TEMA 63: FRECUENCIA Y PROBABILIDAD. LEYES DEL AZAR. ESPACIO PROBABILÍSTICO

TIEMPO: 81 — 81

Esquema

1) Introducción
   - 1.1) Antigüedad
   - 1.2) Comienzos modernos
   - 1.3) s.XX y actualidad

2 Experimento aleatorio. Sucesos
   - 2.1) Experimento aleatorio
     - 2.1.1) Tres condiciones
   - 2.2) Sucesos
     - 2.2.1) Operaciones: $\cap$, $\cup$, $-$, $\triangle$
     - 2.2.2) Sistema completo de sucesos

3) Álgebra de Boole
   - 3.1) Definición: álgebra de Boole
   - 3.2) Álgebra de Boole de sucesos
   - 3.3) Propiedades

4) Axiomática de un espacio de probabilidad
   - 4.1) Caso finito
   - 4.2) σ-álgebra
     - 4.2.1) Definición: frecuencia relativa
     - 4.2.2) Propiedades
   - 4.3) Frecuencia y probabilidad
   - 4.4) Estudio axiomático
     - 4.4.1) Definición: medida
     - 4.4.2) Definición: espacio de probabilidad + Consecuencias

1) Introducción:

▷ Antigüedad: ya las civilizaciones egipcia, griega y romana utilizaban el astrágalo, hueso vulgarmente llamado "taba", situado ne la parte superior del tarso, para realizar juegos de azar. Diferentes juegos de azar eran muy conocidos en la civilización china y los dados más antiguos que se han hallado proceden de Mesopotamia y tienen unos 5.000 años (aunque se sabe que ya en la Prehistoria se practicaban juegos de azar).

▷ Comienzos modernos: las cartas aparecen en Europa en el s. XV y teorizaciones sobre el azar ya se encuentran en Demócrito y Aristóteles. Aún y así, el cálculo de probabilidades es relativamente reciente; Cardano publica en el s. XVI "*Liber de ludo alea*", es decir, "*El libro de los juegos de azar*" que se considera la primera publicación sobre el cálculo de probabilidades. Galileo, en su obra "*Consideraciones sobre el juego de los dados*" utiliza el concepto de equiprobabilidad. En el s. XVII Antoine Gomband, más conocido como el Caballero de la Mére, propone a Pascal el siguiente problema:"al lanzar 24 veces un par de dados, ante la aparición de por lo menos un seis doble en las 24 tiradas, ¿es lo mismo apostar la misma cantidad a favor que en contra?"

▷ En relación a este problema y otros de la misma índole se inicia una relación epistolar entre Pascal y Fermat que, aparte de considerarse el inicio del Cálculo de Probabilidades, permiten a Huygens escribir el primer texto conocido dedicado en exclusividad a la probabilidad: "*Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados*", en el s. XVII.

▷ Recién nacido el Cálculo de Probabilidades, a finales del s. XVII surgen las compañías de seguros y de forma sistemática se inicia la recopilación de gran diversidad de datos tales como: nacimientos, defunciones, accidentes, incendios, enfermedades,... de tal suerte que la Probabilidad empieza a ser una herramienta indispensable para diversos campos de la actividad humana y ya en el s. XX ésta se convierte en algo esencial incluso para la interpretación física del universo.

▷ s.XX: es más, el las últimas décadas se han desarrollado de forma notable el número de aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística. Estas aplicaciones se encuentran en los más diversos campos: industria (control de calidad), comercio (teoría de la decisión), sociedad (encuestas de opinión), economía (índices de vida), etc.

▷ Con respecto a las ciencias ya no es suficiente con desarrollar el pensamiento determinista y es necesario prestar atención al pensamiento probabilístico para incidir sobre campos como el de la herencia genética, procesos radioactivos, la robótica,...

2) Experimento aleatorio. Sucesos:

▷ Experimento aleatorio: hay experimentos en lo que podemos predecir el resultado (el tiempo que tarda en caer un objeto una cierta distancia por ejemplo) y otros en los que no. A los primeros los llamaremos deterministas y a los segundos aleatorios. Pero para que un experimento se califique de aleatorio deben de cumplirse las siguientes condiciones:

1) Anteriormente a su ejecución se conocen todos los posibles resultados.
2) El resultado del experimento no puede predecirse.
3) El experimento puede repetirse tanto como se quiera bajo idénticas condiciones.

Ejemplos típicos de experimentos aleatorios son:

a) Las horas de duración de las lámparas de un cierto lote.
b) Las cantidades de una cierta mercancía vendida en diferentes días.
c) El resultado en el lanzamiento de un dado.

