Aplicaciones de la derivada: crecimiento y curvatura

M. Carmen Hurtado David Matellano con la colaboración de Rosa Galera

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

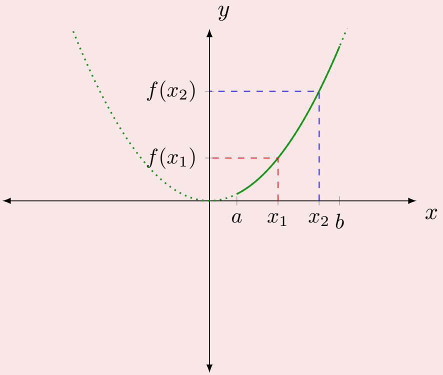
27 de abril de 2022

índice de contenidos I

Definición de función creciente en [a,b]

✍ Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. $f(x)$ es estrictamente creciente en $[a,b] \Leftrightarrow \forall x_2 > x_1 \; f(x_2) > f(x_1)$

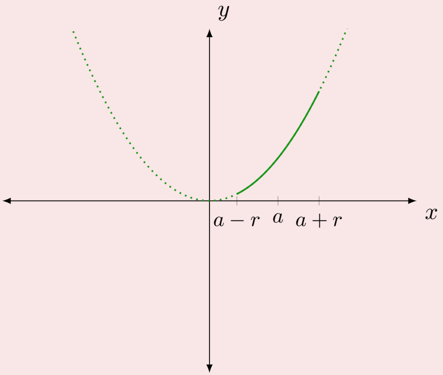
Figuras



Definición de función creciente en un punto $x = a$

✍ $f(x)$ es estrictamente creciente en $x = a$ si y sólo si $\exists$ un entorno de a, $(a - r, a + r)$ donde $f(x)$ es estrictamente creciente.

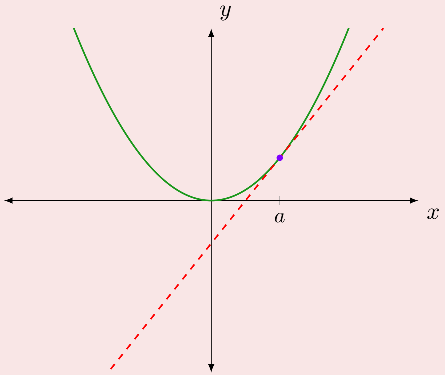
Figuras



Relación de $f'(x)$ con función creciente

✍ Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $x = a$

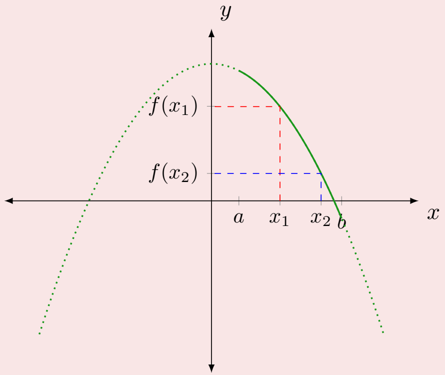
Figuras



Definición de función decreciente en [a,b]

✍ Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$.
$f(x)$ es estrictamente decreciente en $[a,b] \Leftrightarrow \ \forall x_2 > x_1 \ f(x_2) < f(x_1)$

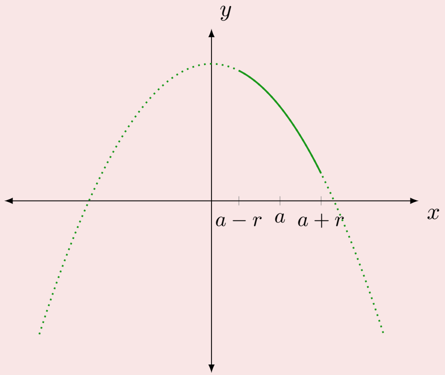
Figuras



Definición de función decreciente en un punto $x = a$

✍ $f(x)$ es estrictamente decreciente en $x = a$ si y sólo si $\exists$ un entorno de $a, (a - r, a + r)$ donde $f(x)$ es estrictamente decreciente.

Figuras



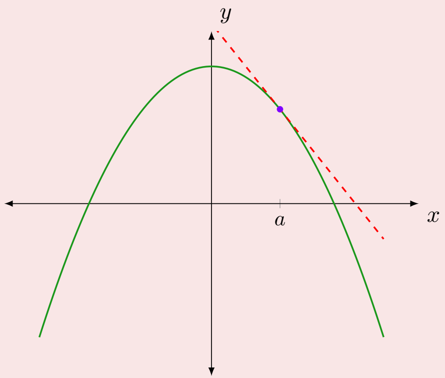
Funciones decrecientes

Relación con la derivada

Relación de $f'(x)$ con función decreciente

✍ Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente en $x = a$

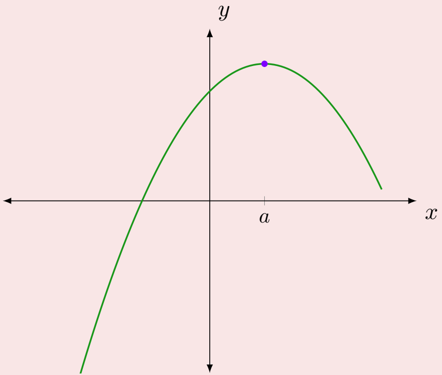
Figuras



Máximo relativo

✍ Diremos que una función f tiene un máximo relativo en $x = a$ si existe un entorno de $a, (a - r, a + r)$ donde $f(x) \geq f(a)\, \forall x \in (a - r, a + r)$.

