TEMA 6: NÚMEROS REALES. TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

TIEMPO: 90 — 95

Esquema

1) Introducción
    1.1) Antigüedad + griegos
    1.2) Edad Media
    1.3) Weierstrass + Dedekin
    1.4) Meray + Cantor
    1.5) Conclusión
2 Construcción de $\mathbb{R}$
    2.1) Introducción
    2.2) Propiedades de $\mathbb{Q}$
    2.3) Propiedad de Continuidad
    2.4) Axioma de los Intervalos Encajados
    2.5) Axioma del Supremo
    2.6) Axioma de Dedekin
    2.7) Supremo $\longleftrightarrow$ Dedekin
    2.8) Supremo $\rightarrow$ Continuidad $\rightarrow$ Intervalos Encajados $\rightarrow$ Supremo
3) Topología de $\mathbb{R}$
    3.1) Introducción
    3.2) Definición: Topología
        3.2.1) Abiertos + Cerrados + Ejemplos
    3.3) Definición: entorno
    3.4) Adherencia
        3.4.1) Definición
        3.4.2) Propiedades
    3.5) Definición: puntos de acumulación + punto aislado
    3.6) Interior
        3.6.1) Definición
        3.6.2) Propiedades
    3.7) Topología usual de $\mathbb{R}$
    3.8) Definición: acotado + compacto
    3.9) Teorema de Bolzano - Weierstrass
    3.10) Teorema de Borel-Lebesgue

1) Introducción:

$\triangleright$ Ya desde la Antigüedad (y antes de que los griegos se dieran cuenta) se descubrió que había magnitudes que no se "podían medir" (como la diagonal de un cuadrado). Entre los griegos esto produjo un gran desasosiego pues muchos creían que los racionales regían el mundo. Sin embargo ya en el siglo V a.C. se había probado que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{17}$ no eran racionales.
Durante siglos esta categoría de números no estuvo bien definida debido a los sistemas de numeración, el asignarles palabras o valores aproximados que no permitían ser relacionados,...

$\triangleright$ Edad Media: ya en la Edad Media se descubrió que estos números "eran identificables a números decimales que no se terminan nunca y cuyas cifras después de la coma no se reproducen en el mismo orden". Aún y así habrían de pasar algunos siglos para que se dejase de relacionar a estos números con magnitudes. Esta separación no ocurriría hasta el s. XIX.

$\triangleright$ Weierstrass (s.XIX) fue de los primeros en proponer una definición de los números reales sin la teoría de las magnitudes, construyéndolos a partir de los racionales de manera que sea el mínimo conjunto que los complete. Esta idea la llevará a cabo Dedekin, quien mediante sus "cortaduras" introduce los irracionales y, por tanto, los reales.

$\triangleright$ Meray da una teoría aritmética sobre los irracionales y Cantor ya introduce los primeros resultados sobre la topología de la recta real (ss. XIX - XX).

$\triangleright$ Pero los número reales van más allá de la intuición: tenemos los números algebraicos (raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes en $\mathbb{Q}$) que cubren $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{17}$, etc. pero, aún y así, existen números irracionales trascendentes, es decir, que no pueden ser solución a ninguna ecuación polinómica sobre $\mathbb{Q}$. Por ejemplo: π, e, ln(2),... que son números computables, pero éstos no son más que una pequeña parte de todos los reales (de hecho, los números computables son numerables). Por otro lado, tanto los racionales como los irracionales son densos en $\mathbb{R}$ para la topología usual, (esto es, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$) pero $\mathbb{Q}$ es numerable (biyectivo con $\mathbb{N}$) mientras que $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no lo es.

2) Construcción de $\mathbb{R}$:

$\triangleright$ Para "construir" los números reales existen varios métodos. Todos llevan implícitos los axiomas de los números racionales (algo normal si los consideramos como una extensión de los mismos y queremos que sigan manteniendo sus propiedades) y a los que se añade cualquiera de los siguientes axiomas:

1) Propiedad de Continuidad
2) Axioma de los Intervalos Encajados
3) Axioma del Supremo
4) Axioma de Dedekin

$\triangleright$ Por supuesto se pueden definir los números reales como los números que rellenan la recta real sean racionales o no. Pero eso es una definición que no es constructiva y por tanto carece de interés. Antes de empezar, repasemos los axiomas de los racionales (sus propiedades como cuerpo conmutativo, con orden total,...) que se resumen en: $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo con orden total y arquimediano.

