# La Distribución Normal.

David Matellano     M. Carmen Hurtado

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

16 de mayo de 2024

# índice de contenidos I



Ver los apéndices

# Distribuciones estadísticas de variable continua

## Variable estadística continua

- La tabla recoge la estatura de un grupo de personas en cm:

# Distribuciones estadísticas de variable continua

## Variable estadística continua

- La tabla recoge la estatura de un grupo de personas en cm:
-

| Intervalos | $f_i$ | $x_i$ | $x_i \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|
| $[140, 150)$ | 8 | 145 | 1160 |
| $[150, 160)$ | 19 | 155 | 2945 |
| $[160, 170)$ | 28 | 165 | 4620 |
| $[170, 180)$ | 32 | 175 | 5600 |
| $[180, 190]$ | 13 | 185 | 2405 |
| Sumas | 100 | | 16730 |

## Cálculo de los parámetros

- $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{16730}{100} = 167,3\ cm$

# Distribuciones estadísticas de variable continua

## Variable estadística continua

- La tabla recoge la estatura de un grupo de personas en cm:
-

| Intervalos | $f_i$ | $x_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $[140,150)$ | 8 | 145 | 1160 | 168200 |
| $[150,160)$ | 19 | 155 | 2945 | 456475 |
| $[160,170)$ | 28 | 165 | 4620 | 762300 |
| $[170,180)$ | 32 | 175 | 5600 | 980000 |
| $[180,190]$ | 13 | 185 | 2405 | 444925 |
| Sumas | 100 | | 16730 | 2811900 |

## Cálculo de los parámetros

- $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{16730}{100} = 167,3\ cm$
- $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{2811900}{100} - 167,3^2 = 129,71$

# Distribuciones estadísticas de variable continua

## Variable estadística continua

- La tabla recoge la estatura de un grupo de personas en cm:
-

| Intervalos | $f_i$ | $x_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $[140, 150)$ | 8 | 145 | 1160 | 168200 |
| $[150, 160)$ | 19 | 155 | 2945 | 456475 |
| $[160, 170)$ | 28 | 165 | 4620 | 762300 |
| $[170, 180)$ | 32 | 175 | 5600 | 980000 |
| $[180, 190]$ | 13 | 185 | 2405 | 444925 |
| Sumas | 100 | | 16730 | 2811900 |

## Cálculo de los parámetros

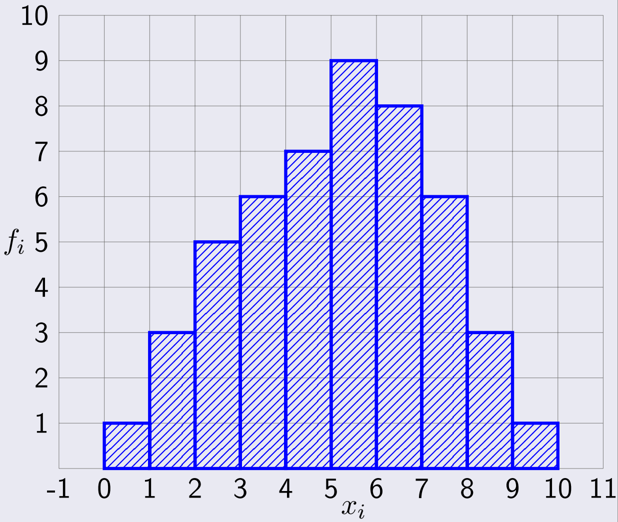
- $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{16730}{100} = 167,3\ cm$
- $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{2811900}{100} - 167,3^2 = 129,71$
- $\sigma = \sqrt{129,71} = 11,39$

### Ejemplo

- Sea la siguiente tabla:

| *Intervalo* | $f_i$ |
|---|---|
| $[0,1)$ | 1 |
| $[1,2)$ | 3 |
| $[2,3)$ | 5 |
| $[3,4)$ | 6 |
| $[4,5)$ | 7 |
| $[5,6)$ | 9 |
| $[6,7)$ | 8 |
| $[7,8)$ | 6 |
| $[8,9)$ | 3 |
| $[9,10)$ | 1 |

