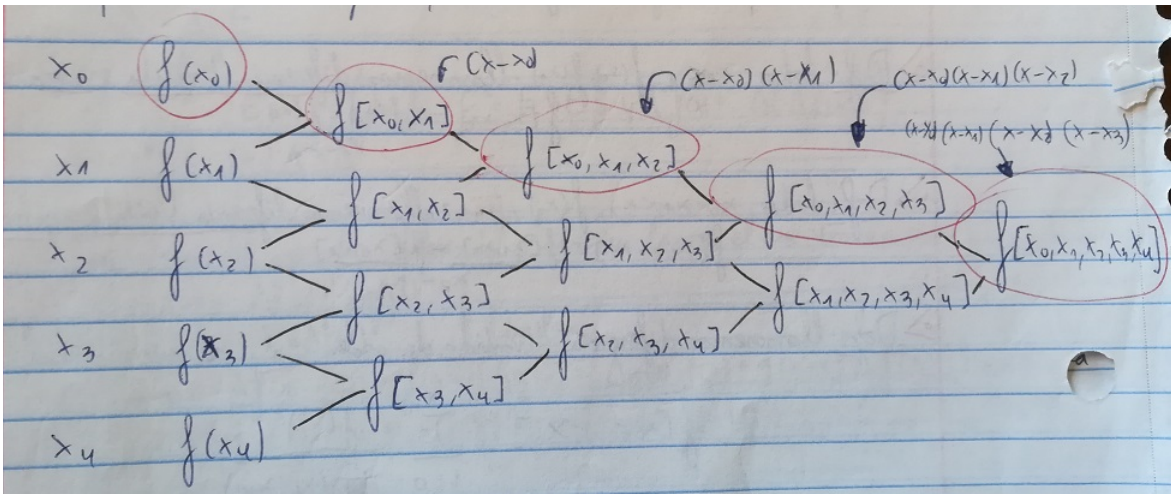
$P(x) f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] =$

$= \displaystyle\sum_{j=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_j] \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$

▷ **<u>Propiedades</u>**:

a) Este polinomio presenta la ventaja respecto al de Lagrange de que permite pasar de un polinomio de grado "$n + 1$" sin más que añadirle un término a la igualdad anterior, además de que la disposición de los cálculos a efectuar para calcular $P(x)$ es más sencilla.

b) Responde a la tabla triangular y visual:



# 5) Operadores:

▷ Hasta ahora hemos empleado una tabla de valores cualesquiera a la que tratábamos de asociarle su polinomio de interpolación. Supongamos ahora que las abscisas están equiespaciadas, esto es: $x_1 = x_0 + h; x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h; \ldots ; x_n = x_0 + nh$. Para simplificar notación tomaremos $h = 1$ haciendo el cambio de variable $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

▷ **Definición**: llamamos operador a una regla que establecemos para transformar las imágenes de una función dada.

▷ **Por ejemplo**:

a) Operador diferencia progresiva: $\Delta$; $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$

b) Operador identidad: $\mathbf{1}$; $\mathbf{1}f(x) = f(x)$

c) Operador siguiente: $E$; $E(f(x)) = f(x + 1)$

d) Operador precedente: $E^{-1}$; $E^{-1}(f(x)) = f(x - 1)$

e) Operador diferencia regresiva: $\nabla$; $\nabla f(x) = f(x) - f(x - 1) = \Delta f(x - 1)$

f) Operador diferencia centrada: $\delta$; $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$

g) Operador promedio: $\mu$; $\mu = \dfrac{1}{2}\delta = \dfrac{1}{2}[f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})]$

▷ *Nota*: tanto las diferencias progresivas, las regresivas y las centrales se conocen como diferencias finitas. Podemos definir la suma de operadores, su composición y el producto por un escalar. Esto convierte al espacio de operadores en un álgebra conmutativa con unidad.

