TEMA 18: ÁLGEBRA DE MATRICES. APLICACIONES AL CAMPO DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA.

TIEMPO: 76 — 78

Esquema

1) Introducción
   1.1) Antigua China
   1.2) Determinantes
   1.3) Matrices (Cayley)
2 Definiciones
   2.1) Def: matriz (a través de homomorfismos)
   2.2) Def: fila + orden + traspuesta + triangular + conjugada + orlar
   2.3) Def: alternativa
3) Estructuras
   3.1) Suma
   3.2) Producto por un escalar
   3.3) Producto de matrices
4) Determinantes, menores, rango
   4.1) Def: determinante
   4.2) Def: menor
      4.2.1) Complementario
      4.2.2) Adjunto
   4.3) Def: rango
5) Matriz inversa
   5.1) Def: automorfismos
   5.2) Resultados
   5.3) Def: regular
   5.3) Cálculo de la matriz inversa
6) Aplicaciones
   6.1) 1-3: Álgebra
   6.2) 4: Geometría
   6.3) 5: Ingeniería y Física
   6.4) 6: Estadística
   6.5) 7: Otros

1) Introducción:

▷ Antigua China: la primera vez que tenemos conocimiento del uso de matrices se remonta a la Antigua China y a la obra-recopilatorio de los logros de la matemática China hasta el s.I d.C. "La Matemática en Nueve Capítulos". Obviamente ellos no las llamaron matrices y las filas y las columnas no gozaban de las mismas propiedades. Las usaban para resolver sistemas de ecuaciones lineales de una manera muy parecido al método de Gauss (para ello inventaron los números negativos, desconocidos en Europa hasta el s. XV) y las aplicaban a las finanzas, obras hidráulicas, cuadrados mágicos,.... Destaquemos que en Europa no se habla de determinantes hasta el s.XVII (curiosamente, las "matrices" aparecen después para nosotros).

▷ Determinantes: los determinantes tuvieron un gran desarrollo durante los siglos XVII-XIX donde hubo contribuciones de Leibniz, Lagrange, Vandermonde, Gauss, Jacobi,...

▷ Cayley: antes de que Cayley, en el s.XIX, introdujera las nociones básicas sobre matrices, ya se habían descubierto muchas de sus propiedades. El mérito de Cayley estriba en extraer la idea de matriz a partir del determinante y, por ello, es considerado como el fundador de la teoría de matrices. En sus trabajos, Cayley introduce la suma de matrices, su producto (y ya se da cuenta de que no es conmutativo en general), el producto por un escalar, la matriz nula, la inversa, la simétrica,...aunque comete algunos fallos como asegurar que $A \cdot B = 0$ si A o B son no invertibles (y esto es falso, se requiere que ambas no lo sean).

▷ Tras la publicación de la obra de Cayley mucho matemáticos han contribuido a ampliar y completar al teoría de matrices. Destacamos a Frobenius y a Jordan.

2) Definiciones:

$\triangleright$ Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y dos espacios vectoriales sobre él, $(V, +, \cdot)$ y $(\hat{V}, +, \cdot)$ con $dim(V) = m$, $dim(\hat{V}) = n$, podemos considerar $f : V \mapsto \hat{V}$ homomorfismo. Como ya sabemos, podemos determinarlo si conocemos las imágenes de una base de V.

$\triangleright$ Sean $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\hat{B} = \{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n\}$ bases de V y $\hat{V}$ respectivamente. Entonces, dado $b \in V \longrightarrow b = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$
Como $f(b) \in \hat{V} \longrightarrow f(b) = \beta_1 \hat{v}_1 + \ldots + \beta_n \hat{v}_n$
Entonces: $\beta_1 \hat{v}_1 + \ldots + \beta_n \hat{v}_n = f(b) = \{$ "f" lineal $\} = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_m f(v_m) = \alpha_1(a_{11}\hat{v}_1 + a_{12}\hat{v}_2 + \ldots + a_{1n}\hat{v}_n) + \ldots + \alpha_m(a_{m1}\hat{v}_1 + a_{m2}\hat{v}_2 + \ldots + a_{mn}\hat{v}_n)$. Agrupando y teniendo en cuenta la unicidad de representación respecto a la base, obtenemos:

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_m a_{m1} \\ \vdots \\ \beta_n = \alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_m a_{mn} \end{cases}$$

es decir, si conocemos las imágenes de una base B podemos determinar el homomorfismo. A las componentes de las imágenes de B $(f(v_1), \ldots, f(v_m))$ respecto de $\hat{B}$ las escribimos como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1 \\ \vdots \\ f(v_m) \end{pmatrix}$$

$\triangleright$ **Definición**: a $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ la llamaremos matriz asociada al homomorfismo "f" entre V y $\hat{V}$.

