TEMA 22: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

TIEMPO: 84 — 84

Esquema

1) Introducción
   1.1) Previos, Stevin
   1.2) Bürgi, Napier, Briggs
   1.3) Análisis infinitesimal, Euler
2 Logaritmos
   2.1) Def + propiedades
   2.2) Teorema + propiedades
3) Exponencial
   3.1) Definición
   3.2) Teorema
   3.3) Def: e + propiedades
4) Gráficas de e^x y $\log(x)$
5) Exponencial de base "a"
   5.1) Def. + propiedades
6) Logaritmo de base "a"
   6.1) Def. + propiedades
   6.2) Notación
7) Consecuencias
   7.1) Derivadas
   7.2) Características
   7.3) Teoremas (límites)$\times 2$
8) Complejos
   8.1) Def: exponencial + propiedades
   8.2) Def: logaritmo
9) Situaciones reales
   9.1) Exponencial: crecimiento proporcional, nº de bacterias, des. radioactiva, leyes estadísticas
   9.2) Logaritmo: pH, escala de Ritcher, sensaciones sonoras

1) Introducción:

▷ Previos y Stevin: aunque los logaritmos datan del siglo XVII, sus fundamentos teóricos comenzaron a formarse mucho antes. La idea subyacente es la comparación de dos progresiones, una aritmética y otra geométrica y la generalización suficiente del concepto de potencia. Ya los antiguos griegos (Arquímides, Diofanto,...) se habían planteado estas cuestiones aunque sin dar ninguna respuesta satisfactoria.

▷ El siguiente paso lo darían Oresme y Stiefel generalizando a los enteros y los racionales los exponentes de las fracciones.

▷ Pero para comparar las potencias y sus exponentes hacían falta tablas (y una base muy cercana a 1). A comienzos del s.XVII ya existían algunas, confeccionadas por Stevin. Estas tablas eran de tanto por ciento y se tomaba $(1+r)^n$ con $r = 0,05;\ 0,04;\ ...$

▷ Jobst Bürgi: suizo, fue uno de los primeros en construir una tabla de logaritmos basándose en las ideas de Stevin. Durante 8 años confeccionó su tabla de logaritmos con una tabla del tipo Stevin como base: $a \cdot (1+r)^n$ con $r = (1/10)^4$ y para evitar encontrarse fracciones, eligió $a = 10^8$. Puso esos números $g_k = 10^8(1+r)^k$ en correspondencia con $10 \cdot k$ para obtener:

$$\begin{array}{ccccccc} 10^8 & -- & 10^8(1+r) & -- & 10^8(1+r)^2 & -- & \dots \\ 0 & -- & 10 & -- & 20 & -- & \dots \end{array}$$

Los números de la serie superior fueron impresos en pintura negra y los de la parte inferior fueron impresos en pintura roja y se les llamó logaritmos rojos. Es decir, los rojos constituían los logaritmos de los negros, divididos por 10^8 y con base $(1,001)^{1/10}$.
Aunque Bürgi construyó estas tablas y pensó antes en el concepto de logaritmo, al publicarlo posteriormente a Napier, casi nadie se acuerda de él.

▷ Napier: John Napier, inglés, fue el primero en publicar una obra sobre logaritmos usando las ideas de Stevin, Stiefel y Arquímides. Napier tomó $(1 - 10^7)$ como base para la potencia y sacó, a principios del s.XVII, su tabla de logaritmos.

▷ Henry Briggs: inglés fascinado por las ideas de Napier, publicó, a la muerte de éste, una obra donde se recogían los logaritmos decimales del 1 al 1.000 con 14 decimales exactos. En publicaciones posteriores se ampliaría hasta 20.000 y de 90.000 a 100.000. A partir de sus obras se publicarían multitud de tablas de logaritmos incluyendo los de las funciones trigonométricas.

▷ Hay que señalar que ni para Bürgi ni para Napier el logaritmo de un producto o de un cociente era igual a la suma o resta de sus logaritmos.

