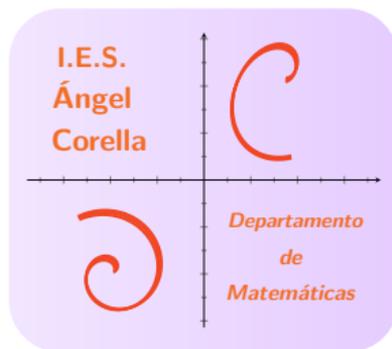


# Geometría euclídea. Distancias en el espacio.

David Matellano    M. Carmen Hurtado

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

16 de mayo de 2024



# índice de contenidos I

- 1 Distancia entre dos puntos
- 2 Distancia de un punto a una recta
- 3 Distancia de un punto a un plano
- 4 Distancia entre dos rectas
  - Distancia entre rectas paralelas.
  - Distancia entre dos rectas que se cruzan.
- 5 Distancia entre dos planos

# Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos

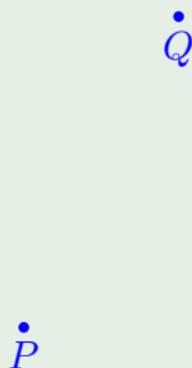


# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$

Figura:  $d(P, Q)$



# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$
- La distancia entre  $P$  y  $Q$  es el módulo del vector  $\vec{PQ}$

Figura:  $d(P, Q)$



# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$
- La distancia entre  $P$  y  $Q$  es el módulo del vector  $\vec{PQ}$
- $d(P, Q) = |\vec{PQ}|$

Figura:  $d(P, Q)$



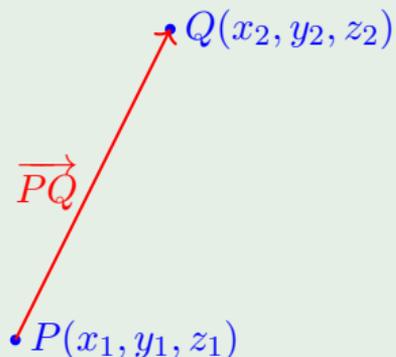
# Distancia entre dos puntos

## Distancia entre dos puntos

- Sean los puntos  $P$  y  $Q$
- La distancia entre  $P$  y  $Q$  es el módulo del vector  $\overrightarrow{PQ}$
- $d(P, Q) = \left| \overrightarrow{PQ} \right|$
- En coordenadas:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Figura:  $d(P, Q)$



# Distancia de un punto a una recta

Distancia de un punto a una recta



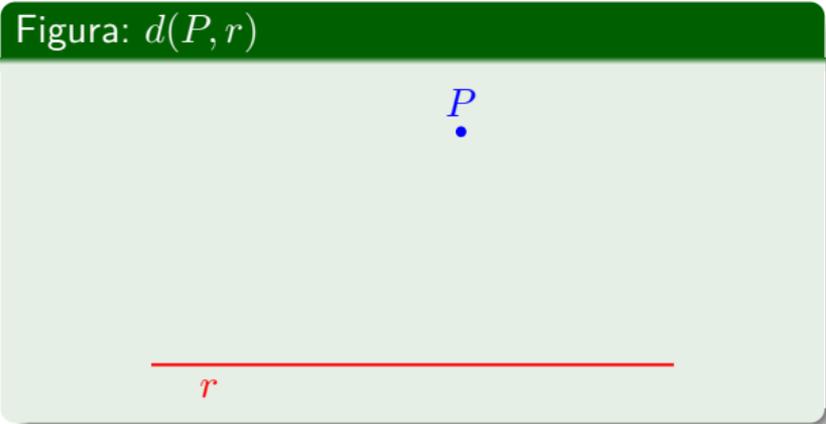
# Distancia de un punto a una recta

## Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$

## Figura: $d(P, r)$

$P$

A diagram illustrating the distance from a point to a line. A blue dot labeled 'P' is positioned in the upper right quadrant. A horizontal red line labeled 'r' is positioned in the lower left quadrant. The background is light green.