$\triangleright$ **Propiedades de $\mathbb{Q}$**:

1) Existencia de orden total: para $x, y \in \mathbb{Q}$ se cumple una, y sólo una, de las siguientes relaciones: $x < y$ o $x > y$ o $x = y$
2) Transitividad: si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$. Si $x = y$ e $y = z$ entonces $x = z$
3) Existencia de una suma: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $\exists_1 q \in \mathbb{Q}$ tal que $x + y = q$
4) La suma es conmutativa: $x + y = y + x$
5) La suma es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$
6) Existencia y unicidad del elemento neutro: $x + 0 = 0 + x = x$
7) Existencia y unicidad del elemento simétrico: $x + (-x) = (-x) + x = 0$
8) Existencia de una multiplicación: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $\exists_1 p \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot y = p$
9) El producto es conmutativo: $x \cdot y = y \cdot x$
10) El producto es asociativo: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
11) Existencia y unicidad del elemento unidad: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
12) Existencia y unicidad del elemento simétrico: $\forall x \neq 0$, $x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 1$
13) Propiedad distributiva: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
14) Orden compatible con la suma: $x < y \longrightarrow x + z < y + z$
15) Orden compatible con el producto: $x < y$, $z > 0 \longrightarrow x \cdot z < y \cdot z$
16) Orden arquimediano: $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < n$

▷ A pesar de las "bondades" de las propiedades anteriores, en $\mathbb{Q}$ existen huecos y se puede ver que no toda sucesión con coeficientes racionales tiene por qué tener un límite racional $x_0 = 1$, $\{x_{n+1}\} = \{\frac{x_n^2+2}{2x_n}\} \to \sqrt{2}$. Una manera usual de definir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ es tomando todas las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$, relacionarlas mediante $a_n R b_n \leftrightarrow \{a_n - b_n\} \to 0$ y llamar $\mathbb{R} = S_{\text{Cauchy}}/R$ y se comprueba que todo va como debe. Un problema a este método es que estamos dando una topología (y bastante buena) a $\mathbb{Q}$ que hace que el límite sea único y se cumplan, por continuidad, todas las propiedades. En otras palabras, estamos añadiendo el siguiente axioma:

▷ **Propiedad de Continuidad**: toda sucesión monótona y acotada tiene límite (único) en $\mathbb{R}$

▷ El siguiente principio se acerca mediante la idea de magnitud a la construcción de los reales. Sean a, b dos números tales que $a \leq b$. Llamamos intervalo cerrado con extremos a y b al conjunto: $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$. Se dice que los intervalos cerrados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están encajados si $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$. Si volvemos a la idea de exactitud utilizando dicho sistema de intervalos encajados y la certeza de que éstos se acercan a la medición exacta se traduce en la postulación de al existencia de un número que pertenece a todos los intervalos del sistema, se tiene que:

▷ **Axioma de los Intervalos Encajados**: todo sistema de intervalos encajados $[a_n, b_n]$ tiene, al menos, un punto en común a todos los intervalos del sistema. Si el sistema cumple que $\{b_n - a_n\} \to 0$ entonces dicho punto es único.

Es decir: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ y si $|b_n - a_n| \to 0$ entonces $\exists_1 x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ con $x \in \mathbb{R}$

▷ Antes de expresar el próximo resultado introduciremos los siguientes conceptos:

▷ **Definición**: dado un conjunto de números $\emptyset \neq A$ (con el orden habitual) si existe b, otro número, de manera que $b \geq a$ ($b \leq z$) para todo $a \in A$ diremos que b es una cota superior o mayorante (cota inferior o minorante) del conjunto A.

▷ **Definición**: un número b se denomina supremo (ínfimo) si es la menor de las cotas superiores (la mayor de las cotas inferiores) de A.

▷ Lo anterior nos lleva al siguiente axioma.

▷ **Axioma del Supremo**: sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente. Entonces A tiene un único supremo.