▷ Análisis infinitesimal: cuando el análisis infinitesimal entró en auge, se encontraron métodos más cómodos para el cálculo de logaritmos. La relación "estrella" (y es la motivación de la definición de logaritmo en este tema) es que si en la rama positiva de la hipérbola $1/x$ tomamos puntos A y B que son respectivamente proporcionales a $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sobre la misma rama, entonces el área de los cuadriláteros curvilíneos bajo la curva y de bases AB y $\hat{A}\hat{B}$ son iguales.

▷ Euler: la teoría de las funciones logarítmicas obtuvo su culminación en los trabajos de Euler. A él pertenece la definición general de las funciones logarítmica y exponencial como recíprocamente inversas, la extensión del concepto de logaritmo al caso complejo, la introducción del símbolo "e" para los logaritmos naturales,...

2) Logaritmos:

▷ **Definición**: llamaremos función logarítmica a la siguiente función:

$$\begin{aligned} \log : \ \mathbb{R} &\longmapsto \quad \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \quad \log(x) \quad = \int_1^x \frac{1}{t}dt \end{aligned}$$

es decir, el área bajo la curva de la gráfica de la hipérbola equilátera en el primer cuadrante.

▷ **Propiedades**:

1) Si $x > 1 \longrightarrow \log(x) > 0$
2) Si $x = 1 \longrightarrow \log(1) = 0$
3) Si $0 < x < 1 \longrightarrow \log(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0$
4) Si $x = 0$ la función no está definida.
5) $\log(x)$ es derivable en $\mathbb{R}^+$ (pues es la integral de una función continua) y según el Tª Fundamental del Cálculo: $(\log(x))' = \dfrac{1}{x}$.

▷ **Teorema**: el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.

Proof. Sea $\alpha > 0$, $g(x) = \log(x \cdot \alpha) \longrightarrow g'(x) = \{ \text{ Tª.F.C. } \} = \dfrac{1}{x\alpha}\alpha = \dfrac{1}{x} \longrightarrow g'(x) = (\log(x))' \longrightarrow$ $\longrightarrow g(x) = \log(x) + k, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Si $x = 1 \longrightarrow \log(\alpha) = k \longrightarrow \log(x\alpha) = \log(x) + \log(\alpha)$

□

▷ **Corolario**: el logaritmo de una potencia natural es el exponente por el logaritmo.

Proof. Por inducción:
$n = 0$: $\log(x^0) = \log(1) = 0 = 0 \cdot \log(x)$
Cierto para n: $\log(x^n) = n\log(x)$
$n+1$: $\log(x^{n+1}) = \log(x^n \cdot x) = \log(x^n) + \log(x) = n\log(x) + \log(x) = (n+1)\log(x)$

□

▷ **Corolario**: el logaritmo de un cociente es la diferencia de logaritmos.

Proof. $\log(x) = \{\alpha > 0\} = \log(\frac{x}{\alpha} \cdot \alpha) = \log(\frac{x}{\alpha}) + \log(\alpha) \longrightarrow \log(\frac{x}{\alpha}) = \log(x) - \log(\alpha)$

□

▷ **Más propiedades**:

6) Su dominio son lo números positivos: $\mathbb{R}^+$.
7) En $]0, 1[$ es negativa, en $]1, +\infty[$ es positiva y corta al eje $\mathbb{X}$ en $(1, 0)$.
8) Es estrictamente creciente pues $(\log(x))' = \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall x > 0$.

9) Es continua, infinitamente derivable (analítica de hecho) y cóncava pues $(\log(x))'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

10) No está acotada ni superiormente, pues $\log(2^n) = n \cdot \log(2) \to +\infty$, ni inferiormente, pues $\log(2^{-n}) = -n\log(2) \to -\infty$. Luego su imagen es $]-\infty, +\infty$.

11) En $x = 0$ tiene una asíntota vertical pues $\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty[$.