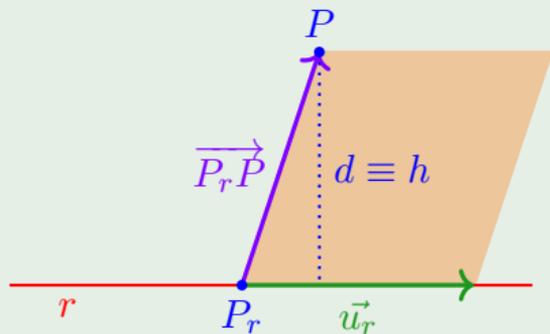
$r$

# Distancia de un punto a una recta

## Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$
- La distancia entre  $P$  y  $r$  es la altura del siguiente paralelogramo:

Figura:  $d(P, r)$

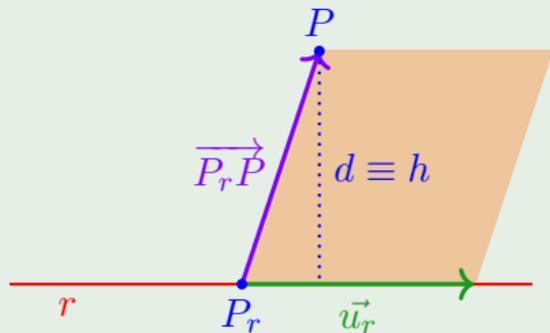


# Distancia de un punto a una recta

## Distancia de un punto a una recta

- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$
- La distancia entre  $P$  y  $r$  es la altura del siguiente paralelogramo:
- $$d(P, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base}}$$

Figura:  $d(P, r)$



# Distancia de un punto a una recta

## Distancia de un punto a una recta

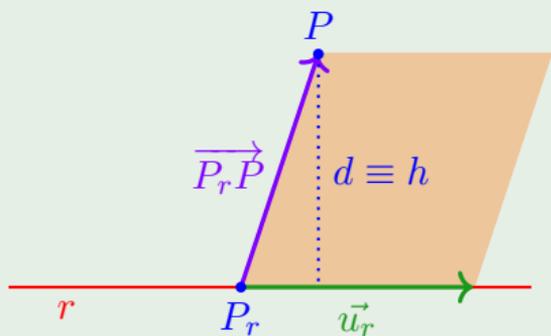
- Sean el punto  $P$  y la recta  $r$
- La distancia entre  $P$  y  $r$  es la altura del siguiente paralelogramo:

$$d(P, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base}}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}|}{|\vec{u}_r|}$$

◀ Distancias rectas paralelas

Figura:  $d(P, r)$



# Distancia de un punto a un plano

Distancia de un punto a un plano

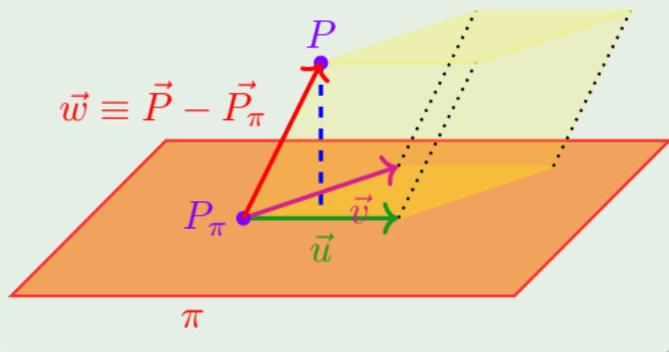


# Distancia de un punto a un plano

## Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

Figura:  $d(P, r)$



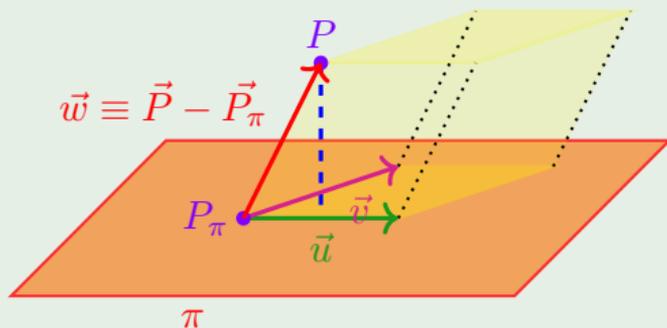


# Distancia de un punto a un plano

## Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
- La distancia de  $P$  a  $\pi$  es la altura del siguiente paralelepípedo:
- $$d(P, \pi) = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}$$