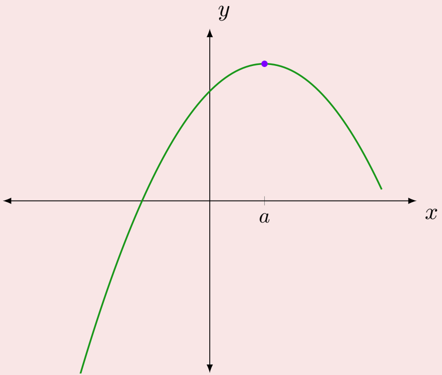
Figuras



Máximo relativo

- ✍ Diremos que una función f tiene un máximo relativo en $x = a$ si existe un entorno de $a, (a - r, a + r)$ donde $f(x) \geq f(a) \, \forall x \in (a - r, a + r)$.
- ☞ En $x = a$ la función pasa de ser creciente a decreciente.

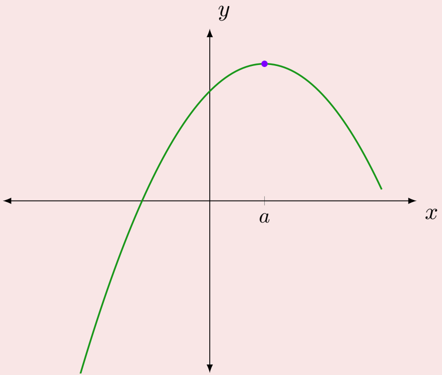
Figuras



Máximo relativo: relación con la derivada.

- Si f es derivable y tiene un máximo relativo en $x = a$:

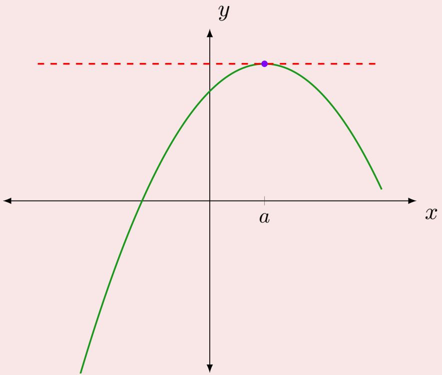
Figuras



Máximo relativo: relación con la derivada.

- Si f es derivable y tiene un máximo relativo en $x = a$:
  - La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.

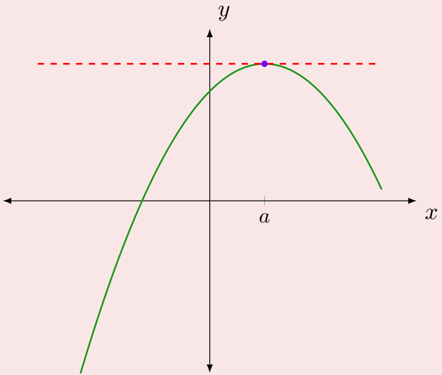
Figuras



Máximo relativo: relación con la derivada.

- Si f es derivable y tiene un máximo relativo en $x = a$:
  - La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.
  - $f'(a) = 0$

Figuras

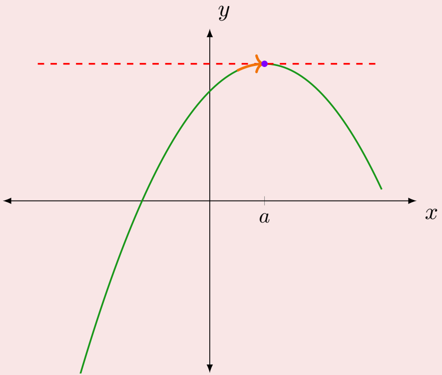


Máximo relativo: relación con la derivada.

☞ Si f es derivable y tiene un máximo relativo en $x = a$:

- La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.
- $f'(a) = 0$
- $f'(a^-) > 0$

Figuras

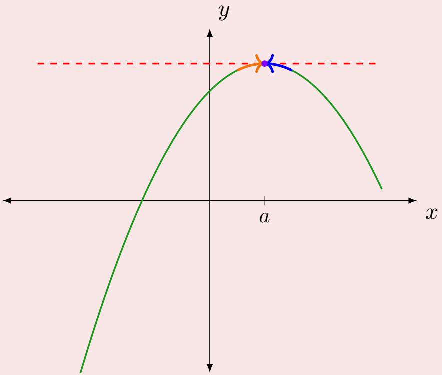


Máximo relativo: relación con la derivada.

☞ Si f es derivable y tiene un máximo relativo en $x = a$:

- La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.
- $f'(a) = 0$
- $f'(a^-) > 0$
- $f'(a^+) < 0$

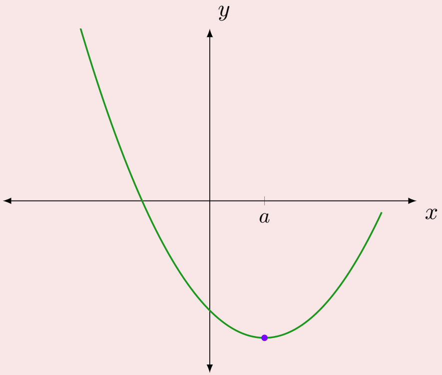
Figuras



Mínimo relativo

✍ Diremos que una función f tiene un mínimo relativo en $x = a$ si existe un entorno de $a, (a-r, a+r)$ donde $f(x) \leq f(a)\, \forall x \in (a-r, a+r)$.