▷ **Propiedades**:

1) $E = \mathbf{1} + \Delta$

2) $E \circ \Delta = \Delta \circ E$

3) $E^{-1} = \mathbf{1} - \nabla$

4) $\Delta^2 = E^2 - 2E + 1$ (donde $E^2 = E \circ E$ y $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$)

5) $(\mathbf{1} + \Delta)^2 = \mathbf{1} + 2\Delta + \Delta^2$

▷ **Propiedades**: del operador diferencia progresiva (que es el que vamos a usar):

1) $\Delta(f + g)(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

2) $\Delta(\lambda f)(x) = \lambda\Delta f(x)$ (estas dos propiedades nos dicen que es un operador lineal)

3) $\Delta(fg)(x) = \Delta f(x) \cdot g(x) + f(x + 1)\Delta g(x) = \Delta g(x) \cdot f(x) + g(x + 1)\Delta f(x)$

4) $\Delta(f/g)(x) = \dfrac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$ (estas dos propiedades nos hablan de similitud con el operador derivada)

5) $\Delta k = 0$ (con $k \equiv$ constante)

6) $\Delta a^x = (a-1)a^x$

$\triangleright$ **Definición**: dado $\Delta$ definimos la diferencia $n$-ésima como $\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$. Además, se cumple que:

$$\Delta^n f(x) = \binom{n}{0} f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} f(x+1) + (-1)^n \binom{n}{n} f(x)$$

$\triangleright$ Polinomio de interpolación de Newton para diferencias progresivas: supongamos una tabla cuyos argumentos vienen dados en progresión aritmética de diferencia $h$.
$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$; $\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1); \ldots; \Delta f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1})$
$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0);\ \ldots; \Delta^2 f(x_{n-2}) = \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2})$
$\vdots$
$\Delta^k f(x_j) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}) - \Delta^{k-1} f(x_j)$

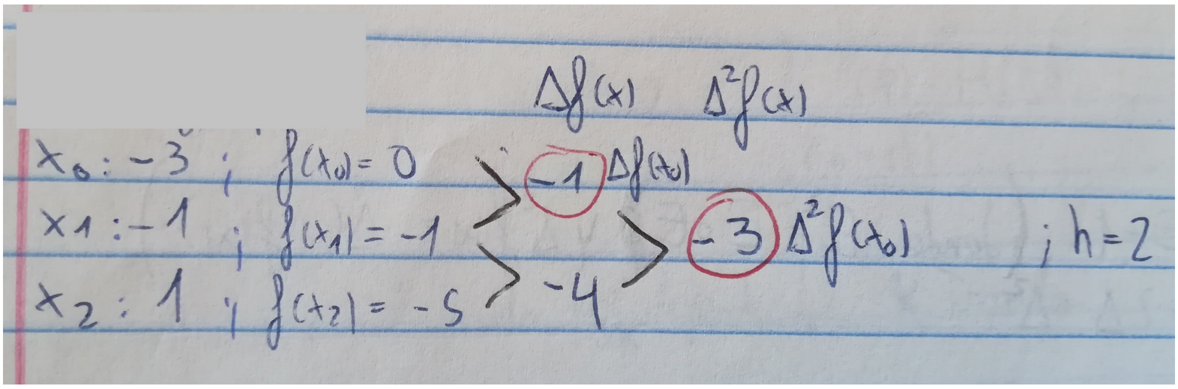
$\triangleright$ Despejamos:
$f(x_1) = \Delta f(x_0) + f(x_0)$
$f(x_2) = \Delta f(x_1) - f(x_1) = f(x_0) + \Delta f(x_0) + \Delta f(x_1) = \{\Delta f(x_1) = \Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)\} =$
$= f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$
Y, en general, podemos escribir:
$f(x_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j f(x_0)$, $\forall k = 0, 1, \ldots, n$, donde $\Delta^0 = \mathbf{1}$

$\triangleright$ Teniendo en cuenta que $x_{j+1} - x_j = h$, $\forall j = 0, \ldots, n-1$ y la fórmula anterior nos queda:
$f(x_n) = \binom{n}{0} f(x_0) + \binom{n}{1} \Delta f(x_0) + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^n f(x_0)$
Y ahora, si sustituimos "$x_n$" por "$x$":

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos polinomio de Newton de diferencias progresivas de orden "$n$" a:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f(x_0)$$

▷ **Por ejemplo**:




Luego el polinomio de interpolación será:

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{x+3}{2} \cdot (-1) + \frac{(x+3)(x+1)}{2 \cdot 4} \cdot (-3) = -\frac{1}{2}(x+3) - \frac{3}{8}(x+3)(x+1)$$

# 6) Error de interpolación:

▷ Dada una serie de valores y el polinomio de interpolación que habremos determinado en su caso, nos podemos plantear que si dada una cierta función "$f(x)$" que pasa por "$n+1$" puntos para los cuales hemos calculado el polinomio anterior, ¿qué error hemos cometido?