Figura:  $d(P, r)$



# Distancia de un punto a un plano

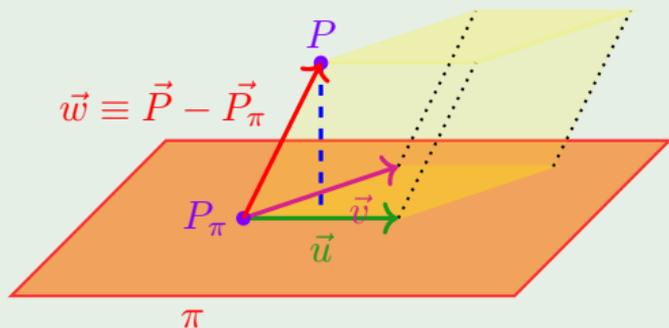
## Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
- La distancia de  $P$  a  $\pi$  es la altura del siguiente paralelepípedo:

- $$d(P, \pi) = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}$$

- $$d(P, \pi) = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Figura:  $d(P, r)$



# Distancia de un punto a un plano

## Distancia de un punto a un plano

- Sean el punto  $P(p_x, p_y, p_z)$  y el plano  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
- La distancia de  $P$  a  $\pi$  es la altura del siguiente paralelepípedo:

$$d(P, \pi) = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}$$

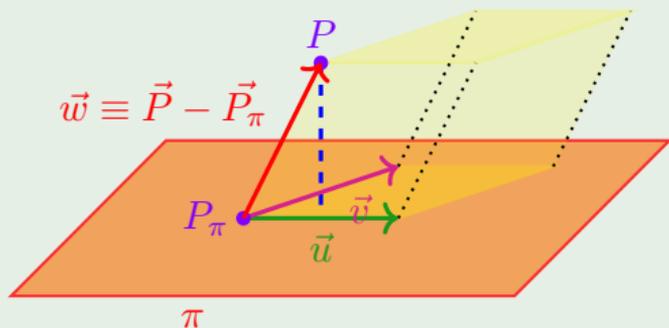
$$d(P, \pi) = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|ap_x + bp_y + cp_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

◀ Método alternativo

◀ Distancias entre planos

Figura:  $d(P, r)$



# Distancia entre dos rectas paralelas

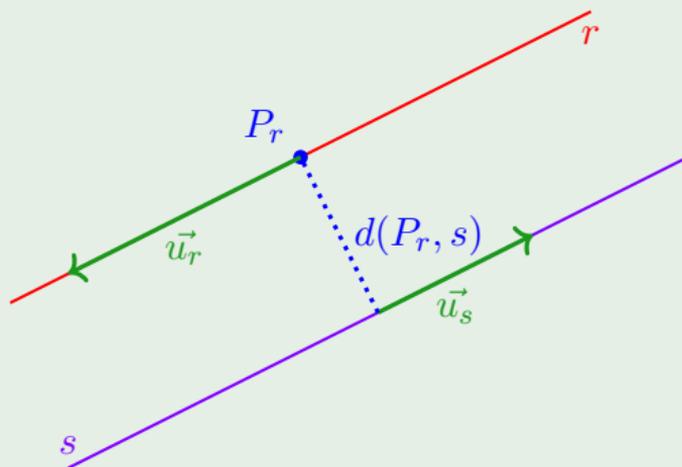
Distancia entre dos rectas paralelas

# Distancia entre dos rectas paralelas

## Distancia entre dos rectas paralelas

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .

## Figura: Distancias rectas paralelas.

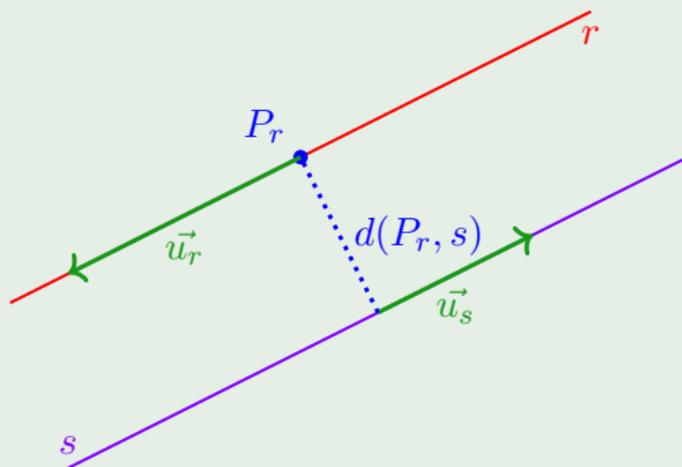


# Distancia entre dos rectas paralelas

## Distancia entre dos rectas paralelas

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la distancia entre cualquier punto de  $r$  a  $s$ .