▷ Sucesos: siempre que se efectúa una prueba se tiene un conjunto de posibles resultados. Dicho conjunto lo llamaremos conjunto fundamental de probabilidades, espacio muestral o suceso seguro y lo notaremos por Ω.
A los elementos de Ω se les da el nombre de sucesos elementales. Llamaremos suceso a todo subconjunto del conjunto fundamental de probabilidades (Ω). Al suceso que no contiene ningún elemento del espacio muestral lo llamaremos suceso imposible o suceso vacío y o notaremos por $\emptyset$.
Dado un suceso $A \in \Omega$ definimos el contrario o complementario de A al suceso que ocurre cuando no sucede A y lo llamamos $\overline{A}$ (observamos que $\overline{\overline{A}} = A$).
Dados $A, B \in \Omega$ decimos que A está incluido en B, $A \subseteq B$ si cada vez que se ocurre A, se verifica también B. Se dice que $A, B \in \Omega$ son iguales si se da la doble inclusión, es decir, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

▷ Operaciones con sucesos:

- Unión: dados A, B sucesos, llamaremos unión de A y B al suceso que ocurre siempre que ocurra A, B o ambos simultáneamente. El concepto puede extenderse a familias numerables de sucesos. Lo denotaremos por $A \cup B$.
- Intersección: dados A, B sucesos, llamaremos intersección de A y B al suceso que ocurre siempre que ocurran A y B simultáneamente. Como antes, se puede extender a familias numerables de sucesos. Lo denotaremos por $A \cap B$.

▷ **Definición**: Diremos que dos sucesos son incompatibles o disjuntos si cuando sucede uno no puede suceder el otro y viceversa.

Si juntamos este con concepto con los de unión e intersección obtenemos:

- A la unión de dos sucesos incompatibles se la llama suma de sucesos y se escribe $A + B$. Si escribimos $\sum_{j=1}^{n} A_j$ o $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ significará la unión de dichos sucesos de manera que si se presenta uno no se presenta ningún otro.
- Si A y B son incompatibles su intersección es el vacío (esto es, de hecho, una caracterización).

▷ **Definición**: llamamos suceso diferencia de A y B y lo notamos por $A - B$ al suceso $A \cap \overline{B}$, que son los puntos muestrales que están en A pero no en B.

▷ **Definición**: llamamos diferencia simétrica de A y B y lo notamos por $A \triangle B$ a la unión de los sucesos $A - B$ y $B - A$, es decir:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

▷ **Definición**: el cardinal de un suceso es el número de sucesos elementales que lo forman. Si tomamos $A \cup B$ tenemos que tener en cuenta los puntos de la intersección, pues los estamos contando dos veces. Tenemos entonces la fórmula: $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$. Si A y B son incompatibles se tendrá que $card(A \cap B) = card(\emptyset) = 0$ y el cardinal de la unión es la suma de los cardinales.

▷ **Definición**: sea Ω un espacio muestral y consideremos una familia $\mathcal{B}$ de sucesos de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es un sistema completo de sucesos cuando es una partición de Ω, es decir, cuando se cumple lo siguiente:

1) $A_j \neq \emptyset \; \forall j$

2) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j$

3) $A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k$

3) Álgebra de Boole:

▷ **Definición**: se llama álgebra de Boole a un cierto conjunto $\mathcal{A}$ de elementos para los que se definen dos operaciones internas "$*$" y "$\circ$" que cumplen lo siguiente:

1) Las dos operaciones son conmutativas.
2) Existen elementos de identidad en $\mathcal{A}$ y los notaremos por 0 y 1 para las operaciones "$*$" y "$\circ$" respectivamente. Es decir, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha * 0 = \alpha$ y $\alpha \circ 1 = \alpha$
3) Cada operación es distributiva respecto de la otra.
4) $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $\exists \overline{\alpha} \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha * \overline{\alpha} = 1$ y $\alpha \circ \overline{\alpha} = 0$

En el caso de suponer un suceso A ligado a un experimento aleatorio dado, siempre le podríamos hacer corresponder el conjunto de resultados o sucesos elementales cuya unión formaría el suceso A. La probabilidad de esta correspondencia, trivial en lo casos elementales como el juego de dados, puede establecerse de forma general basándose en el **Teorema de Stone**: "*para toda álgebra de Boole (y en particular para toda álgebra de sucesos) se puede encontrar un álgebra de conjuntos isomorfa a ella*".

La ventaja de este isomorfismo es doble: por una parte se tiene un lenguaje para los sucesos que es el mismo de la teoría de conjuntos y, por otra, los conocimientos relativos a la teoría de conjuntos y a la teoría de la medida pueden ser traducidos e interpretados en el lenguaje de sucesos y probabilidades.