$\triangleright$ *Nota*: al ser la representación respecto a la base única, existe una biyección entre las matrices $m \times n$ y los homomorfismo entre dos espacios vectoriales.

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos filas a las líneas horizontales y columnas a las verticales.

$\triangleright$ **Definición**: decimos que M tiene/es de orden $(m \times n)$ donde $m = dim(V) =$ nº de filas y $n = dim(\hat{V}) =$ nº de columnas. En el caso de que $m = n$ diremos que M es cuadrada.

$\triangleright$ A los elementos de A los notaremos por a_{ij} con $i =$ fila y $j =$ columna.
Dos matrices serán iguales cuando: $A = B \longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos matriz fila a las de orden $(1 \times n)$ y matriz columna a las de orden $(m \times 1)$.

$\triangleright$ **Definición**: llamaremos matriz traspuesta de una dada a la que se obtiene cambiando las filas por las columnas de la original: si $A \in \mathcal{M}_{m\times n} \longleftrightarrow A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ y $a^t_{ij} = a_{ji}$. Además, $A = (A^t)^t$.

$\triangleright$ **Definición**: decimos que A es simétrica si $A = A^t$, esto es, si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

$\triangleright$ **Definición**: una matriz es antisimétrica si $A^t = -A$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j$. Esto fuerza a que $a_{jj} = 0$, $\forall j$.

$\triangleright$ **Teorema**: toda matriz cuadrada se puede descomponer de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$\triangleright$ **Definición**: una matriz cuadrada es triangular inferior (superior) si $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$ ($a_{ij} = 0$, $\forall i > j$).

$\triangleright$ **Definición**: una matriz es diagonal si todos sus elementos $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, es decir, cuando es triangular superior e inferior a la vez. Si, además, $a_{jj} = \alpha \in \mathbb{K}$, diremos que es matriz escalar.

$\triangleright$ **Definición**: si tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ podemos hablar de la matriz conjugada de A, $\overline{A}$, donde sus elementos son los conjugados de los elementos de A.

$\triangleright$ **Definición**: diremos que A es hermitiana si $A = \overline{A^t}$ ($\longrightarrow a_{jj} \in \mathbb{R}, \forall j$).

$\triangleright$ **Definición**: una matriz es normal si $\overline{A^t} \times A = A \times \overline{A^t}$.

$\triangleright$ Si en una matriz eliminamos filas o columnas obtenemos una submatriz de la primera. El proceso contrario (añadir filas o columnas) se llama orlar una matriz.

$\triangleright$ Podríamos haber definido el concepto de matriz de otra manera en vez de usar homomorfismos entre espacios vectoriales. Por ejemplo: dado un cuerpo $\mathbb{K}$, una matriz sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto de $(m \times n)$ elementos representados mediante "m" filas y "n" columnas.
La ventaja del enfoque que he dado con homomorfismo es que las operaciones y sus propiedades se definen de manera "natural" y no hay que demostrar nada pues todo se hereda de las propiedades de los homomorfismos.

3) Estructuras:

▷ **Definición**: al conjunto de todos los homomorfismos (aplicaciones lineales) entre los espacios vectoriales V y $\hat{V}$ lo llamaremos: $L(V;\hat{V})$.

▷ **Suma de matrices**: dados $f, g \in L(V;\hat{V})$, definiendo $h = f + g : V \mapsto \hat{V}$ dada por $h(v) = (f+g)(v) = f(v)+g(v)$ se tiene que $h \in L(V;\hat{V})$. Esto nos dice que existe una matriz asociada al homomorfismo "h". Si $M_1 = (a_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ y $M_2 = (b_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ son las matrices asociadas a "f" y "g" respectivamente, observamos que la matriz M asociada a "h" es: $M = M_1 + M_2 = \Big(a_{ij} + b_{ij}\Big)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$, es decir, la suma elemento a elemento de M_1 con M_2.