Figura: Distancias rectas paralelas.

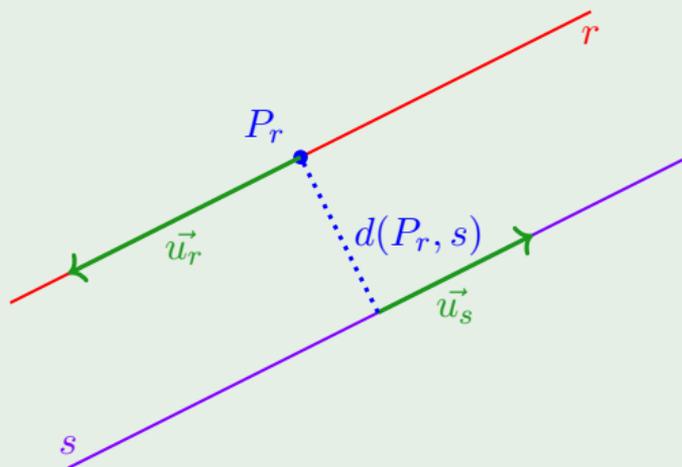


# Distancia entre dos rectas paralelas

## Distancia entre dos rectas paralelas

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la distancia entre cualquier punto de  $r$  a  $s$ .
- Basta con hallar  $d(P_r, s)$ , visto en la sección 2: [▶ Ver sección 2](#)

## Figura: Distancias rectas paralelas.



# Distancia entre dos rectas que se cruzan

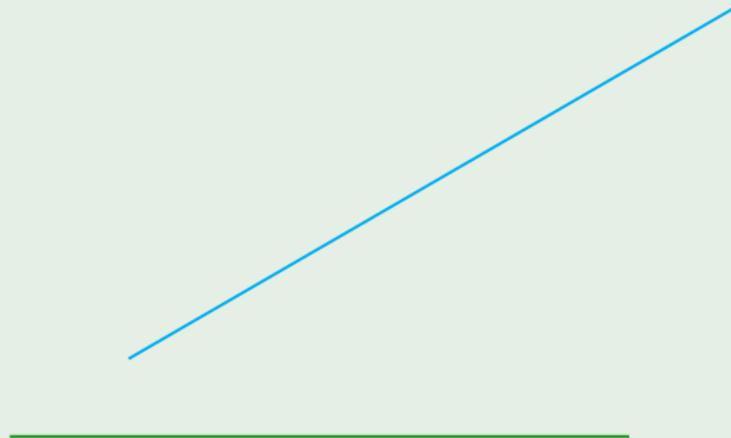
Distancia entre dos rectas que se cruzan.

# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.

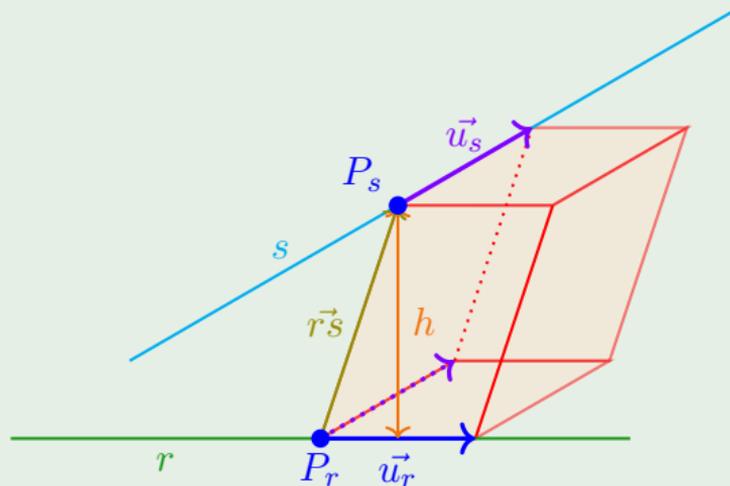


# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la altura  $h$  del paralelepípedo formado por  $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{r}\vec{s})$

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.