▷ El último postulado que vamos a contemplar es el más elegante desde el punto de vista abstracto y es tan natural como agrupar. Además, sólo usa ingredientes de la Teoría de Conjuntos (a diferencia de los anteriores). La teoría de los números reales en la forma de Dedekin está basada en la idea de cortar el dominio de los números racionales, es decir, dividimos el conjunto de todos los racionales en dos conjuntos no vacíos A y B de manera que cada número racional pertenece a uno sólo de ambos y cualquier elemento $a \in A$ es mayor que cualquier elemento $b \in B$. El conjunto A es llamado la clase alta y el conjunto B la clase baja. El corte puede notarse por $A|B$.

$\triangleright$ **<u>Axioma de Dedekin</u>**: dados dos conjuntos A y B que forman una cortadura de Dedekin, es decir, que cumplen:

a) $\forall x \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x \in A$ o $x \in B$ y $A \cap B = \emptyset$ con $A,\, B \neq \emptyset$

b) $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$, $x \geq y$

Entonces existe un único elemento γ tal que $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$, $a \geq \gamma \leq b$

$\triangleright$ Como se puede ver este último axioma “es” mucho más abstracto y puede dar lugar a construcciones en ámbitos más generales. También es claro que γ va a ser el supremo y el ínfimo de los conjuntos. A partir de ahora nos dedicaremos a probar que estos cuatro axiomas son equivalentes.

$\triangleright$ **<u>Lema</u>**: Supremo $\longleftrightarrow$ Dedekin

Dem. Primero $\Rightarrow$: sea $A|B$ una cortadura de Dedekin. Como B es no vacío y está mayorado (acotado superiormente), entonces, por hipótesis, tiene supremo: $\exists x$ tal que $x \geq b$, $\forall b \in B$. Pero cada $a \in A$ es cota superior de B y $x \leq a$ por la definición de supremo (menor de las cotas superiores) $\rightarrow \forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\exists_1 x$ tal que $a \geq x \geq b \rightarrow$ se cumple el axioma.
Segundo $\Leftarrow$: sea $\emptyset \neq C$ un conjunto acotado superiormente. Sea $A = \{x : x \leq c$ con $c \in C$ cualquiera$\}$. Entonces, cualquier cota superior estricta de C es una cota superior estricta de A también. Sea $B = \{z : z > c$ con $c \in C\}$. Entonces $x < z$, $\forall x \in A$, $\forall z \in B$ y $A \cap B = \emptyset$. Veamos que $A \cup B = \mathbb{Q}$.
Si $y \in \mathbb{Q}$ e $y \notin A \rightarrow y > c$, $\forall c \in C \rightarrow y \in B \Rightarrow A|B$ es una cortadura de Dedekin $\rightarrow \exists_1 x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Veamos que hemos encontrado el supremo del conjunto C.
Claramente $x \geq c$, $\forall c \in C$ porque $C \subseteq A \leq x$. Sea $\hat{x}$ otra cota superior de C y supongamos que $\hat{x} < x$. Elegimos $x_0 = \frac{x+\hat{x}}{2} \rightarrow \hat{x} < x_0 < x$. Por definición de A, $\exists c \in C$ tal que $x_0 < c$, contradiciendo que $\hat{x}$ es cota superior $\Rightarrow x =$Sup(C).

$\square$

$\triangleright$ **<u>Lema</u>**: Supremo $\longrightarrow$ Continuidad

Dem. Como $\{x_n\}$ está acotada $\exists s =$ supremo de $\{x_n\}$. Como “s” es el supremo, $\forall \epsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $s - \epsilon < x_m \leq s$. Por otro parte, como $\{x_n\}$ es creciente, tenemos que $s - \epsilon < x_n \leq s < s + \epsilon$, $\forall n \geq m$, es decir: $|x_n - s| < \epsilon$, $\forall n \geq m$. Luego $\{x_n\} \rightarrow s$

$\square$

$\triangleright$ **<u>Lema</u>**: Continuidad $\longrightarrow$ Intervalos Encajados

Dem. Sea el sistema de intervalos encajados $I_n = [a_n,\, b_n]$ donde $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < b_{n+1} < b_n < \ldots < b_2 < b_1$, donde $\{a_n\}$ es creciente y mayorada y $\{b_n\}$ es decreciente y minorada. Entonces, por el principio de continuidad: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Si $a = b \longrightarrow a \in \bigcap I_n$. Si $a < b \longrightarrow \frac{a+b}{2} \in \bigcap I_n$. Si $\{b_n - a_n\} \rightarrow 0 \Longrightarrow a = b \Longrightarrow \exists_1 x = a \in \bigcap I_n$