▷ $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ es un grupo abeliano.

▷ **Producto por un escalar**: dados $f \in L(V;\hat{V})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ podemos definir $h = (\alpha f) : V \mapsto \hat{V}$ por $h(v) = (\alpha f)(v) = \alpha f(v)$. Claramente $h \in L(V;\hat{V})$ con lo que existirá su matriz asociada. Si llamamos $M_1 = \Big(a_{ij}\Big)$ a la matriz asociada a "f", entonces la matriz asociada a "h" es $M = \Big(\alpha \cdot a_{ij}\Big)$, es decir, la multiplicación elemento a elemento por el escalar α.

▷ $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y (por ello) se cumple que $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$:

1) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

2) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$

3) $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha(\beta \cdot A)$

4) Dado $e \in \mathbb{K}$, su neutro, $e \cdot A = A$

▷ **Teorema**: los espacios $(L(V;\hat{V}), +, \cdot)$ y $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ son isomorfos.

▷ **Producto de matrices**: vamos a tratar de definir un producto interior de matrices. En general esto no será posible. Para ver cuándo sí lo es, volvamos a la definición y pensemos en tres espacios vectoriales v, $\hat{V}$, $\hat{\hat{V}}$ y los homomorfismos $f : V \mapsto \hat{V}$, $g : \hat{V} \mapsto \hat{\hat{V}}$. En esta situación tiene sentido hablar de $(g \circ f) : V \mapsto \hat{\hat{V}}$ con $(g \circ f)(v) = g(f(v))$ que es un homomorfismo entre dos espacios vectoriales. Entonces existirá su matriz asociada M. Para continuar, fijemos $dim(V) = m$, $dim(\hat{V}) = n$ y $dim(\hat{\hat{V}}) = p$.
La matriz de "f" será $M_1 = (a_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ y la de "g" será $M_2 = (b_{ij})_{j=1,\ldots,p}^{i=1,\ldots,n}$ y $(g \circ f) = M_1 \times M_2$.
Tomamos $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de V, $\hat{B} = \{\hat{v}_j\}$ base de $\hat{V}$ y $\hat{\hat{B}} = \{\hat{\hat{v}}_j\}$ base de $\hat{\hat{V}}$.
$(g \circ f)(v_i) = (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1}) \cdot \hat{\hat{v}}_1 + \ldots + (a_{i1}b_{1p} + \ldots + a_{in}b_{np})\hat{\hat{v}}_p$
Es decir, la matriz $M = \Big(c_{ij}\Big)_{j=1,\ldots,p}^{i=1,\ldots,m}$ asociada a $(g \circ f)$ tiene por elemento c_{ij} a al suma de los productos de los elementos de la fila "i" de M_1 y de la columna "j" de M_2.

▷ *Nota*: esto nos está imponiendo que para poder multiplicar dos matrices no cuadradas, el número de filas de la segunda y el número de columnas de la primera han de ser iguales.

▷ **Propiedades**: (siempre que tengan sentido las operaciones):

1) Asociativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
2) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces: $(A + B)^t = A^t + B^t$ // $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$
3) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$: $(A \times B)^t = B^t \times A^t$

▷ Es claro que de la definición de producto de matrices no podemos esperar ninguna estructura adicional (como anillo, grupo,...), pero si nos restringimos a las matrices cuadradas podemos encontrar algunas estructuras interesantes.

▷ **Definición**: al conjunto de homomorfismo de V en V los llamaremos endomorfismos de V y lo notaremos por $End(V)$. Es claro que $(End(V), +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

▷ A cualquier endomorfismo le corresponde una (única) matriz de orden $n = dim(V)$, Todas las propiedades de $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ se transcriben literalmente a $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$. Pero aquí si tiene sentido hablar del producto de matrices, pues dos matrices de orden "n" siempre se pueden multiplicar (equivalentemente, siempre podemos componer dos endomorfismos de V).

▷ *Nota*: como $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ en general, el producto de matrices no será siempre conmutativo.