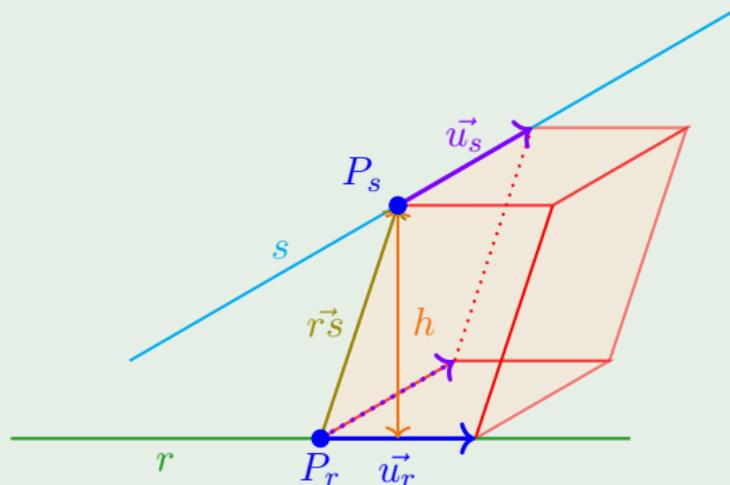


# Distancia entre dos rectas que se cruzan

## Distancia entre dos rectas que se cruzan.

- Sean las rectas  $r$  y  $s$ .
- La distancia de  $r$  a  $s$  es la altura  $h$  del paralelepípedo formado por  $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{r}\vec{s})$
- $D \equiv h = \frac{V}{A_b} = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{r}\vec{s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Método alternativo

Distancia entre dos que se cruzan.Método alternativo.

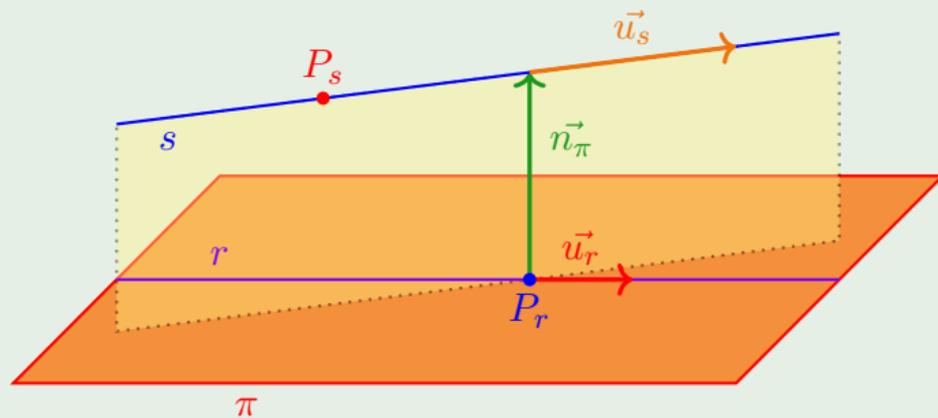
# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Método alternativo

Distancia entre dos que se cruzan. Método alternativo.