12) $\log(x)$ es una biyección entre $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$ (estrictamente creciente $\longrightarrow$ inyectiva y como su imagen en todo $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ sobreyectiva).

3) Exponencial:

$\triangleright$ Al ser $\log(x)$ una biyección, admite función recíproca, $(\log)^{-1}$ y ésta tendrá por dominio los números reales y por recorrido los reales positivos. Entonces:

$\triangleright$ **Definición**: definimos la función exponencial como $\exp(x) = [\log]^{-1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ **Teorema**: la exponencial de una suma es el producto de las exponenciales:

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Proof. Sean $\exp(a) = x_1$, $\exp(b) = x_2 \longrightarrow \log(x_1) = a$, $\log(x_2) = b \longrightarrow a+b = \log(x_1) + \log(x_2) = \log(x_1 \cdot x_2) \longrightarrow \exp(a+b) = x_1 \cdot x_2 = \exp(a) \cdot \exp(b)$

$\square$

$\triangleright$ **Teorema**: la derivada de la función exponencial es ella misma: $\Big(\exp(x)\Big)' = \exp(x)$, luego $\Big(\exp(x)\Big)^{k/} > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Proof. $(\exp(x))' = (\log(x)^{-1})' = \dfrac{1}{\log'(\log(x)^{-1})} = \dfrac{1}{1/\log(x)^{-1}} = \log(x)^{-1} = \exp(x)$

$\square$

$\triangleright$ **Corolario**: la función exponencial es convexa y es infinitamente derivable.

$\triangleright$ **Definición**: definimos el número "e" como: $1 = \log(\mathrm{e}) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} dx$, $(1 < \mathrm{e} < 3)$.

$\triangleright$ **Teorema**: $\exp(x) = [\exp(1)]^x = \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proof. Vamos a probarlo primero para $\mathbb{N}$, luego para $\mathbb{Q}$ y, finalmente, para $\mathbb{R}$.
$\mathbb{N}$: sea $k = 0$: $\exp(0) = 1$; $(\exp(1))^0 = 1$; $\mathrm{e}^0 = 1$.
Sea cierto para $k-1$: $\exp(k-1) = [\exp(1)]^{k-1} = \mathrm{e}^{k-1}$
Sea $n = k$: $\exp(k) = \exp(k-1+1) = \{$ suma es producto $\} = \exp(k-1)\exp(1) = \{$ H.I. $\} =$
$= (\exp(1))^k = \mathrm{e}^{k-1}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^k$.
Se demuestra análogamente para $\mathbb{Z}$.
Veámoslo para $\mathbb{Q}$: sea $a/b \in \mathbb{Q}$.

$\exp(a) = (\exp(1))^a = \exp(b \cdot a/b) = \exp(a/b + \overbrace{\cdots}^{b \text{ veces}} + a/b) = \exp(a/b) \cdot \overbrace{\cdots}^{b} \cdot \exp(a/b) = (\exp(a/b))^b$.
Luego, $\exp(a/b) = (\exp(1))^{a/b} = \mathrm{e}^{a/b}$.
Para $x \in \mathbb{R}$ consideramos $\{x_n\} \longmapsto x$ en $\mathbb{Q}$ y por la complitud de $\mathbb{R}$ y la continuidad de la exponencial (pues su recíproca lo es) definimos $\lim_{x_n \to x} \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} x_n} = \mathrm{e}^x$.

$\square$

$\triangleright$ **Definición** (usando series): definimos la función exponencial como: $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $(\mathrm{e} = 2,7182...)$.

▷ *Nota*: hemos usado el desarrollo de Taylor de $\exp(x)$ para $x = 0$ y se comprueba que la serie así definida converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$ con el criterio del cociente.

▷ **Teorema**: el número "e" es irracional.