Esto permite que en el álgebra de sucesos utilizar los diagramas de Venn para demostrar que $(\mathcal{P}(\Omega), \cup, \cap, ^c)$, donde ^{c} es el complementario, tiene estructura de álgebra de Boole.

Dem. Evidentemente en el espacio de sucesos $\mathcal{P}(\Omega)$ las operaciones unión e intersección de sucesos son operaciones internas y verifican las siguientes propiedades:

1) Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
2) Existen en $\mathcal{P}(\Omega)$ los sucesos $\emptyset$ y Ω tales que $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \Omega = A$
3) Cada operación es distributiva respecto a la otra.
4) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\exists \overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $A \cup \overline{A} = \Omega$ y $A \cap \overline{A} = \emptyset$

$\square$

De estas cuatro propiedades que tiene como álgebra de Boole se deducen las siguientes:

1) Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2) Idempotencia: $A \cup A = A \cap A = A$
3) Simplificativa:
   3.1) De la unión con respecto a la intersección: $A \cup (B \cap A) = A$
   3.2) De la intersección con respecto a la unión: $A \cap (B \cup A) = A$
4) Leyes de Morgan:
   4.1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   4.2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Pero el concepto de álgebra de Boole no va a ser suficiente cuando tratemos con conjuntos infinitos (numerables o no). Es por ello que extenderemos del concepto de manera que se sigan manteniendo las propiedades del álgebra de Boole.

4) Axiomática de un espacio de probabilidad:

En el caso de que el conjunto de resultados elementales sea infinito numerable, resulta complicado considerar el conjunto de todos los subconjuntos posibles y, por lo tanto, se recurre a que el conjunto, con las operaciones unión e intersección deban cumplir unas propiedades equivalentes a las del álgebra de Boole.

▷ Caso finito: sea Ω espacio muestral finito y consideramos $\mathcal{F}$ una colección de sucesos tales que se cumplen dos condiciones:

a) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $(\cup_{j=1}^{n} A_j) \in \mathcal{F}$

b) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\overline{A} \in \mathcal{F}$

De esta forma, $(\mathcal{F}, \cup, \cap,)$ constituye un álgebra de Boole. En el caso particular de que tengamos un sistema completo de sucesos, $\mathcal{B}$ podemos construir un álgebra de Boole de sucesos sin más que considerar $\mathcal{F}$ formada por ese sistema completo de sucesos, el $\emptyset$ y la unión de un número cualquiera de elementos de $\mathcal{B}$. Se puede demostrar que toda álgebra de sucesos sobre un espacio muestral finito es engendrada por cierto sistema completo de sucesos.

▷ σ-álgebra: se conoce como σ-álgebra, $\mathcal{A}$, a una familia (no vacía) de subconjuntos de $\mathcal{P}(\Omega)$ que cumplen las siguientes propiedades:

a) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$

b) $\forall A \in \mathcal{A} \longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

c) $\emptyset \in \mathcal{A}$

▷ *Nota*: el concepto de σ-álgebra generaliza al de álgebra de Boole pues permite operaciones con conjuntos numerables. A partir de un mismo conjunto Ω se pueden definir varias σ-álgebras diferentes.

▷ **Definición**: llamamos espacio probabilizable al par formado por un conjunto fundamental de probabilidades Ω y una σ-álgebra $\mathcal{A}$: $(\Omega, \mathcal{A})$

▷ Propiedades de las σ-álgebras:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$. **Dem.**: $\Omega = \overline{\emptyset} \in \mathcal{A}$

b) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$. **Dem.**: tómese $A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \ldots$ y aplíquese la primera propiedad de las σ-álgebras.

c) Si $A_1, \ldots \in \mathcal{A} \longrightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. **Dem.**: $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\overline{A_j}} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}} \in \mathcal{A}$ por anterior y la segunda propiedad de las σ-álgebras

d) $\forall A_j,\, A_k \in \mathcal{A} \longrightarrow A_j - A_k,\, A_j \triangle A_k \in \mathcal{A}$

▷ Frecuencia y probabilidad: es un paso intermedio entre la definición clásica de probabilidad dada por Laplace ("la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorable a que ocurra el suceso y el número total de casos posibles en la experiencia en el supuesto de que todos los casos sean igualmente posibles") y la definición axiomática dada por Kolmogoroff, que es la actual. La definición frecuentista se debe a Von Mises y tuvo mucha repercusión en la definición axiomática.