- Podemos calcular un plano  $\pi$  que contenga a  $r$  y sea paralelo a  $s$

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



# Distancia entre dos rectas que se cruzan

Método alternativo

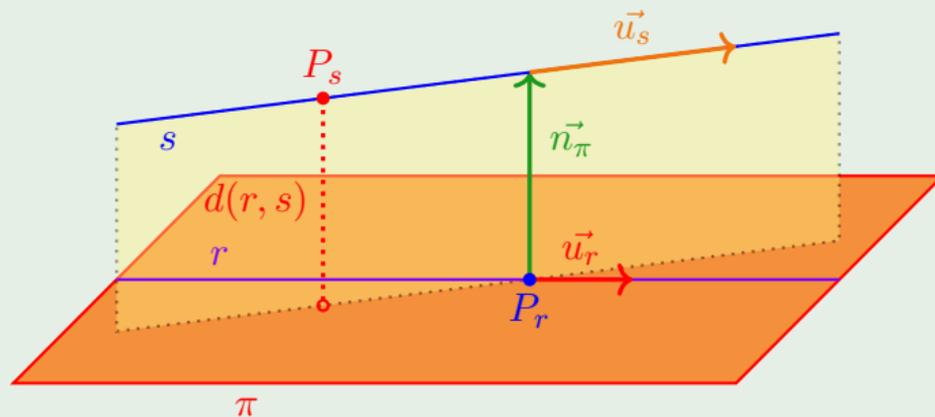
Distancia entre dos que se cruzan. Método alternativo.

- Podemos calcular un plano  $\pi$  que contenga a  $r$  y sea paralelo a  $s$
- La distancia de  $r$  a  $s$  coincide con la distancia de  $P_s$  a  $\pi$ , vista en la sección 5



▶ Ver punto-plano

Figura: Distancias entre rectas que se cruzan.



# Distancia entre dos planos

## Distancia entre dos planos paralelos

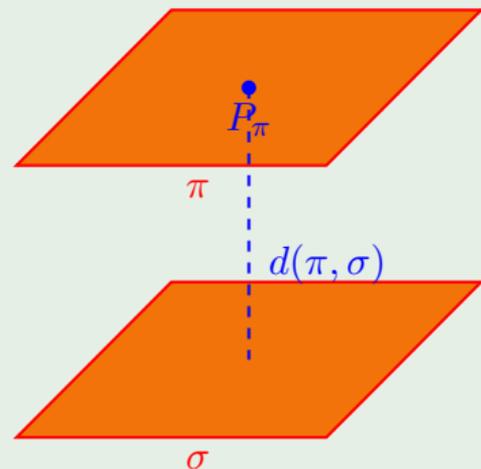


# Distancia entre dos planos

## Distancia entre dos planos paralelos

- La distancia entre 2 planos es 0 si no son paralelos.

Figura: Distancias entre planos paralelos.

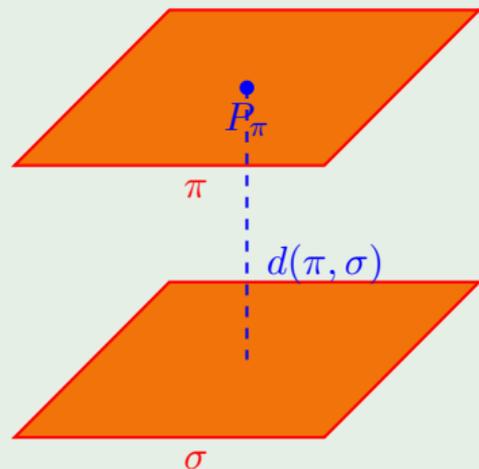


# Distancia entre dos planos

## Distancia entre dos planos paralelos

- La distancia entre 2 planos es 0 si no son paralelos.
- La distancia de  $\pi$  a  $\sigma$  es la distancia de cualquier punto de  $\pi$  a  $\sigma$ .

Figura: Distancias entre planos paralelos.

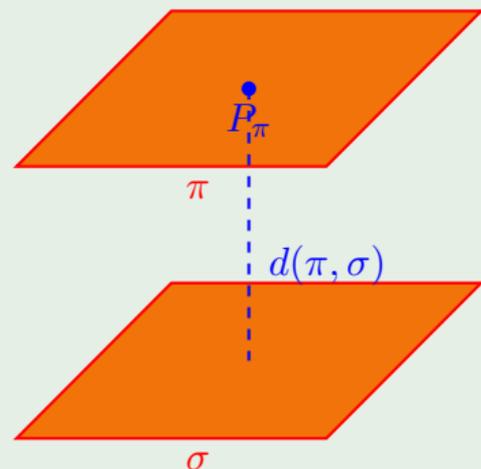


# Distancia entre dos planos

## Distancia entre dos planos paralelos

- La distancia entre 2 planos es 0 si no son paralelos.
- La distancia de  $\pi$  a  $\sigma$  es la distancia de cualquier punto de  $\pi$  a  $\sigma$ .
- Basta con hallar  $d(P_\pi, \sigma)$ , visto en la sección 5. [▶ Ver punto-plano](#)

Figura: Distancias entre planos paralelos.