▷ Como hemos podido definir las estructuras de anillo y espacio vectorial en $End(V) \longrightarrow (End(V), +, \cdot, \circ)$ es un álgebra no conmutativa con unidad $\longleftrightarrow (\mathcal{M}_n, +, \cdot, \times)$ (con $\times =$ producto de matrices) es un álgebra no conmutativa con unidad.

▷ **Teorema**: $(End(V), +, \cdot, \circ)$ y $(\mathcal{M}_n, +, \cdot, \times)$ son isomorfos como álgebras.

▷ Hay subálgebras especiales como las formadas por las triangulares superiores, las diagonales,...

4) Determinantes, menores, rango:

▷ Para abordar de una manera muy sencilla la sección de la matriz inversa, necesitaremos una serie de conceptos previos (que ni demostraré sus propiedades ni los explicaré con mucho detalle porque eso se hace ya en los temas 16 y 19).

▷ **<u>Definición</u>**: dada $a \in \mathcal{M}_2$, la aplicación $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ la llamaremos <u>determinante</u> de A. Sea ahora $A \in \mathcal{M}_n$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \cdot (-1)^{j+1} \det(A_{j1})$ donde A_{j1} es la submatriz de A a la que hemos quitado la fila "j" y la columna "1" ($A_{j1} \in \mathcal{M}_{n-1}$).

▷ El determinante es una forma n-lineal alternada y de ahí se obtienen todas sus propiedades.

▷ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>menor de orden "k"</u> al determinante de una submatriz de A formada por la intersección de "k" filas y "k" columnas de A.

▷ **<u>Definición</u>**: sea $A \in \mathcal{M}_n$, llamamos <u>menor complementario de $a_{ij} \in A$</u> al menor de orden "$(n-1)$" formado donde hemos suprimido la fila "i" y la columna "j". Lo notamos por $[a_{ij}]$.

▷ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>adjunto del elemento a_{ij}</u> al número: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot [a_{ij}]$. A la matriz formada por los adjuntos la llamamos <u>matriz adjunta</u>. $\hat{A} = \Big(A\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$

▷ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>rango</u> de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ al orden del mayor menor no nulo de la matriz A.

5) Matriz inversa:

▷ Como $(\mathcal{M}_n, +, \times, \cdot)$ es un álgebra no conmutativa con unidad $\longrightarrow (\mathcal{M}_n, +, \times)$ es un anillo unitario no conmutativo. Claramente, no todos sus elementos tienen simétrico para el producto. Para ver cuáles sí, tendremos que restringirnos a una clase especial de endomorfismos y vía el isomorfismo $End(V) \longleftrightarrow \mathcal{M}_n$ obtendremos la clase buscada.

▷ **<u>Definición</u>**: a los homomorfismos biyectivos de V en sí mismo los llamaremos <u>automorfismos</u> de V, que representaremos por $Aut(V)$ o $GL(V)$ (grupo lineal de V).

▷ Es claro que $(GL(V), +, \cdot, \circ)$ es un álgebra, pero, además, para cualquier elemento suyo existe su inverso que también estará en $(GL(V), +, \cdot, \circ)$ (si "f" es homomorfismo biyectivo, "f^{-1}" también lo es y se cumple que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V$). Ahora, nos falta identificar $GL(V)$ con una cierta clase de matrices.

▷ **<u>Teorema</u>**: cada automorfismo de V tiene asociado una matriz cuadrada de orden "n", A, que tiene simétrico para el producto. A dicha matriz, asociada a "f^{-1} la llamaremos A^{-1}.

▷ **<u>Teorema</u>**: sea $A \in \mathcal{M}_n$. Entonces A es invertible $\longleftrightarrow |A| \neq 0$.

Proof. $\Longrightarrow$: Sea $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ tq $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathrm{Id}_n \longrightarrow |A \times A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |\mathrm{Id}_n| = 1 \longrightarrow |A| \neq 0$
$\Longleftarrow$: Sea $^a \in \mathcal{M}_n$ asociada a $f \in End(V)$ respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
Por hipótesis $|A| = |f(v_1), \ldots, f(v_n)| \neq 0 \longrightarrow \{f(v_j), j = 1, \ldots, n\}$ forman una base de $V \longrightarrow$ "f" es biyectivo $\longrightarrow f \in Aut(V) \longrightarrow \exists f^{-1} \longrightarrow \exists A^{-1}$

□

▷ **<u>Proposición</u>**: Si A tiene inversa, ésta es única.