### Histograma



# Distribuciones de probabilidad de variable continua

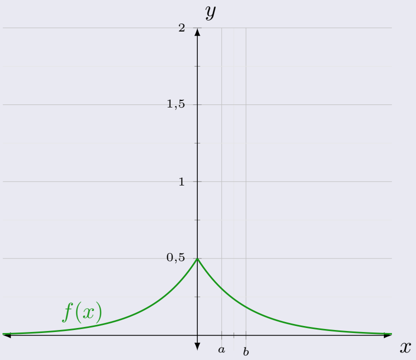
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:

## Función de densidad



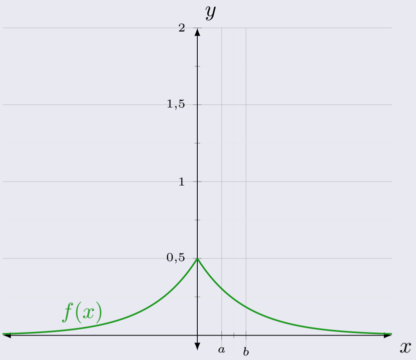
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:
  - $f(x) \geq 0$

## Función de densidad



# Distribuciones de probabilidad de variable continua

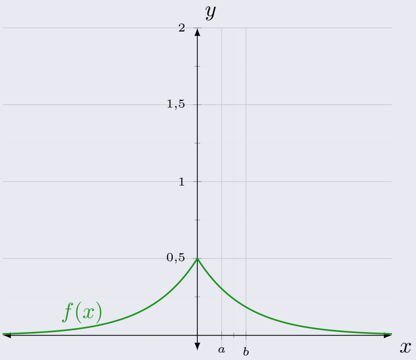
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:
  - $f(x) \geq 0$
  - El área bajo la curva tiene que ser igual a 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

## Función de densidad



# Distribuciones de probabilidad de variable continua

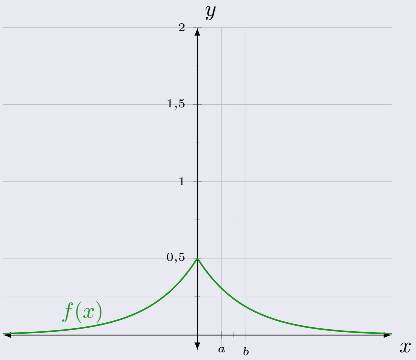
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:
  - $f(x) \geq 0$
  - El área bajo la curva tiene que ser igual a 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$
- Para calcular probabilidades hay que obtener el área bajo la curva.

## Función de densidad



# Distribuciones de probabilidad de variable continua

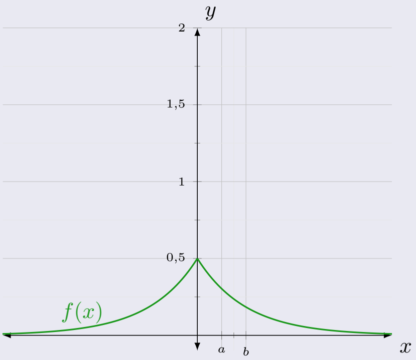
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:
  - $f(x) \geq 0$
  - El área bajo la curva tiene que ser igual a 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$
- Para calcular probabilidades hay que obtener el área bajo la curva.
  - $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

## Función de densidad



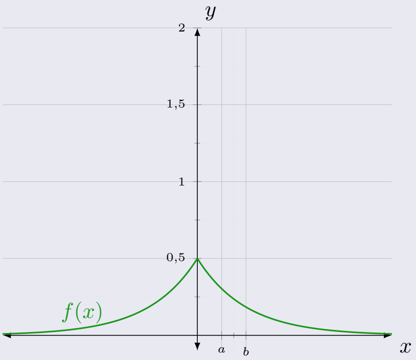
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:
  - $f(x) \geq 0$
  - El área bajo la curva tiene que ser igual a 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$
- Para calcular probabilidades hay que obtener el área bajo la curva.
  - $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$
  - $P(x = a) = P(x = b) = 0$