Proof. Sea $\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n$ y supongamos que $\mathrm{e} = \dfrac{a}{b}$.
Tomemos $n \in \mathbb{N}$ con $n > 3, b$. Entonces: $\frac{a}{b} = 1+1+\ldots+\dfrac{1}{n!}+R_n \longrightarrow n!\dfrac{a}{b} = n!+n!+n!\dfrac{1}{2!}+\ldots+1+n!R_n$ y tenemos que $n!\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ así como todos los sumandos hasta $\dfrac{n!}{n!} \longrightarrow n!R_n$ ha de ser entero.
$R_n = \dfrac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}$ con $0 < \xi < 1 \longrightarrow 1 < \mathrm{e}^\xi < \mathrm{e} < 3 \longrightarrow 0 < R_n = \dfrac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} \longrightarrow$
$\longrightarrow 0 < n!R_n = \dfrac{3}{(n+1)} < 1$ pues $n > 3$.
Pero lo anterior no puede ser ya que $\nexists c \in \mathbb{Z}$ con $c \in]0,1[\longrightarrow$ e es irracional.

□

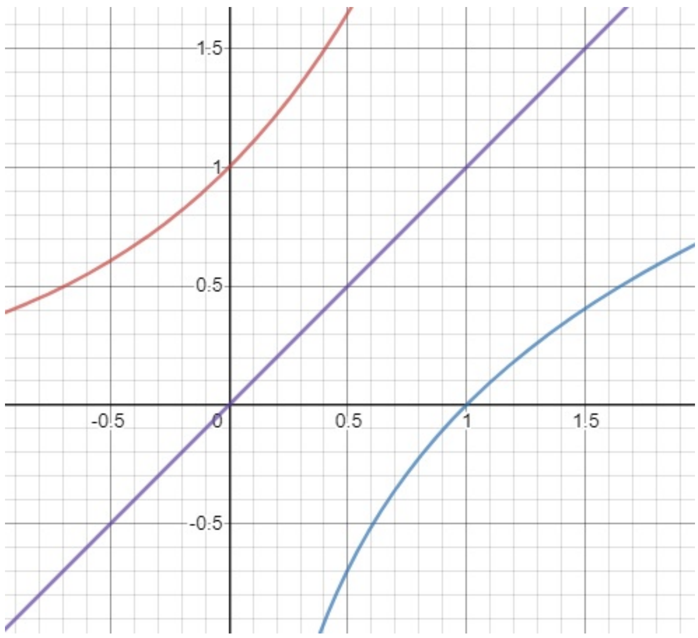
▷ *Nota*: de hecho, "e" es trascendente, es decir, no es solución de ninguna ecuación algebraica (ecuación polinómica con coeficientes racionales); aunque demostrar este hecho excede con mucho este tema.

4) Gráficas de e^x y $\log(x)$:

▷ De acuerdo a las propiedades de la función logaritmo (ya explicadas) y que e^x es su función recíproca, obtenemos lo siguiente:

▷ **Propiedades de e^x:**

1) Sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$.
2) Dominio de $\mathrm{e}^x = \mathbb{R}$.
3) Recorrido de $\mathrm{e}^x = \mathbb{R}^+$.
4) Para por el punto $(0, 1)$.
5) Es estrictamente creciente.
6) Es convexa en todo su dominio.
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ($\longrightarrow$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$).
8) La función exponencial es un isomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$ que transforma sumas en productos.



5) Exponencial de base "a":

▷ **Definición**: definimos la función exponencial de base $a > 0$ ($a \neq 1$)) como:

$$y = a^x = \exp(x\log(a)) = \mathrm{e}^{x\cdot\log(a)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

▷ **Propiedades**:

1) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.

Proof. $(a^x)^y = \mathrm{e}^{y\log(a^x)} = \mathrm{e}^{y\log\left(\mathrm{e}^{x\log(a)}\right)} = \mathrm{e}^{x\cdot y\log(a)} = a^{x\cdot y}$ □

2) $a^1 = a$.