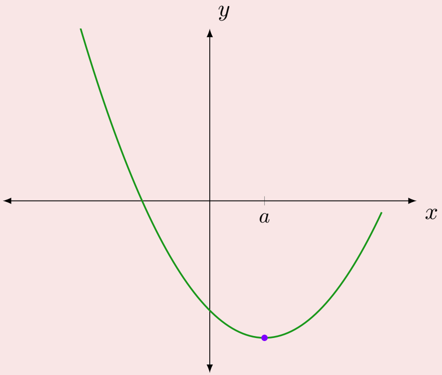
Figuras



Mínimo relativo

- ✍ Diremos que una función f tiene un mínimo relativo en $x = a$ si existe un entorno de $a, (a - r, a + r)$ donde $f(x) \leq f(a) \, \forall x \in (a - r, a + r)$.
- ☞ En $x = a$ la función pasa de ser decreciente a creciente.

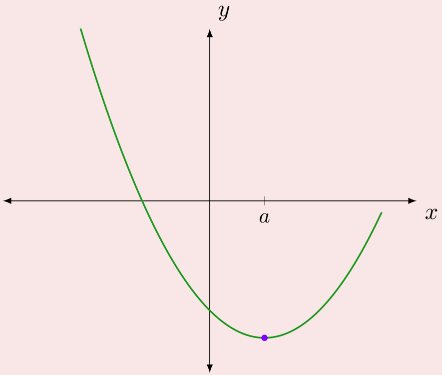
Figuras



Mínimo relativo: relación con la derivada.

- ☞ Si f es derivable y tiene un mínimo relativo en $x = a$:

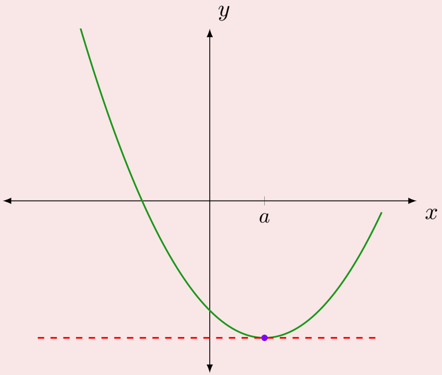
Figuras



Mínimo relativo: relación con la derivada.

- Si f es derivable y tiene un mínimo relativo en $x = a$:
  - La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.

Figuras

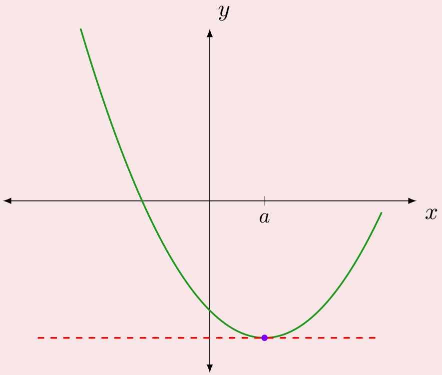


Mínimo relativo: relación con la derivada.

☞ Si f es derivable y tiene un mínimo relativo en $x = a$:

- La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.
- $f'(a) = 0$

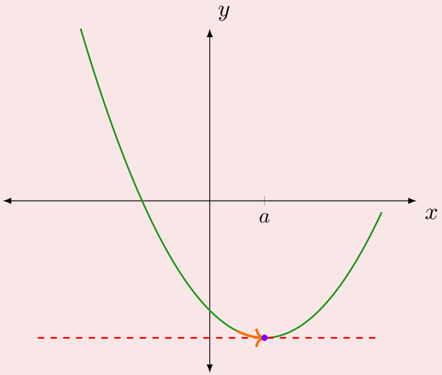
Figuras



Mínimo relativo: relación con la derivada.

- Si f es derivable y tiene un mínimo relativo en $x = a$:
  - La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.
  - $f'(a) = 0$
  - $f'(a^-) < 0$

Figuras

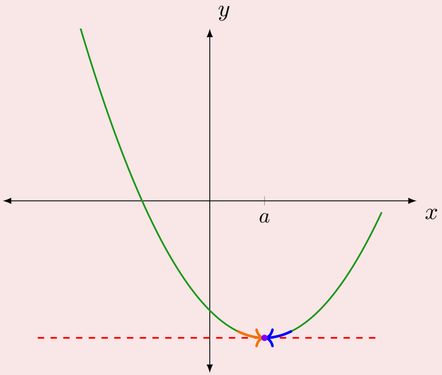


Mínimo relativo: relación con la derivada.

☞ Si f es derivable y tiene un mínimo relativo en $x = a$:

- La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es horizontal.
- $f'(a) = 0$
- $f'(a^-) < 0$
- $f'(a^+) > 0$

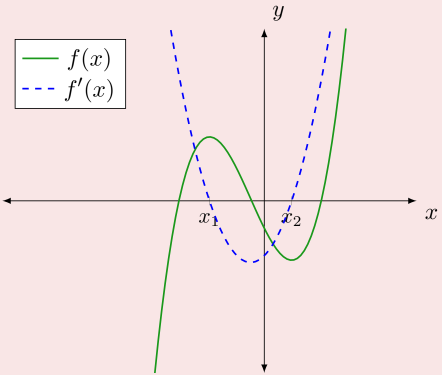
Figuras



Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Para estudiar el crecimiento de $f(x)$ veremos el signo de $f'(x)$ y sus posibles discontinuidades.

Figuras

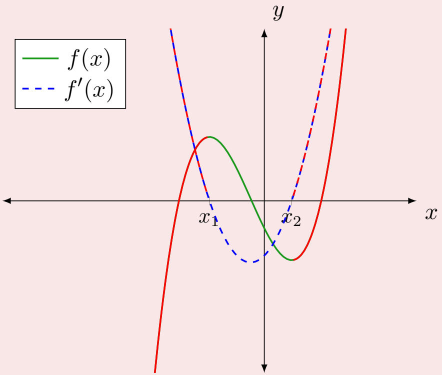


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Para estudiar el crecimiento de $f(x)$ veremos el signo de $f'(x)$ y sus posibles discontinuidades.