▷ **<u>Proposición</u>**: dadas A, B invertibles, entonces $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Proof. Debido a la unicidad de la inversa, hagamos la multiplicación con el candidato y comprobemos que, efectivamente, es la inversa del producto $A \times B$:
$A \times B \times (A \times B)^{-1} = A \times B \times B^{-1} \times A^{-1} = A \times \mathrm{Id}_n \times A^{-1} = A \times A^{-1} = \mathrm{Id}_n$

□

▷ **<u>Proposición</u>**: sea $A \in \mathcal{M}_n$, entonces, si A tiene inversa, se cumple que $|A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

▷ **<u>Definición</u>**: una matriz se dice <u>regular</u> cuando su determinante es no nulo. Si $|A| = 0$, decimos que A es <u>singular</u>. Si $A^{-1} = A^t$ decimos que A es <u>ortogonal</u> y se cumple que $|A| = \pm 1$

▷ **Cálculo de la matriz inversa**: para calcular la inversa de una matriz existen varios métodos (exactos, iterativos,...) y aquí expondré el que usa más ingredientes teóricos del tema.

▷ Dada $A \in \mathcal{M}_n$ tenemos:

1) Los menores complementarios: $[a_{ij}]$
2) Los adjuntos: $A_{ij} = (-1)^{i+j}[a_{ij}]$
3) La matriz de los adjuntos: $\hat{A} = \Big(A_{ij}\Big)_{i,j=1,\dots,n}$

▷ **Proposición**: si A es una matriz regular, su inversa, A^{-1}, es igual a la matriz adjunta de A traspuesta, multiplicada por el inverso del determinante. Es decir:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A}^t$$

Proof. Como la inversa es única, multiplicamos directamente y comprobamos que nos sale la identidad:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & |A| \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} = \mathrm{Id}_n \quad \square$$

6) Aplicaciones:

▷ En la exposición y resolución de ciertos conceptos y problemas matemáticos las matrices han contribuido esencialmente, e incluso han permitido avanzar en el conocimiento, construcción y estudio de nuevos campos. El importante papel que juegan en Álgebra, Geometría, Análisis, Probabilidad, Estadística,... no es posible abarcarlo en este tema, pero podemos enumerar algunas de las áreas donde intervienen, de manera que simplifican el problema y aplican el álgebra de matrices para su resolución.

▷ **1) Álgebra**: estudio de los homomorfismos entre espacios vectoriales a partir e las matrices de los mismos.

▷ **2) Álgebra**: Cambio de base en un espacio vectorial. Cambios de coordenadas entre variedades diferenciables.

▷ **3) Álgebra**: Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

▷ **4) Geometría**: estudios de planteamientos dados en la geometría afín y métrica tales como posiciones relativas de rectas y planos en el espacio, estudio de cuádricas y cónicas en Astronomía (para el estudio del movimiento de los planetas), son muy útiles en Cristalografía también.

▷ **5) Ingeniería o Física**: en problemas donde podemos necesitar determinar máximos y mínimos de funciones de varias variables (matrices Jacobiana y Hessiana). Dentro de las Ecuaciones Diferenciales tenemos las matrices canónicas de Jordan.

▷ **6) Estadística**: el empleo de matrices va desde la matriz de datos, la matriz de correlaciones, de desviaciones, de varianza-covarianza,... hasta su uso en el estudio de distribuciones n-dimensionales, métodos de estimación de modelos lineales, cadenas de Markov y sus matrices de transición,...

▷ **7) Otras áreas del conocimiento**: en Psicología tenemos la matriz de varianza-covarianza que sirve para estudiar conductas de individuos. En Biología multitud de modelos se representan matricialmente y tienen una fuerte relación con las cadenas de Markov para observar su evolución (como el modelo Wright-Fisher). En Criptografía se usan matrices para generar códigos seguros. Las matrices asociadas a grafos son muy importantes en telecomunicaciones, circuitos eléctricos,... En Economía las matrices son básicas en todo lo relacionado con la programación lineal y el análisis económico "*input-output*".