Proof. $a^1 = \mathrm{e}^{1\cdot\log(a)} = \mathrm{e}^{\log(a)} = a$ □

3) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Proof. $\mathrm{e}^{(x+y)\log(a)} = \mathrm{e}^{x\log(a)} \cdot \mathrm{e}^{y\log(a)} = a^x \cdot a^y$

□

▷ En la definición hemos eliminado el caso $a = 1$ para evitar tener que lidiar con la función constante $f(x) \equiv 1$ y tener que tratarla a parte o como caso especial en la mayoría de las situaciones. Hecha esta aclaración, consideramos dos posibles casos para los posibles valores de a:

▷ **Caso 1 ($a > 1$)**: si $a > 1$ la función es estrictamente creciente.

Proof. Si $x < y \longrightarrow x\log(a) < y\log(a) \longrightarrow \mathrm{e}^{x\log(a)} < \mathrm{e}^{y\log(a)} \longrightarrow a^x < a^y$.

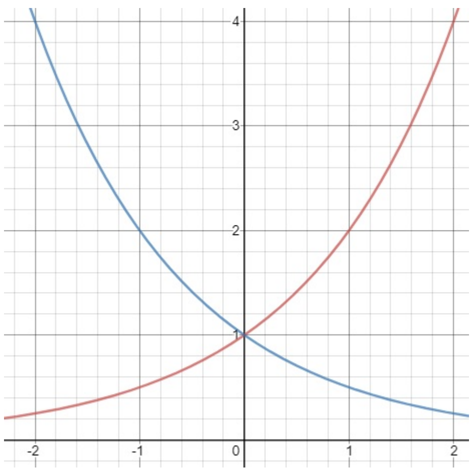
□

▷ **Caso 2 ($0 < a < 1$)**: si $0 < a < 1$ la función es estrictamente decreciente.

Proof. Análoga a la anterior y teniendo en cuenta que si $0 < a < 1$, el log invierte las desigualdades.

□

▷ Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = (1/a)^x$ son simétricas respecto al eje $\mathbb{Y}$, es decir, $f(x) = g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
En ambos casos, son una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ que transforma sumas en productos.
Como es biyección, podemos definir su inversa.



6) Logaritmo de base “a”:

▷ Vamos a definir la función recíproca de a^x donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

▷ **Definición**: llamamos logaritmo en base “a” a la siguiente función:

$$y = \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

▷ **Propiedades**:

1) La gráfica de $\log_a(x)$ es simétrica respecto a la recta $y = x$ de la función a^x

2) Si $a > 1$, $log_a(x)$ es estrictamente creciente.

3) Si $0 < a < 1$, $\log_a(x)$ es estrictamente decreciente.

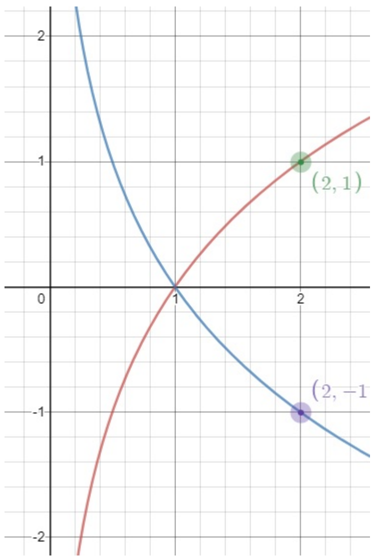
4) Las gráficas de $\log_a(x)$ y $\log_{1/a}(x)$ son simétricas respecto del eje $\mathbb{X}$.

5) Ambas son biyecciones de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ que transforman productos en sumas.

▷ **Notación**: hay dos bases especiales:

I) Si la base es el número “e” lo llamaremos logaritmo neperiano y lo notaremos por “ln”. En algunos textos aparece como “L” o “Ln”.

II) Si la base es 10 lo llamaremos logaritmo decimal y lo notaremos por “log”.



▷ **Cambio de base**: si tenemos $\log_a(x)$ y $\log_b(x)$, ¿qué relación guardan entre ellos?