- Si $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente.

Figuras

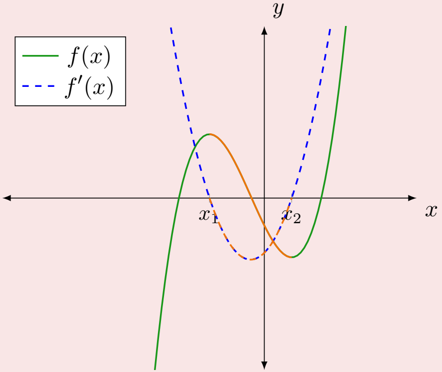


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Para estudiar el crecimiento de $f(x)$ veremos el signo de $f'(x)$ y sus posibles discontinuidades.

- Si $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente.
- Si $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente.

Figuras

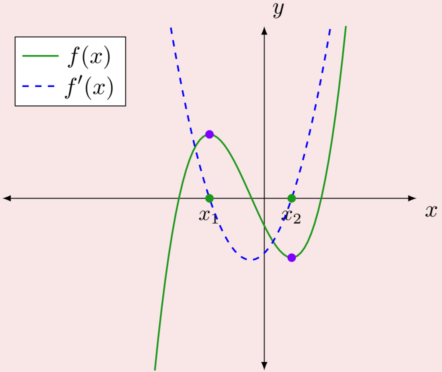


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Para estudiar el crecimiento de $f(x)$ veremos el signo de $f'(x)$ y sus posibles discontinuidades.

- Si $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente.
- Si $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente.
- Donde $f'(x) = 0$ hay posibles máximos y mínimos relativos

Figuras

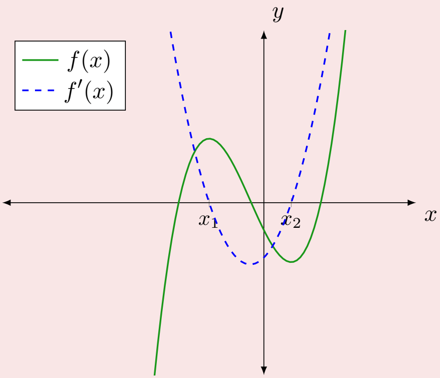


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Podemos realizar la siguiente tabla

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, ∞)
$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$\nearrow$	M.R.	$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras

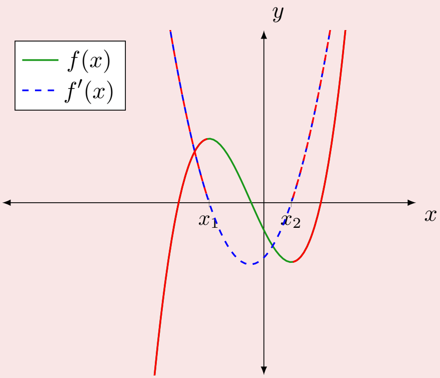


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Podemos realizar la siguiente tabla

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, ∞)
$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$\nearrow$	M.R.	$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras

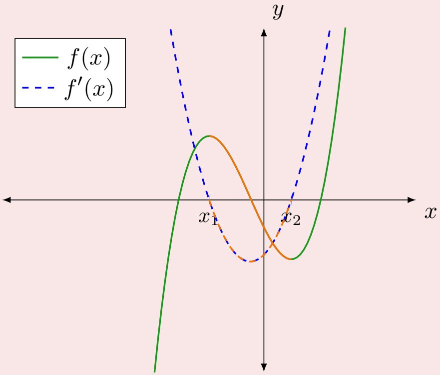


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Podemos realizar la siguiente tabla

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, ∞)
$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$\nearrow$	M.R.	$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras

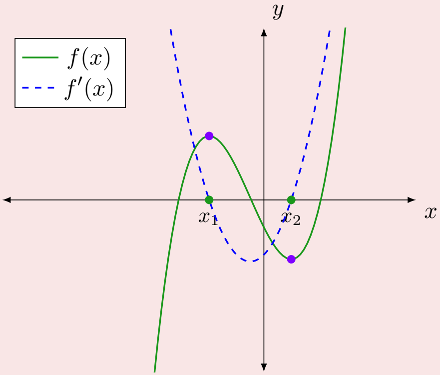


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Podemos realizar la siguiente tabla

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, ∞)
$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$
$\nearrow$	M.R.	$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras

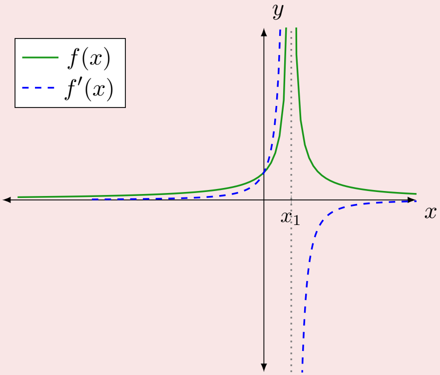


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Realizamos su tabla de crecimiento:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) > 0$	$\nexists$	$f'(x) < 0$
$\nearrow$	A.V	$\searrow$