# Apéndices

- 6 Cálculos con WxMaxima
  - Ajustes iniciales
  - Distancia entre puntos
  - Distancia punto-recta
  - Distancia punto-plano
  - Distancia rectas que se cruzan
    - Primer método
    - Segundo método

◀ Volver al índice principal



# Cálculos con WxMaxima

## Distancia entre puntos

### Ajustes previos

👉 Hemos de cargar el paquete **vect**



```
(% i4) load(vect)$/* Carga paquete vectores*/
```



# Cálculos con WxMaxima

## Distancia entre puntos

### Ajustes previos

 Hemos de cargar el paquete **vect**



Además, es útil crear funciones para el producto vectorial, mixto y  $|\vec{u}|$ .



```
(% i4) load(vect)$/* Carga paquete vectores*/
      vect(u,v):=express(u~ v)$/* Producto vectorial*/
      modulo(u):=sqrt(u.u)$/* Cálculo de |u|*/
      pmixto(u,v,w):=determinant(matrix(u,v,w))$/* producto mixto*/
```

"vect: warning: removing existing rule or rules for "."."



# Cálculos con WxMaxima

## Distancia entre puntos

### Distancia entre puntos

➤ Introducimos  $P, Q$  y hallamos  $\overrightarrow{PQ}$



```
(% i6) P:[1,2,3] Q:[-1,1,2]  
(% i7) PQ:P-Q;
```

```
(PQ) [2, 1, 1]
```



# Cálculos con WxMaxima

## Distancia entre puntos

### Distancia entre puntos

👉 Introducimos  $P, Q$  y hallamos  $\overrightarrow{PQ}$



Utilizamos la función **modulo** creada anteriormente.



```
(% i6) P:[1,2,3] Q:[-1,1,2]
```

```
(% i7) PQ:P-Q;
```

```
(PQ) [2, 1, 1]
```

```
(% i8) D(P,Q)=modulo(PQ);
```

```
(% o8) D ([1, 2, 3], [-1, 1, 2]) =  $\sqrt{6}$ 
```



# Cálculos con WxMaxima

## Distancia punto-recta

### Distancia punto-recta

➡ Introducimos  $P, P_r$  y  $\vec{u}_r$



(% i1) P:[1,2,3]\$ Pr:[-1,-3,1]\$ ur:[1,1,2]\$

# Cálculos con WxMaxima

## Distancia punto-recta

### Distancia punto-recta

- Introducimos  $P, P_r$  y  $\vec{u}_r$
- Hallamos  $\overrightarrow{PP_r}$



(% i1) P:[1,2,3]\$ Pr:[-1,-3,1]\$ ur:[1,1,2]\$

(% i2) PrP:P-Pr;

(PrP) [2, 5, 2]

# Cálculos con WxMaxima

## Distancia punto-recta

### Distancia punto-recta

- Introducimos  $P, P_r$  y  $\vec{u}_r$
- Hallamos  $\overrightarrow{PP_r}$
- Obtenemos  $d = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PP_r}|}{|\vec{u}_r|}$



(% i1) P:[1,2,3]\$ Pr:[-1,-3,1]\$ ur:[1,1,2]\$

(% i2) PrP:P-Pr;

(PrP) [2, 5, 2]

(% i3) D('P,r)=modulo(vect(ur,PrP))/modulo(ur);

(% o13)  $D(P, r) = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{6}}$

# Cálculos con WxMaxima

## Distancia punto-plano

### Distancia punto-plano

➡ Necesitamos  $\vec{n}_\pi$ , el coeficiente  $d$  y el punto  $P = (P_x, P_y, P_z)$



```
(% i15) P:[1,0,3]$ pi:x+y+z-1=0$
```

```
(% i17) n:[1,1,1]; d:-1;
```

```
(n) [1, 1, 1]
```

```
(d) -1
```

# Cálculos con WxMaxima

## Distancia punto-plano

### Distancia punto-plano

👉 Necesitamos  $\vec{n}_\pi$ , el coeficiente  $d$  y el punto  $P = (P_x, P_y, P_z)$