$\square$

$\triangleright$ **<u>Lema</u>**: Intervalos Encajados $\longrightarrow$ Supremo

Dem. Sea $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente. Sea b cota superior de E y tomemos $a \in E$.
Si $a = b \rightarrow a =$Sup(E) y hemos acabado.
Si no, $[a,\, b] \neq \emptyset$. Sea $I_1 = [a,\, b] = [a_1,\, b_1]$. Dividimos I_1 a la mitad. Si la parte derecha tiene algún punto de E, la elegimos. Si no, elegimos la mitad izquierda: $I_2 = [a_2,\, b_2]$ y $x \leq b_2$, $\forall x \in E$ e $I_1 \supset I_2$. Repetimos el proceso eligiendo los puntos medios de cada I_n y eligiendo la mitad superior o inferior según la primera tenga o no puntos de E. Obtenemos una sucesión de intervalos cerrados I_n tales que $I_{n-1} \supset I_n$, $I_n \cap E \neq \emptyset$ y $x \leq b_n$, $\forall x \in E$. Como $|b_n - a_n| \rightarrow 0$, $\exists_1 y \in \mathbb{R}$ tal que $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ con $y \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que hemos encontrado el supremo de E:

a) Cota superior: supongamos que $\exists x_0 \in E$ tq $x_0 > y$. Como $|b_n - a_n| \rightarrow 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $b_{n_0} - a_{n_0} < x_0 - y \rightarrow b_{n_0} < x_0 - (y - a_{n_0}) \leq x_0 \rightarrow$ Contradiciendo con la elección de los b_n, que eran todos mayores que cualquier elemento de E.

b) Menor de las cotas superiores: sea $\epsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $b_m - a_m < \epsilon$. Como $I_m \cap E \neq \emptyset$, $\exists x_m \in E$ tq $x_m \in [a_m,\, b_m]$. Por **(a)** tenemos que $x_m \leq y$. Entonces $a_m \leq x_m \leq y \leq b_m \rightarrow$
$\rightarrow y - x_m \leq b_m - a_m < \epsilon \rightarrow y - \epsilon \leq x_m \leq y \Rightarrow y =Sup(E)$.

$\square$

$\triangleright$ Con el añadido de uno de estos principios tenemos que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo conmutativo, con unidad, conteniendo un anillo isomorfo a $\mathbb{Q}$, con orden arquimediano, total y es un cuerpo completo (esto último quiere decir que $\{a_n\} \rightarrow a \longleftrightarrow \{a_n\}$ es de Cauchy)

3) Topología de $\mathbb{R}$:

▷ El concepto de Topología creció con el estudio de la recta real, el espacio euclídeo y el estudio de las funciones continuas en dichos espacios. La definición de un espacio topológico (hoy en día estándar) fue un problema durante mucho tiempo pues se necesitaba de una generalidad suficiente para englobar los casos útiles (espacios de funciones, el espacio euclídeo finito o infinito dimensional,...) y lo suficientemente concreta como para que los teoremas "buenos" en dichos espacios también se cumplieran en espacios topológicos en general. El enfoque de esta parte será lo más general posible pues no perderemos nada con ello y posteriormente concretaremos el caso de los números reales.

▷ **Definición**: sea $\mathbb{X}$ un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Diremos que es una topología sobre $\mathbb{X}$ si se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\emptyset$, $\mathbb{X} \in \mathcal{T}$

b) La unión (finita o no) de: $O_n \in \mathcal{T}$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \in \mathcal{T}$

c) La intersección finita de: $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

▷ **Definición**: un espacio topológico es un par $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ donde $\mathbb{X}$ es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una topología sobre dicho conjunto.

▷ **Definición**: si $O \in \mathcal{T}$ lo llamaremos abierto.

▷ **Definición**: diremos que C es un conjunto cerrado para esa topología si su complementario es abierto.

▷ Ejemplo: en todo conjunto $\mathbb{X}$ podemos definir dos topologías: $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$ que es la llamada topología trivial y $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ que es la llamada topología discreta.

▷ **Definición**: sea $x \in \mathbb{X}$. Diremos que W es un entorno de x si $\exists O$ abierto tal que $x \in O \subseteq W$. Al conjunto de todos los entornos de x lo notaremos por $\mathcal{V}(x) =$ (que es no vacío pues $x \in \mathbb{X} = O$) $= \{W$ tal que $\exists O \in \mathcal{T}$ con $x \in O \subseteq W\}$.