Figuras

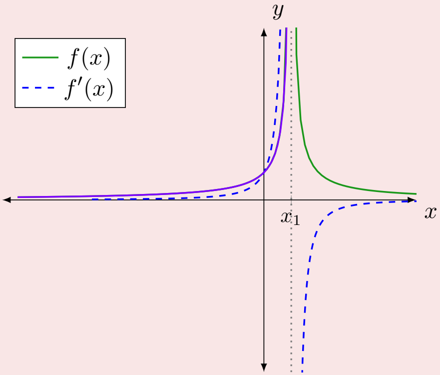


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Realizamos su tabla de crecimiento:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) > 0$	$\nexists$	$f'(x) < 0$
$\nearrow$	A.V	$\searrow$

Figuras

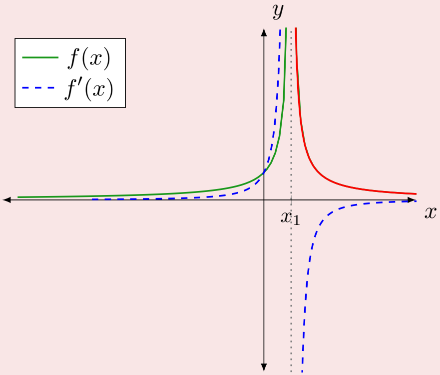


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Realizamos su tabla de crecimiento:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) > 0$	$\nexists$	$f'(x) < 0$
$\nearrow$	A.V	$\searrow$

Figuras



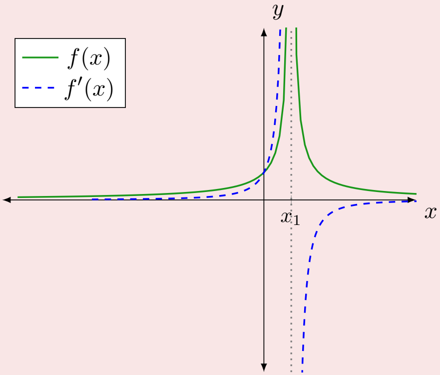
Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Realizamos su tabla de crecimiento:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) > 0$	$\nexists$	$f'(x) < 0$
$\nearrow$	A.V	$\searrow$

Puede cambiar el crecimiento sin anularse la derivada.

Figuras

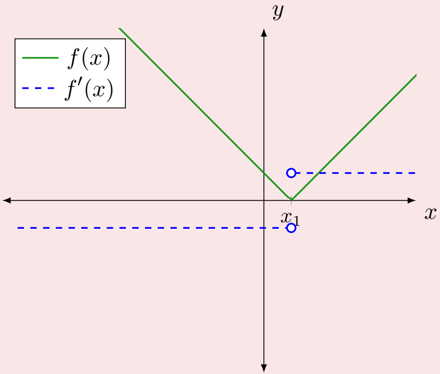


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Tabla del 3.er ejemplo:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) < 0$	$\nexists$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras

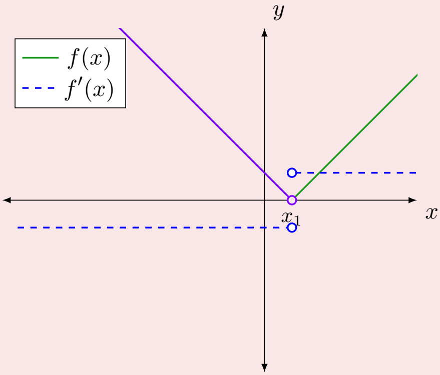


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Tabla del 3.^{er} ejemplo:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) < 0$	$\nexists$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras

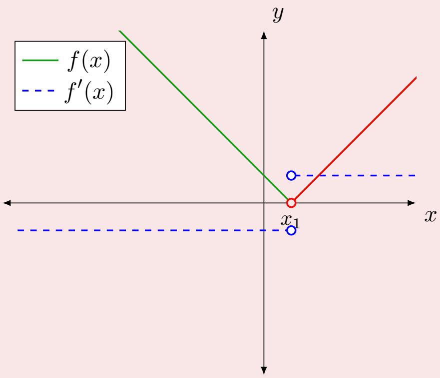


Intervalos de crecimiento de $f(x)$

Tabla del 3.[er] ejemplo:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) < 0$	$\nexists$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Figuras



Intervalos de crecimiento de $f(x)$

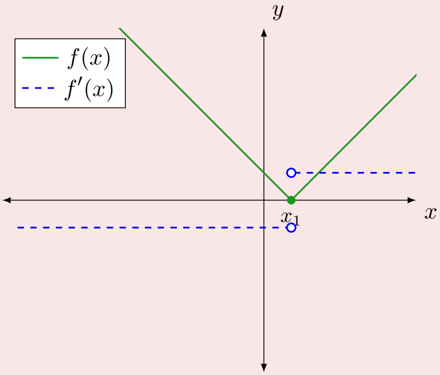
Tabla del 3.$^{\text{er}}$ ejemplo:

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, ∞)
$f'(x) < 0$	$\nexists$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	m.r	$\nearrow$

Puede cambiar el crecimiento sin anularse la derivada.

☞ Puede haber un extremo relativo sin que exista la derivada.

Figuras

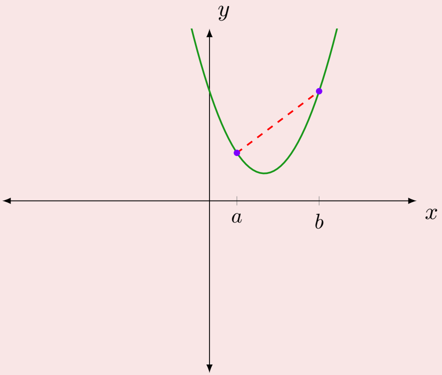


Función cóncava

✍ Una función $f(x)$ es cóncava[a] si cualquier cuerda entre dos puntos de su gráfica está por encima de la función.