## Función de densidad



# Distribuciones de probabilidad de variable continua

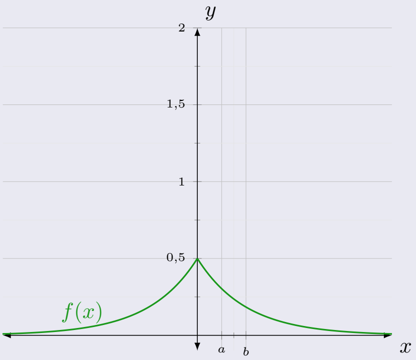
## Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Una distribución de probabilidad de variable continua es la idealización de una distribución estadística de variable continua.

## Cálculo de probabilidades

- Viene definida por una **función de densidad** que tiene que cumplir dos requisitos:
  - $f(x) \geq 0$
  - El área bajo la curva tiene que ser igual a 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$
- Para calcular probabilidades hay que obtener el área bajo la curva.
  - $P(a \leq x \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$
  - $P(x = a) = P(x = b) = 0$
  - $P(a < x < b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

## Función de densidad

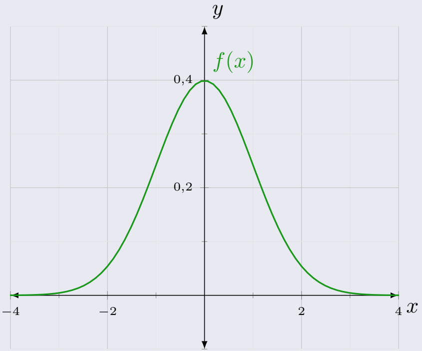


# La distribución normal

## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.

## Campana de Gauss



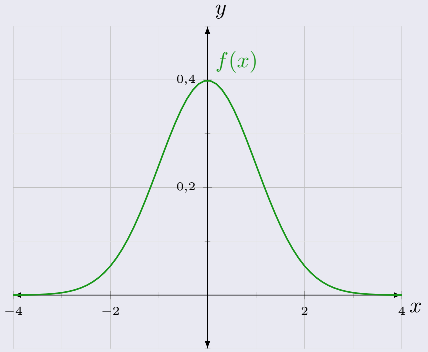
# La distribución normal

## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

## Campana de Gauss



# La distribución normal

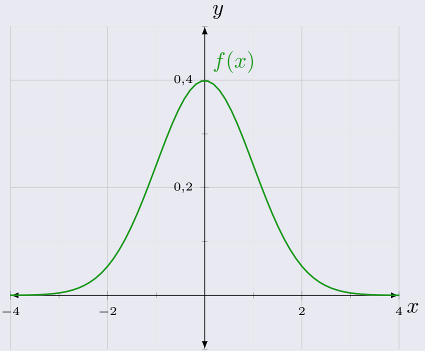
## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La dibujada tiene $\mu = 0;\ \sigma = 1$.

## Campana de Gauss



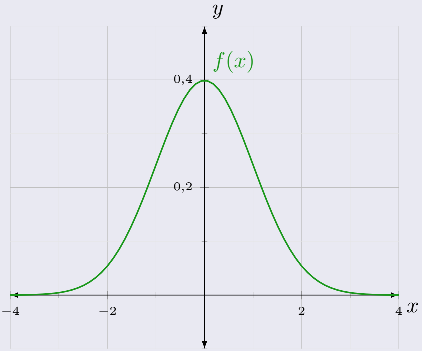
## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La dibujada tiene $\mu = 0; \ \sigma = 1$.
- Tiene su máximo en $x = \mu$.