▷ **Teorema**: supongamos una función $f(x)$ de clase $n+1$ en el intervalo $[x_0, x_n]$ tal que conocemos las imágenes $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ para $x_0 < \ldots < x_n$. Sea el polinomio $P(x)$ de interpolación para los $n+1$ valores antes citados. En estas condiciones, dado $k \in [x_0, x_n]$, $\exists \rho_k \in [x_0, x_n]$ cumpliendo la siguiente igualdad:

$$f(k) - P(k) = \frac{f^{n+1/}(\rho)}{(n+1)!} \cdot H(k) \text{ donde } H(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

*Proof.* Queremos aplicar el Teorema de Rolle a cierta función $n+1$ veces y obtener la fórmula anterior. La función va a ser: $F(x) = [f(x) - P(x)] \cdot H(k) - [f(k) - P(k)] \cdot H(x)$ donde $x \in [x_0, x_n]$ (al menos).
La función es de clase $n+1$ pues "$f$" lo es por hipótesis y tanto $P(x)$ como $H(x)$ son polinomios y cumple que $F(k) = 0$ y que $F(x_j) = [f(x_j) - P(x_j)] \cdot H(k) - [f(k) - P(k)] \cdot H(x_j) = 0 - 0 = 0$.
Entonces, podemos aplicar el Teorema de Rolle en $n+1$ intervalos $\longrightarrow$ para cada intervalo existe, al menos, un punto donde se anula $F'(x) \longrightarrow F'(x)$ se anulará en "$n+1$" puntos. Volvemos a aplicar el Teorema de Rolle a $F'(x) \longrightarrow F''(x)$ se anulará en "$n$" puntos intercalados entre los anteriores.
Continuamos hasta asegurar que $F^{n+1/}(x)$ se anula en $\rho \in [x_0, x_n]$:

$$F^{n+1/}(x) = f^{n+1/}(x) \cdot H(k) - (n+1)![f(k) - P(k)] = 0 \longleftrightarrow \{x = \rho\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow f(k) - P(k) = \frac{f^{n+1/}(\rho)}{(n+1)!} \cdot H(k)$$

□

▷ *Nota*: el punto $\rho_k$ dependerá del "$k$" tomado.

▷ Cota del error: de acuerdo con este teorema, el error cometido al sustituir una función por su polinomio de interpolación en "$n+1$" puntos para un cierto $k \in [x_0, x_n]$ es:

$$e(k) = \left| \frac{f^{n+1/}(\rho)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n) \right|$$

donde $\rho \in [x_0, x_n]$ y depende del "$k$" elegido.
Por lo tanto, la cota del error vendrá dada por:

$$\text{máx}|f(x) - P(x)| \leq \frac{\sup f^{n+1/}(\rho)}{(n+1)!} \cdot \text{máx}\{|H(x)|\} \text{ tq } x \in [x_0, x_n]$$

Si $\text{máx}\{|H(x)|\}$ alcanza el mínimo valor posible, el error cometido será mínimo y esto a su vez dependerá de la elección que hagamos de los puntos de interpolación $x_0, \ldots, x_n$ del intervalo $[x_0, x_n]$.

▷ Para resolver esta última cuestión, el matemático ruso Tchebytchev (s.XIX) construyó unos polinomios especiales: $P_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$.

▷ **Definición**: llamamos polinomios de Tchebytchev a los siguientes polinomios:

a) $P_0(x) = 1$

b) $P_1(x) = x$

c) $P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$

▷ **Propiedades**:

a) Las raíces de $P_{n+1}(x)$ son: $\lambda_j = -\cos(\frac{2j+1}{2n+2} \cdot \pi)$, tq $j = 0, 1, \ldots, n$.

b) Si se toman los puntos $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\lambda_j$ con $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ se cumple que el $\text{máx}\{|H(x)|\}$ alcanza el menor valor posible para esos $x_j$.

▷ Por último señalar que no forzosamente al aumentar el número de los puntos de interpolación va a hacer que el correspondiente polinomio se aproxime a $f(x)$. Tenemos el ejemplo de Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \ , \ x \in [-5, 5]$$

Construimos una sucesión de polinomios de interpolación $P_n$ para puntos equiespaciados. Si hacemos $n \to \infty$ cabría esperar que $P_4(4) \to f(4)$ pero esto no pasa. Es más, el error de interpolación tiende a infinito. Esto se debe a que los polinomios oscilan mucho cuanto mayor sea su grado.