[a]Visto desde arriba

Figuras

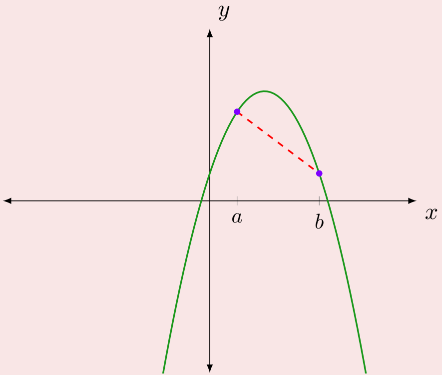


Función convexa

✍ Una función $f(x)$ es convexa[a] si cualquier cuerda entre dos puntos de su gráfica está por debajo de la función.

[a] Visto desde arriba

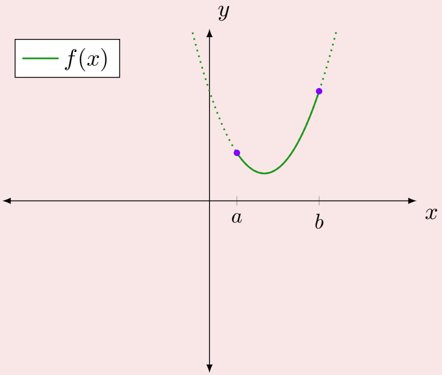
Figuras



Curvatura de una función

- Dada una función $f(x)$ cóncava y dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$:

Figuras

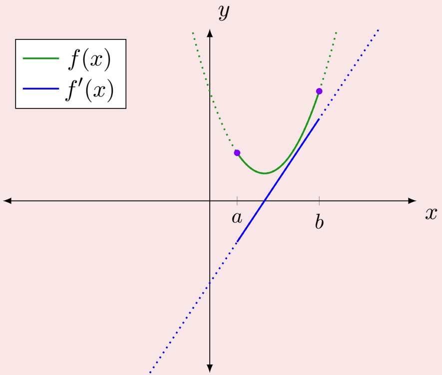


Curvatura de una función

- Dada una función $f(x)$ cóncava y dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$:

☞ $f'(x)$ es creciente en (a, b).

Figuras



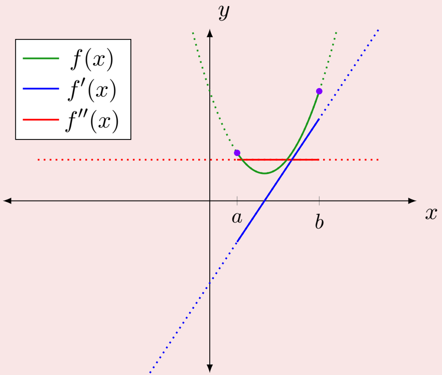
Curvatura de una función

- Dada una función $f(x)$ cóncava y dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$:

☞ $f'(x)$ es creciente en (a, b).

$\Rightarrow f''(x) > 0 \, \forall x \in (a, b)$

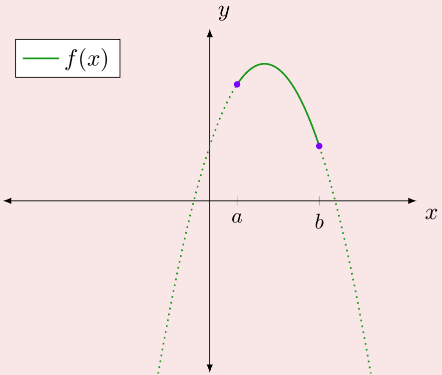
Figuras



Curvatura de una función

- Dada una función $f(x)$ convexa y dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$:

Figuras

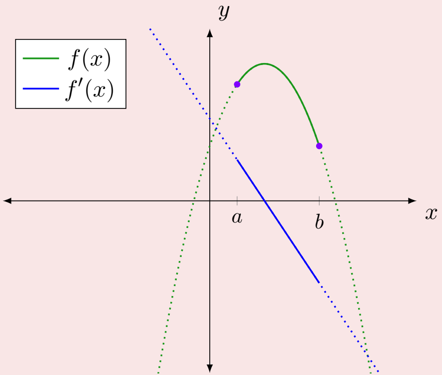


Curvatura de una función

- Dada una función $f(x)$ convexa y dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$:

☞ $f'(x)$ es decreciente en (a, b).

Figuras



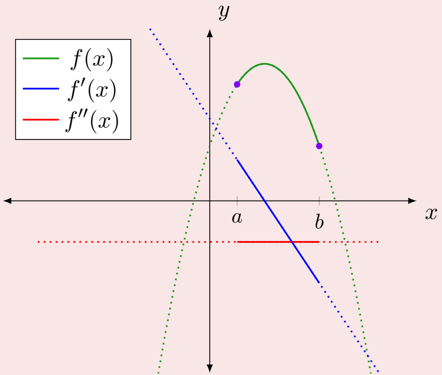
Curvatura de una función

- Dada una función $f(x)$ convexa y dos veces derivable en un intervalo $[a, b]$:

☞ $f'(x)$ es decreciente en (a, b).