Para sustituir  $P$  en  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ , hacemos  $\vec{n}_\pi \cdot P + d$



(% i15) P:[1,0,3]\$ pi:x+y+z-1=0\$

(% i17) n:[1,1,1]; d:-1;

(n) [1, 1, 1]

(d) -1

## Cálculos con WxMaxima

## Distancia punto-plano

## Distancia punto-plano

➡ Necesitamos  $\vec{n}_\pi$ , el coeficiente  $d$  y el punto  $P = (P_x, P_y, P_z)$



Para sustituir  $P$  en  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ , hacemos  $\vec{n}_\pi \cdot P + d$

➡ 
$$d(P, \pi) = \frac{|aP_x + bP_y + cP_z + d|}{|\vec{n}_\pi|} \Rightarrow d(P, \pi) = \text{abs}(n.P + d) / \text{modulo}(n)$$



```
(% i15) P:[1,0,3]$ pi:x+y+z-1=0$
```

```
(% i17) n:[1,1,1]; d:-1;
```

```
(n) [1, 1, 1]
```

```
(d) -1
```

```
(% i18) D('P,pi)=abs(n.P+d)/modulo(n);
```

```
(% o18) D(P, pi) = sqrt(3)
```

# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando el volumen de un paralelepípedo

Ejemplo: primer método.

👉 Calcule la distancia mínima entre las rectas  $r$  y  $s$ :

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad s \equiv x - 2 = y = \frac{z + 1}{-1}$$



(% i20) r:[x=λ,y=1+λ,z=-1+λ];  
s:[x-2=y,y=-1-z];

(r) [x = λ , y = λ + 1 , z = λ - 1]

(s) [x - 2 = y , y = - z - 1]

# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando el volumen de un paralelepípedo

Ejemplo: primer método.



Obtenemos sus elementos



```
(% i22) ur:[1,1,1]$ Pr:[0,1,-1]$
```

```
(% i23) sol:linsolve(s,[x,y,z]);
```

```
(sol) [x = 1 - %r1 , y = - %r1 - 1 , z = %r1]
```

```
(% i25) us:[-1,-1,1]$Ps:[1,-1,0]$
```



# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando el volumen de un paralelepípedo

Ejemplo: primer método.

➡ Obtenemos el vector  $\overrightarrow{RS} = \vec{P}_s - \vec{P}_r$



(% i26) RS:Ps-Pr;

(RS) [1, -2, 1]



# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando el volumen de un paralelepípedo

Ejemplo: primer método.



Hallamos  $d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{RS}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$



(% i30) D=abs(pmixto(ur,us,RS))/modulo(vect(ur,us));

(% o30)  $D = \frac{3}{\sqrt{2}}$



# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando la distancia de una recta a un plano.

## Ejemplo: segundo método

➡ Creamos un vector  $\vec{n} \sim (\vec{u}_r \times \vec{u}_s)$



```
(% i31) n:vect(ur,us);
```

```
(n) [2, -2, 0]
```



# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando la distancia de una recta a un plano.

## Ejemplo: segundo método

 Creamos un vector  $\vec{n} \sim (\vec{u}_r \times \vec{u}_s)$



Lo podemos simplificar entre 2.



```
(% i31) n:vect(ur,us);
```

```
(n) [2, -2, 0]
```

```
(% i32) n:n/2;
```

```
(n) [1, -1, 0]
```



# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando la distancia de una recta a un plano.

## Ejemplo: segundo método



Creamos un plano  $\pi \parallel s \ r \subset \pi$



```
(% i33) d1:-n.Pr;
```

```
(d1) 1
```

```
(% i34) pi1:n.[x,y,z]+d1=0; /* Plano paralelo a s que contiene a r */
```

```
(pi1) -y + x + 1 = 0
```



# Cálculos con WxMaxima

Distancia entre rectas que se cruzan utilizando la distancia de una recta a un plano.

## Ejemplo: segundo método

➡ Obtenemos la distancia de  $\vec{P}_s$  a  $\pi$



(% i35)  $D = \text{abs}(n \cdot P_s + d1) / \text{modulo}(n); /* D(P_s, \pi)*/$

(% o35)  $D = \frac{3}{\sqrt{2}}$