## Campana de Gauss



# La distribución normal

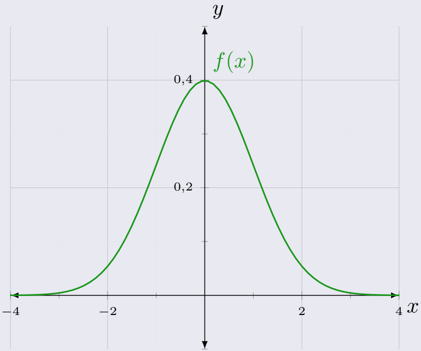
## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La dibujada tiene $\mu = 0;\ \sigma = 1.$
- Tiene su máximo en $x = \mu$.
- Variables que se distribuyen "normalmente":

## Campana de Gauss



# La distribución normal

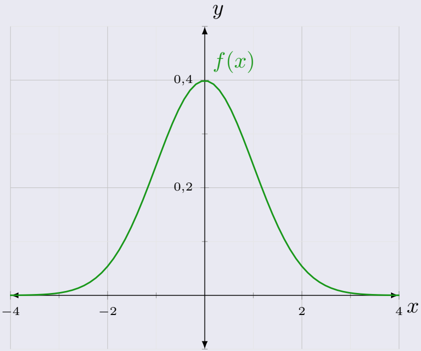
## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La dibujada tiene $\mu = 0; \ \sigma = 1$.
- Tiene su máximo en $x = \mu$.
- Variables que se distribuyen "normalmente":
    - Caracteres morfológicos: peso,...

## Campana de Gauss



# La distribución normal

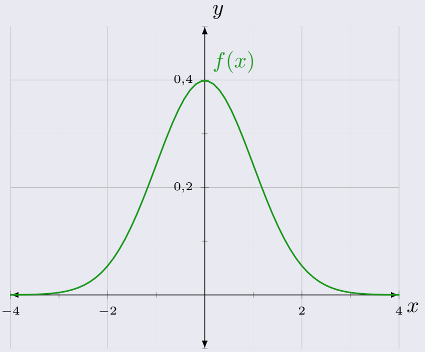
## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La dibujada tiene $\mu = 0; \;\sigma = 1$.
- Tiene su máximo en $x = \mu$.
- Variables que se distribuyen "normalmente":
  - Caracteres morfológicos: peso,...
  - Caracteres fisiológicos: tiempo en hacer efecto un medicamento,...

## Campana de Gauss



# La distribución normal

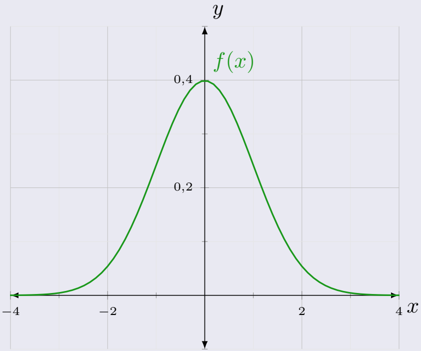
## La distribución normal

- Es la más importante de las distribuciones de probabilidad de variable continua.
- Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- La dibujada tiene $\mu = 0; \ \sigma = 1.$
- Tiene su máximo en $x = \mu$.
- Variables que se distribuyen "normalmente":
    - Caracteres morfológicos: peso,...
    - Caracteres fisiológicos: tiempo en hacer efecto un medicamento,...
    - Caracteres físicos: resistencia de un neumático,...

## Campana de Gauss



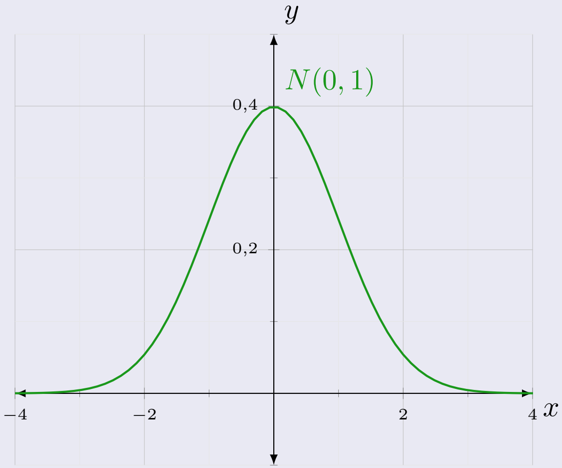
# La curva normal

La forma de la curva no depende de $\mu$. Si cambia $\sigma$ tienen formas similares, iguales salvo un cambio de escala.