$\Rightarrow f''(x) < 0 \, \forall x \in (a, b)$

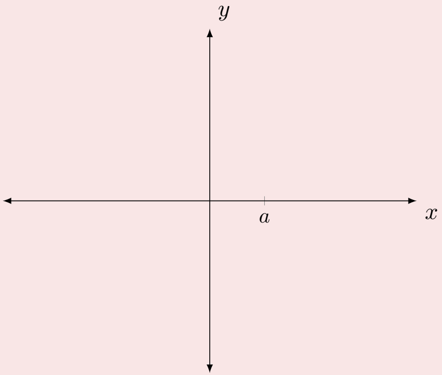
Figuras



Punto de inflexión

✍ Decimos que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$ si cambia la curvatura en dicho punto.

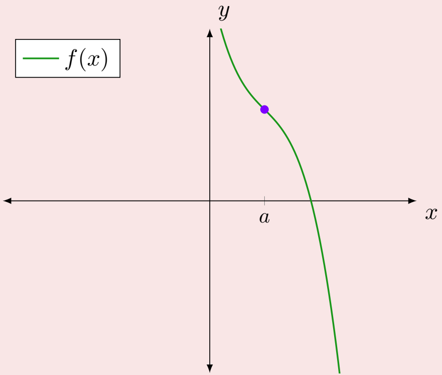
Figuras



Punto de inflexión

- ✍ Decimos que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$ si cambia la curvatura en dicho punto.
- ☞ Puede pasar de ser cóncava a ser convexa.

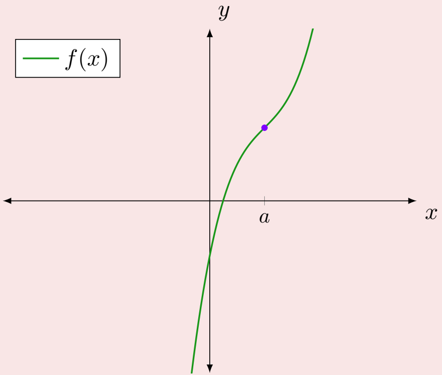
Figuras



Punto de inflexión

- ✍ Decimos que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$ si cambia la curvatura en dicho punto.
- ☞ Puede pasar de ser cóncava a ser convexa.
- ☞ O darse el caso contrario.

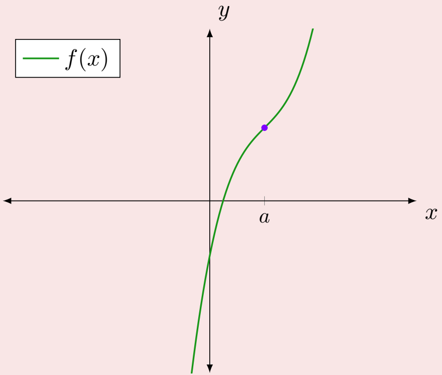
Figuras



Punto de inflexión

✍ Sea $f(x)$, dos veces derivable en $x = a$. Si f tiene un punto de inflexión en $x = a \Rightarrow f''(a) = 0$

Figuras

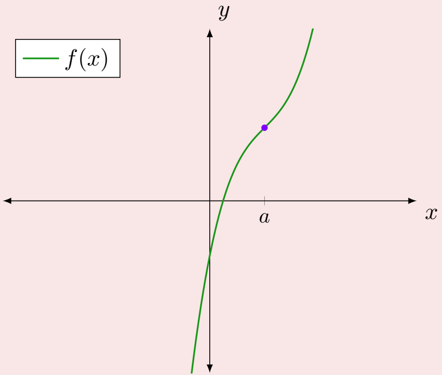


Punto de inflexión

✍ Sea $f(x)$, dos veces derivable en $x = a$. Si f tiene un punto de inflexión en $x = a \Rightarrow f''(a) = 0$

💡 En $x = a$, $f'(x)$ tiene un extremo relativo.

Figuras



Puntos de inflexión

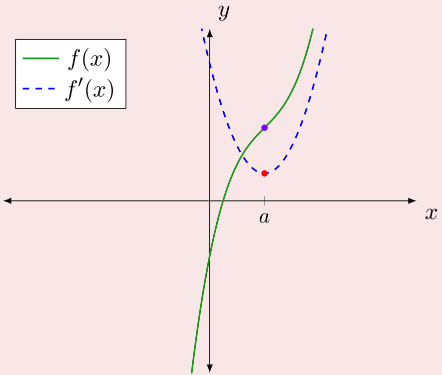
Relación con la segunda derivada

Punto de inflexión

- Sea $f(x)$, dos veces derivable en $x = a$. Si f tiene un punto de inflexión en $x = a \Rightarrow f''(a) = 0$

- En $x = a$, $f'(x)$ tiene un extremo relativo.
  - Mínimo relativo en este ejemplo

Figuras



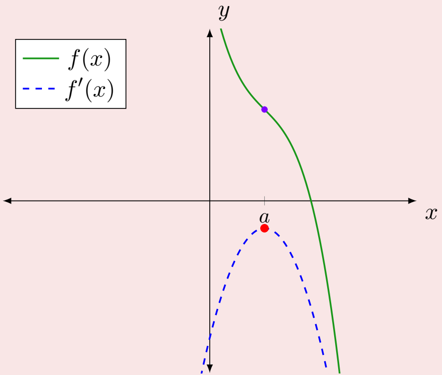
Punto de inflexión

✍ Sea $f(x)$, dos veces derivable en $x = a$. Si f tiene un punto de inflexión en $x = a \Rightarrow f''(a) = 0$

💡 En $x = a$, $f'(x)$ tiene un extremo relativo.