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \cdot \log_a(x)$$

7) Consecuencias:

▷ Antes de considerar los casos reales donde aparecen las funciones exponenciales y logarítmicas, veamos una serie de resultados que atañen a las derivadas y algunas caracterizaciones útiles.

▷ **Derivadas**:

▷ Las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a(x)$ son, por definición, infinitamente derivables y, además:

$$\left(a^x\right)^{n/} = a^x(\ln(a))^n$$

$$\left(\log_a(x)\right)^{n/} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{\ln(a)\cdot x^n}$$

▷ Si tenemos $h(x) = f(x)^{g(x)} \Longrightarrow h'(x) = h(x)\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$

▷ **Caracterizaciones**:

▷ Si $f(x)$ es derivable y $f'(x) = \alpha \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = k\mathrm{e}^{\alpha\cdot x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

▷ Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ es estrictamente creciente y verifica:

a) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $f(1) = a > 1$

Entonces $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

▷ Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ es estrictamente decreciente y verifica:

a) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $f(1) = a < 1$

Entonces $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

▷ Si $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y verifica:

a) $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $\exists a \in \mathbb{R}^+, a > 1$ tal que $f(a) = 1$

Entonces $f(x) = \log_a(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

▷ Si $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente y verifica:

a) $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $\exists a \in \mathbb{R}^+, a < 1$ tal que $f(a) = 1$

Entonces $f(x) = \log_a(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$\triangleright$ **<u>Logaritmo natural</u> de un entero positivo**: si consideramos el desarrollo en series de: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ con $-1 < x \leq 1$, obtenemos que: $\ln(1+n) = \ln(n) + 2\Big[\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{3(2n+1)^3} + \dfrac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\Big]$ que permite calcular el logaritmo de un número natural a partir del natural anterior (así era como se hacían las tablas de logaritmos).

$\triangleright$ **<u>Teorema</u>**: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^n}{x^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Proof. No es más que una aplicación de la regla de L'Hôpital.

□

$\triangleright$ **<u>Teorema</u>**: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln(x))^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha > 0$

Proof. No es más que otra aplicación de la regla de L'Hôpital.

□

8) Complejos:

▷ Consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ con $z \in \mathbb{C}$. Dicha serie es convergente $\forall z \in \mathbb{C}$.

▷ **Definición**: llamamos exponencial compleja a la función $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

▷ **Propiedades**:

1) $\exp(z)' = \exp(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2) $\exp(0) = 1$.
3) Las dos primeras propiedades caracterizan a la exponencial.
4) Si $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, es decir, $\exp(z) = \mathrm{e}^z$ extiende a la exponencial real.
5) Teorema de adición: $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.
6) Fórmula de Euler: $\forall t \in \mathbb{R}$, se cumple que: $\exp(i \cdot t) = \cos(t) + i\sin(t) \longrightarrow \mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$.
7) Dado $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, tenemos: $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z)))$.
8) La exponencial compleja no se anula nunca.
9) e^z es periódica de período $2\pi i$; $e^z = \mathrm{e}^w \longleftrightarrow z - w \in 2\pi i \in \mathbb{Z}$.
10) La exponencial compleja es analítica.

▷ El comportamiento periódico de e^z se va a traducir en que la solución $\mathrm{e}^z = w \neq 0$ va a tener infinitas soluciones. Tenemos la siguiente definición.

▷ **Definición**: cualquier número complejo satisfaciendo que $\mathrm{e}^w = z$ se llama logaritmo de z. Los representamos por: $Log(z) = \{\ln(|z|) + i \cdot (arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \ln(|z|) + i \cdot Arg(z),\ z \in \mathbb{C}$.

▷ **Definición**: llamamos logaritmo principal a $\ln(z) = \ln(|z|) + i \cdot arg(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ $(k = 0)$.

▷ *Nota*: $log(z) + log(w) \neq log(z \cdot w)$ en general, pero sí es cierto que $\ln(z) + \ln(w) \in Log(z \cdot w)$.