# La curva normal

La forma de la curva no depende de $\mu$. Si cambia $\sigma$ tienen formas similares, iguales salvo un cambio de escala.

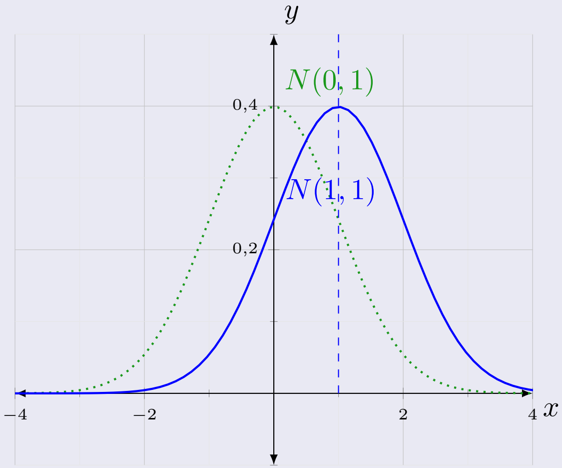
- $N(0,1)$



# La curva normal

La forma de la curva no depende de $\mu$. Si cambia $\sigma$ tienen formas similares, iguales salvo un cambio de escala.

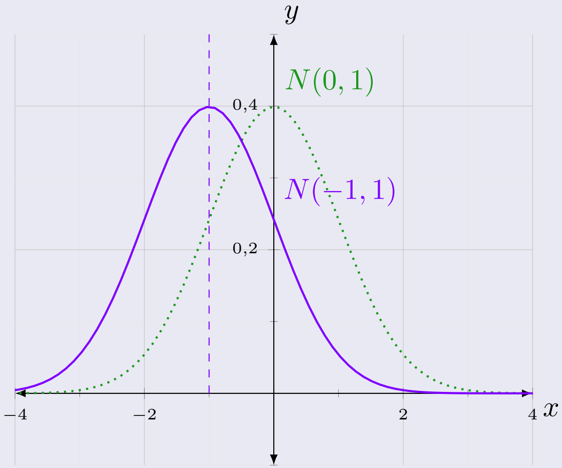
- $N(0,1)$
- $N(1,1)$



# La curva normal

La forma de la curva no depende de $\mu$. Si cambia $\sigma$ tienen formas similares, iguales salvo un cambio de escala.

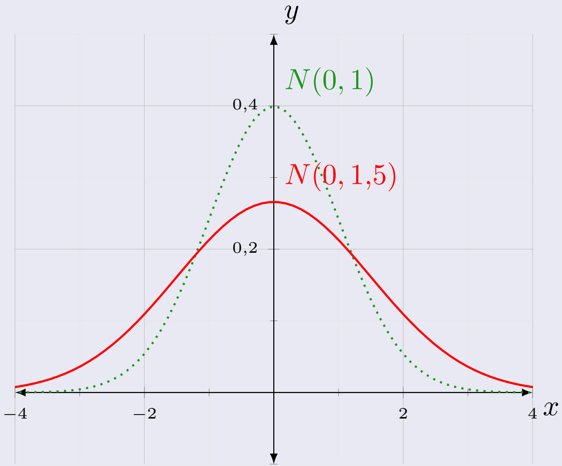
- $N(0,1)$
- $N(1,1)$
- $N(-1,1)$



# La curva normal

La forma de la curva no depende de $\mu$. Si cambia $\sigma$ tienen formas similares, iguales salvo un cambio de escala.