▷ **Proposición**: sea $x \in \mathbb{X}$ y sea $\mathcal{V}$. Se cumple lo siguiente:

a) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$

b) $\forall U \in \mathcal{V}(x)$ con $U \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(x)$

c) La intersección finita de entornos de x es también un entorno de x.

d) $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \hat{U} \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall b \in \hat{U} \Rightarrow U \in \mathcal{V}(b)$

▷ **<u>Definición</u>**: dado $A \subseteq \mathbb{X}$ decimos que $x \in \mathbb{X}$ es un <u>punto adherente</u> de A si $\forall U \in \mathcal{V}(x)$ se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$. Llamaremos <u>adherencia de A</u> al conjunto de todos sus puntos adherentes. La notaremos por $\overline{A}$.

▷ **<u>Proposición</u>**: sea $A \subseteq \mathbb{X}$. Entonces $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A. Es decir, $\nexists C$ cerrado tal que $A \subseteq C \nsubseteq \overline{A}$

Dem. Primero $\supseteq$: si $x \notin C \to \exists U \in \mathcal{V}(x)$ tq $U \cap A = \emptyset \to x \notin \overline{A} \to$ si $x \in \overline{A} \to x \in C$
Segundo $\subseteq$: si $x \notin \overline{A} \to \exists U \in \mathcal{V}(x)$ tq $U \cap A = \emptyset \to A \subseteq \mathbb{X} - U$ que es cerrado $\to$ C es el menor cerrado $\to x \notin C \to$ si $x \in C \to x \in \overline{A}$

□

▷ **<u>Corolario</u>**: $A \subseteq \mathbb{X}$ es cerrado $\longleftrightarrow A = \overline{A}$

▷ **<u>Propiedades</u>**: sea $A \subseteq \mathbb{X}$, entonces la adherencia tiene las siguientes propiedades:

a) $\forall A \subseteq \mathbb{X}$, $A \subseteq \overline{A}$

b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

▷ **<u>Definición</u>**: sea $A \subseteq \mathbb{X}$ decimos que $x \in \mathbb{X}$ es un <u>punto de acumulación</u> de A si $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, tenemos que $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos de acumulación de A lo notaremos por A'.

▷ **<u>Corolario</u>**: A es cerrado $\longleftrightarrow A' \subset A$.

Dem. A es cerrado $\longleftrightarrow A = \overline{A}$ y $\overline{A} = A \cup A'$

□

▷ **<u>Definición</u>**: dado $p \in A$, lo llamaremos <u>punto aislado</u> $\longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(p)$ tal que $U \cap A = \{p\}$.

▷ **<u>Definición</u>**: sea $A \subseteq \mathbb{X}$, llamamos <u>interior de A</u> al mayor de todos los conjuntos abiertos que están contenidos en A (equivalentemente, a la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A). Lo notaremos por A^o

▷ **<u>Propiedades</u>**: sea $A \subseteq \mathbb{X}$, se cumple que:

a) $\mathbb{X} - A^o = \overline{\mathbb{X} - A}$

b) $\mathbb{X} - \overline{A} = (\mathbb{X} - A)^o$

c) $\mathbb{X}^o = \mathbb{X}$

d) $A^o \subseteq A$

e) $(A^o)^o = A^o$

f) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

g) $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$

h) A es abierto $\longleftrightarrow A = A^o$

$\triangleright$ Ahora podemos presentar la topología en $\mathbb{R}$ que vamos a considerar: dados $a,\, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, llamamos intervalo abierto $]a,\, b[$ al siguiente conjunto: $]a,\, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } a < x < b\}$. Análogamente para conjuntos cerrados $[a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } a \leq x \leq b\}$. La topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos abiertos será la topología usual de la recta real.
Esta topología tiene la ventaja de tener una base numerable de entornos, de cumplir axiomas de separación agradables, tener propiedades como la conexión, la conexión por arcos,... que van a provocar la aparición de los grandes resultados de la matemática para los números reales (y cualquier espacio topológico homeomorfo), aunque eso excede con mucho esta presentación de los números reales.
Pasamos a comentar la conocida caracterización de la compacidad: A compacto $\longleftrightarrow$ A cerrado y acotado. Necesitaremos algunas definiciones previas y un resultado interesante en sí mismo: el Tª de Bolzano-Weierstrass.