9) Situaciones reales:

$\triangleright$ Existe un gran número de fenómenos naturales (de carácter físico, químico, biológico,...) en que las medidas de dos magnitudes están ligadas por ecuaciones exponenciales o logarítmicas ($y = y_0 \cdot e^{kx} \longleftrightarrow x = \frac{1}{k}\ln(\frac{y}{y_0})$).

$\triangleright$ En general, siempre que una magnitud cambie con una velocidad proporcional a esa magnitud, se puede asegurar que la relación matemática está basada en la función exponencial y obedece a llamada "ley de crecimiento". Si derivamos, $y' = (y_0 e^{kx})' = k y_0 e^{kx} = k \cdot y$, vemos que la variación de "y" es proporcional a ella misma.

$\triangleright$ Número de bacterias que encierra un cultivo: depende del tiempo y de la velocidad de variación de "$y(t)$", que es proporcional al número presente de bacterias en ese momento, "$y(t_k)$". Lo anterior nos hace prever una ley exponencial para expresar "$y(t)$" de la forma $y(t) = y_0 e^{kt}$ con $y_0 =$ número inicial de bacterias.

$\triangleright$ Velocidad de transformación en glucosa y sacarosa del azúcar de caña en una solución diluida: se ha demostrado que es proporcional a la concentración del azúcar no transformada, por lo que $y'(t) = k \cdot y(t) \longrightarrow y(t) = y_0 e^{k \cdot t}$, con $y_0 =$ concentración para $t = 0$.

$\triangleright$ Desintegración de las sustancias radioactivas: este fenómeno ocurre de manera que el número de átomos de un elemento radioactivo que se desintegran en un tiempo dado es proporcional al número actual de átomos y, por tanto, obedece a una ley exponencial: $c(t) = c_0 e^{-k \cdot t}$, donde $c_0 =$ nº de átomos en $t = 0$. Se llama periodo de desintegración al tiempo en que el número de átomos se reduce a la mitad (en miles de años). La vida media, ν, de un material radioactivo se define como la media de vida de sus núcleos radioactivos. A $k = \dfrac{1}{\nu}$, se la llama constante de desintegración que mide la probabilidad de desintegración.

$\triangleright$ Absorción de la energía de una onda por un determinado medio: $I = I_0 \cdot e^{-\lambda x}$, donde I_0 es la intensidad inicial de la onda, "λ" el coeficiente de absorción del medio y "x la longitud del trayecto.

$\triangleright$ Interés continuo: proporciona el capital disponible acumulado a un interés continuo, "i", anual en tanto por uno: $c = c_0 \cdot e^{i \cdot t}$, donde c_0 es el capital inicial.

$\triangleright$ Leyes estadísticas: la función Normal obedece a una expresión $f(x) = k \cdot e^{-x^2}$.

$\triangleright$ En los ejemplos anteriores podemos tomar la variable del exponente tomando logaritmos. Sin embargo, la función logarítmica tiene interés *per se* en las ciencias experimentales.

$\triangleright$ Concepto de pH: en Química, para considerar el carácter de una disolución (ácido, básico o neutro) se utiliza el concepto de pH para expresar las concentraciones de iones positivos de hidrógeno. El danés Sorensen definió el pH como el logaritmo decimal del inverso de la concentración (en moles por litro) de iones de hidrógeno:

$$pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right) = -\log([H^+])$$

$\triangleright$ Escala Ritcher: la magnitud de un seísmo en la escala Ritcher viene dado como una función logarítmica de la energía, "E", del seísmo en Kw/hora:

$$M = k_1 \cdot \log(\alpha E) + k_2 \approx 0,67 \cdot \log(0,37 \cdot E) + 1,46$$

$\triangleright$ Sensaciones sonoras: para las sensaciones sonoras, medidas en decibelios, existe una función logarítmica que nos relaciona las mismas con la intensidad "I" del sonido y la intensidad mínima, "I_0", para ser percibido:

$$S = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$