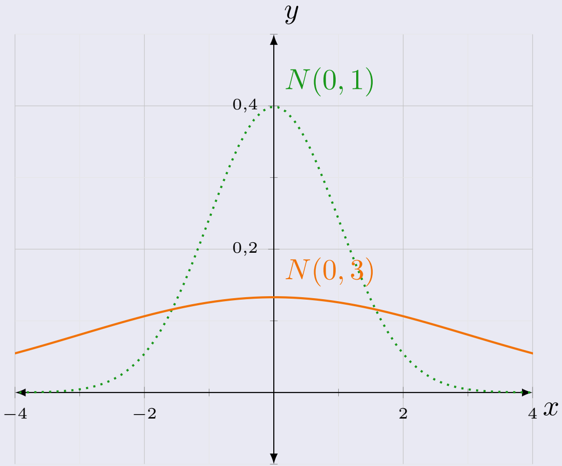
- $N(0,1)$
- $N(1,1)$
- $N(-1,1)$
- $N(0,1'5)$



# La curva normal

La forma de la curva no depende de $\mu$. Si cambia $\sigma$ tienen formas similares, iguales salvo un cambio de escala.

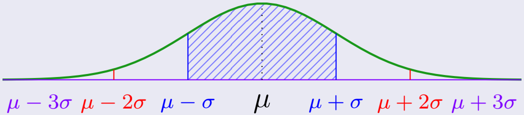
- $N(0,1)$
- $N(1,1)$
- $N(-1,1)$
- $N(0,1'5)$
- $N(0,3)$



# Reparto del área bajo la curva normal

## Reparto del área bajo la curva normal

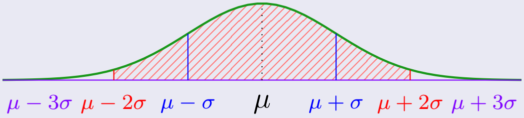
$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx \approx 0{,}6826 \rightarrow 68,26\,\%$$



# Reparto del área bajo la curva normal

## Reparto del área bajo la curva normal

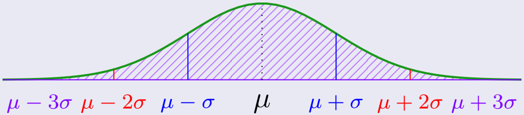
$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)\,dx \approx 0,9545 \rightarrow 95,45\,\%$$



# Reparto del área bajo la curva normal

## Reparto del área bajo la curva normal

$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)\,dx \approx 0,9973 \to 99,73\,\%$$



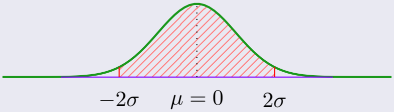
# Reparto del área bajo la curva normal

**¡Importante!**

☞ El reparto del área bajo la curva sólo depende de $\mu$ y $\sigma$.

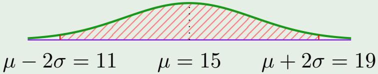
### $X \sim N(0,1);\ \acute{A}rea(-2,2)$

$$X \sim N(0,1) \rightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx 0,9545$$




### $X \sim N(15,2);\ \acute{A}rea(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$

$$X \sim N(15,2) \rightarrow \int_{11}^{19} f(x)\,dx \approx 0,9545$$



# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

✍ Si una $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

Si una $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

## La corrección por continuidad de Yates

Para transformar una variable discreta en continua, hemos de hacer lo siguiente:

# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

Si una $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

## La corrección por continuidad de Yates

Para transformar una variable discreta en continua, hemos de hacer lo siguiente:

- $P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

Si una $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

## La corrección por continuidad de Yates

Para transformar una variable discreta en continua, hemos de hacer lo siguiente:

- $P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
- $P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

Si una $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

## La corrección por continuidad de Yates

Para transformar una variable discreta en continua, hemos de hacer lo siguiente:

- $P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
- $P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

Si una $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

## La corrección por continuidad de Yates

Para transformar una variable discreta en continua, hemos de hacer lo siguiente:

- $P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
- $P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
- $P(X > a) = P(X \geq a + 0,5) = 1 - P(X < a + 0,5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Aproximar una binomial por una normal

Si una $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, de manera que si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.