$\triangleright$ **Definición**: decimos que $A \subseteq \mathbb{X}$ está acotado superiormente/inferiormente si $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A,\ a \leq k \ /\ \exists \hat{k} \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A,\ a \geq \hat{k}$. Diremos que A está acotado si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $|a| \leq M$, $\forall a \in A$.

$\triangleright$ **Definición**: sea $A \subseteq \mathbb{X}$ y consideremos una familia de conjuntos abiertos $\{B_j\}$. Decimos que $\{B_j\}$ es un recubrimiento por abiertos de A de $A \subseteq \bigcup_j B_j$.

$\triangleright$ **Definición**: decimos que A es compacto si para toda familia $\{B_j\}$ de abiertos recubriendo A se puede extraer una subfamilia finita que recubra A (un subrecubrimiento finito).

$\triangleright$ **Teorema de Bolzano-Weierstrass**: dado $A \subseteq \mathbb{X}$ infinito y acotado, tiene al menos un punto de acumulación. Equivalentemente: cualquier sucesión acotada admite una parcial convergente / si $A \subseteq \mathbb{X}$ acotado y no tiene puntos de acumulación $\to A$ finito / Si $A \subseteq \mathbb{X}$ acotado e infinito, $\exists \{a_n\} \subseteq A$ tal que $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$ con $L \in \overline{A}$

Dem. A acotado $\to A \subseteq [a,\, b] \rightsquigarrow [a,\, \frac{a+b}{2}],\ [\frac{a+b}{2},\, b]$ y, en al menos uno, hay infinitos elementos. Lo llamamos: $[a_1,\, b_1]$. Construimos así la sucesión $I_n = [a_n,\, b_n]$ con $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ conteniendo infinitos elementos. Por otro lado, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Tenemos que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son de Cauchy $\to$ convergentes y su diferencia tiende a cero $\to$ Ambas convergen al mismo número L.
$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $a_{n_0},\ b_{n_0} \in]L-\epsilon,\ L+\epsilon[\to I_n \subset]L-\epsilon,\ L+\epsilon[,\ \forall n \geq n_0 \to \forall U \in \mathcal{V}(L)$, $U \cap (A - \{L\}) \neq \emptyset$ lo que prueba que L es un punto de acumulación.

$\square$

$\triangleright$ **Teorema de Borel-Lebesgue**: A compacto $\longleftrightarrow$ A es cerrado y acotado.

Dem. Primero $\Leftarrow$: si $A = \emptyset$ es trivial. Sea $A \neq \emptyset$ y $\{A_j\}$ un recubrimientos por abiertos del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito. Como A es acotado $A \subseteq [a,b] = I$. Lo dividimos por la mitad $[a,\frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2},b]$, tomamos $A \cap [a,\frac{a+b}{2}]$ y $A \cap [\frac{a+b}{2},b]$ y en al menos uno falla el subrecubrimiento finito. Sea I_1 esa parte y consideramos I_n como en el teorema anterior. $\{a_n\}$, $\{b_n\} \to L \in A$ por ser éste cerrado. Es decir, $L \in A_{j_0}$ para cierto índice. Como A_{j_0} es abierto $\to \exists \epsilon > 0$ tq $]L-\epsilon, L+\epsilon[\subset A_{j_0}$. Por otro lado: $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \to \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq a_n, $b_n \in]L-\epsilon,\ L+\epsilon[$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow [a_{n_0}, b_{n_0}] \subset]L-\epsilon,\ L+\epsilon[\subset A_{j_0} \to [a_{n_0}, b_{n_0}] \cap A = A_{j_0}$ en contra de cómo lo habíamos construido.
Segundo $\Rightarrow$: si no es cerrado, tomamos un punto de acumulación de A que no esté en A y construimos un recubrimiento del que no se pueda extraer un finito (por ejemplo, de $]0,\ 1]$ tomamos $]1/n,\ 2[$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Si no es acotado tomamos entornos de cada punto de forma apropiada y tampoco se podrá extraer un subrecubrimiento finito (por ejemplo, dado $p \in A$, tomamos $]p-n,\ p+n[$, $\forall n \in \mathbb{N}$). $\square$