Si tenemos Ω un espacio muestral y realizamos un experimento "n" veces y el suceso A aparece "n_A" veces, definimos:

▷ **Definición**: la frecuencia absoluta de A es n_A y la frecuencia relativa de A es: $f_r(A) = \dfrac{n_A}{n}$

▷ Propiedades de la frecuencia relativa:

a) $f_r(A) \in [0,1]$ **Dem.**: como $0 \leq n_A \leq n \longrightarrow 0 \leq f_r(A) = \dfrac{n_A}{n} \leq 1$

b) $f_r(\Omega) = 1$

c) $f_r(\emptyset) = 0$

d) Si A y B son incompatibles, su frecuencia relativa es la suma de sus frecuencias relativas. **Dem.**: $A \cap B = \emptyset \longrightarrow A \cup B = A + B \longrightarrow f_r(A \cup B) = \dfrac{n_A + n_B}{n} = \dfrac{n_A}{n} + \dfrac{n_B}{n} = f_r(A) + f_r(B)$

e) $f_r(A) + f_r(\overline{A}) = 1$ **Dem.**: $A \cap \overline{A} = \emptyset$, entonces: $f_r(A \cup \overline{A}) = \dfrac{n_A}{n} + \dfrac{n - n_A}{n} = \dfrac{n}{n} = 1 = f_r(\Omega)$

f) $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$ **Dem.**: $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) + (A \cap \overline{B})$. Igualmente para $B = (A \cap B) + (B \cap \overline{A})$; $A \cup B = (A \cap B) + (\overline{A} \cap B) + (\overline{B} \cap A) (= n_1 + n_2 + n_3) \longrightarrow$ $f_r(A \cup B) = \dfrac{n_1 + n_2 + n_3}{n} = \dfrac{n_1 + n_2}{n} + \dfrac{n_1 + n_3}{n} - \dfrac{n_1}{n} = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cup B)$

Uno de los problemas de la definición frecuentista es que mezcla expresiones como "tiende" (concepto teórico de límite) con procesos empíricos (ley empírica de los grandes números).

▷ Estudio axiomático de la Probabilidad: la definición axiomática de la probabilidad se la debemos a Kolmogoroff. Él se basó en los trabajos de Borel sobre la relación entre las teorías de la probabilidad y de la medida. Kolmogoroff considera el concepto de probabilidad como un modelo de la noción de frecuencia de tal forma que los aspectos más importantes del comportamiento de las frecuencias relativas son incorporados a los axiomas de la probabilidad mediante un proceso de abstracción.

▷ **Definición**: sea $\mathbb{X}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra. Una medida es $\mathcal{A}$ (o en $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ o en $\mathbb{X}$ si $\mathcal{A}$ es clara) es una función $\mu : \mathcal{A} \longmapsto [0, \infty]$ tal que:

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$, entonces $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

▷ **Definición**: a la terna $(\mathbb{X},\, \mathcal{A},\, \mu)$ la llamaremos espacio de medida.

Dado el espacio $(\Omega,\, \mathcal{A})$ estableceremos sobre este espacio una medida (o probabilidad) teniendo en cuenta la estabilidad de las frecuencias relativas de un suceso así como las propiedades de dichas frecuencias.

▷ **Definición**: una probabilidad sobre el espacio $(\Omega,\, \mathcal{A})$ es una aplicación que asigna a cada elemento del σ-álgebra $\mathcal{A}$ un número que se llama su probabilidad, $P(A)$, que satisface los siguientes tres axiomas:

a) $P(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$ (a^*: $P(\emptyset) = 0$)

b) $P(\Omega) = 1$ (medida finita)

c) Si $\{A_j\}$ es una sucesión de sucesos incompatibles, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Es decir, es una medida que cumple $\mu(\Omega) = 1$. Como tenemos medida finita, llamaremos espacio de probabilidad finito a la terna $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$.

▷ Consecuencias de los axiomas:

1) $P(\emptyset) = 0$ si no definimos la medida de esa manera. $\mu(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$

2) $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$ donde $\{A_j\}$ son disjuntos. **Dem.**: $\{A_j\} = \{A_1, \dots, A_n, \emptyset, \dots\}$

3) **Teorema de la Probabilidad Total**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **Dem.**: tomamos $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B); (B \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = B$

4) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ **Dem.**: $A \cap \overline{A} = \emptyset \longrightarrow P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$

5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
Dem.: $P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) =$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (B \cap C))$, desarrollamos y se obtiene.

5*) Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$; $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots +$
$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

6) Si $A \subseteq B \longrightarrow P(A) \leq P(B)$

7) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

8) $\forall A,\, B \in \mathcal{A}$ se cumple que:

   a) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
   b) $P(\cup A_j) \leq \sum P(A_j)$
   c) $P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$
   d) $P(A \cap B) \leq P(A)$, $P(B) \leq P(A \cup B)$