## La corrección por continuidad de Yates

Para transformar una variable discreta en continua, hemos de hacer lo siguiente:

- $P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
- $P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
- $P(X > a) = P(X \geq a + 0,5) = 1 - P(X < a + 0,5)$
- $P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5) = 1 - P(X \leq a - 0,5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Ejemplo

### Ejemplo: Aproximar por una normal.

- Sea $X = B(100; 0,5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Ejemplo

### Ejemplo: Aproximar por una normal.

- Sea $X = B(100; 0,5)$

☞ $\mu = 100 \cdot 0,5 = 50;\ \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5 \Rightarrow X' \approx N(50, 5)$

# Aproximar una binomial por una normal.

## Ejemplo

### Ejemplo: Aproximar por una normal.

- Sea $X = B(100; 0,5)$

☞ $\mu = 100 \cdot 0,5 = 50;\ \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5 \Rightarrow X' \approx N(50,5)$

✍ $P(X \leq 60) = P(X' \leq 60,5) = P\left(Z \leq \dfrac{60,5 - 50}{5}\right) = P(Z \leq 2,1) = 0,9821$

# Apéndices



Volver al índice principal

# La distribución normal con WxMaxima

## Carga del paquete *distrib*

**El paquete *distrib***

☞ Para operar, hemos de cargar el paquete *distrib*

(% i1) load(distrib)$

# Función de densidad de probabilidad

## Función de densidad de probabilidad

Recordamos: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

# Función de densidad de probabilidad

## Función de densidad de probabilidad

Recordamos: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

☞ Dicha función, una vez cargado el paquete distrib está definida en **Maxima**:

(% i2) f(x)=pdf_normal(x,$\mu$,$\sigma$);

$$(\%\ o2)\quad f(x) = \frac{\%e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sigma}$$

(% i5) $\mu$:15$
$\sigma$:2$
f(x)=pdf_normal(x,$\mu$,$\sigma$);

$$(\%\ o5)\quad f(x) = \frac{\%e^{-\left(\frac{(x-15)^2}{8}\right)}}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}$$

# La función de distribución

## La función de distribución

- ☞ La función cdf_normal$(x, \mu, \sigma)$ nos da $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$

# La función de distribución

## La función de distribución

- La función cdf_normal$(x, \mu, \sigma)$ nos da $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$
- Por ejemplo, dada $X \sim N(10, 2)$ creamos $F(x)$ para dicha variable.

**( % i6)** F(x):=cdf_normal(x,10,2)$

# La función de distribución

## La función de distribución

- La función cdf_normal$(x, \mu, \sigma)$ nos da $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$
- Por ejemplo, dada $X \sim N(10, 2)$ creamos $F(x)$ para dicha variable.
- Calculamos $F(11) = P(x \leq 11) = \int_{-\infty}^{11} f(x)\, dx$

```
(%i6) F(x):=cdf_normal(x,10,2)$
(%i7) F(11),numer;
(%o7) 0,6914624612740131
```

# La función de distribución

## La función de distribución

- La función cdf_normal$(x, \mu, \sigma)$ nos da $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$
- Por ejemplo, dada $X \sim N(10, 2)$ creamos $F(x)$ para dicha variable.
- Calculamos $F(11) = P(x \leq 11) = \int_{-\infty}^{11} f(x)\,dx$
- Lo comprobamos haciendo la integral de $f(x)$

```
(% i6)  F(x):=cdf_normal(x,10,2)$
(% i7)  F(11),numer;
(% o7)  0,6914624612740131
(% i8)  integrate(pdf_normal(x,10,2),x,-inf,11),numer;
(% o8)  0,6914624612739878
```