- Máximo relativo en este ejemplo

Figuras



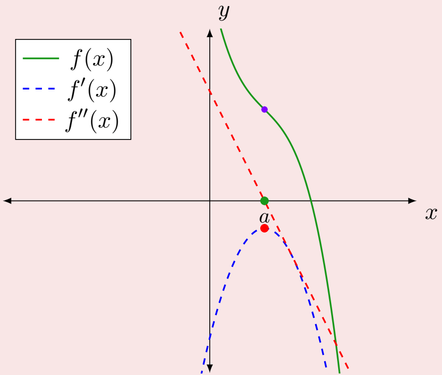
Punto de inflexión

- Sea $f(x)$, dos veces derivable en $x = a$. Si f tiene un punto de inflexión en $x = a \Rightarrow f''(a) = 0$

En $x = a$, $f'(x)$ tiene un extremo relativo.

Por lo tanto $f''(a) = 0$ en ambos casos.

Figuras



Puntos de inflexión

Relación con la segunda derivada

¡Importante!

✍ Si $f''(a) = 0$ no tiene por qué haber un punto de inflexión.

¡Importante!

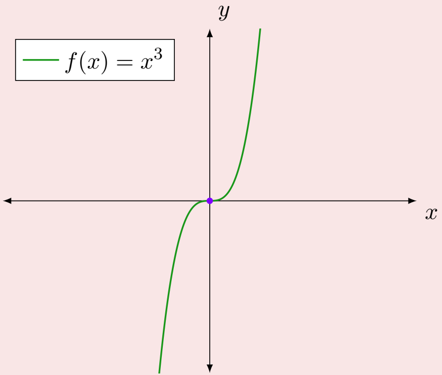
✍ Si $f''(a) = 0$ no tiene por qué haber un punto de inflexión.

Si $f''(a) = 0$ pero también $f'(a) = 0$, puede haber un extremo relativo en $x = a$

¡Importante!

- Si $f''(a)=0$ no tiene por qué haber un punto de inflexión.
- Si $f''(a)=0$ pero también $f'(a)=0$, puede haber un extremo relativo en $x=a$
- Ejemplo: $f(x)=x^3$

Figuras



¡Importante!

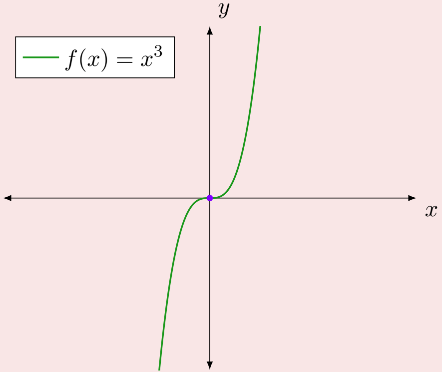
- Si $f''(a) = 0$ no tiene por qué haber un punto de inflexión.

Si $f''(a) = 0$ pero también $f'(a) = 0$, puede haber un extremo relativo en $x = a$

Ejemplo: $f(x) = x^3$

- La primera derivada no nula en $x = 0$ es $f'''(0) = 3! = 6$

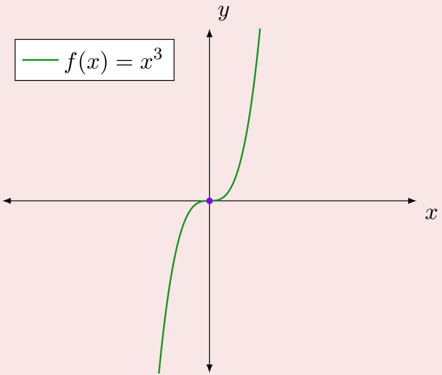
Figuras



¡Importante!

- Si $f''(a) = 0$ no tiene por qué haber un punto de inflexión.
- Si $f''(a) = 0$ pero también $f'(a) = 0$, puede haber un extremo relativo en $x = a$
- Ejemplo: $f(x) = x^3$
  - La primera derivada no nula en $x = 0$ es $f'''(0) = 3! = 6$
  - En $x = 0$ si hay punto de inflexión

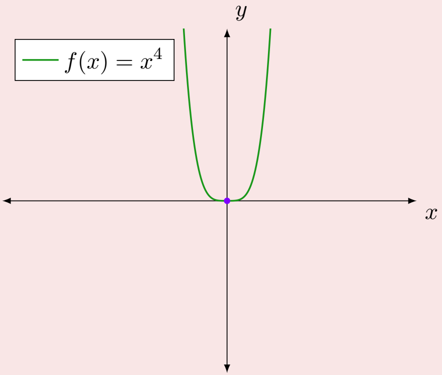
Figuras



¡Importante!

- ✍ Si $f''(a) = 0$ no tiene por qué haber un punto de inflexión.
- Si $f''(a) = 0$ pero también $f'(a) = 0$, puede haber un extremo relativo en $x = a$
- Ejemplo (II): $f(x) = x^4$
  - ☞ La primera derivada no nula en $x = 0$ es $f^{IV}(0) = 4! = 24$
  - ☞ En $x = 0$ hay un mínimo relativo.

Figuras



¡Recuerda!

$$\begin{cases} \text{Si } f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es Cóncava en } x = a \Rightarrow \text{Mínimo relativo} \\ \\ \text{Si } f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{es Convexa en } x = a \Rightarrow \text{Máximo relativo} \end{cases}$$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

☞ $Dom(f) : x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

☞ $Dom(f) :\ x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

☞ $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
- $Dom(f) : x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
- $Dom(f) : x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

- Creamos nuestra tabla de intervalos de crecimiento teniendo en cuenta también las discontinuidades

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

☞ $Dom(f) : x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

☞ $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

☞ Creamos nuestra tabla de intervalos de crecimiento teniendo en cuenta también las discontinuidades

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
$\nearrow$	$\nearrow$	Máx.R	$\searrow$	$\searrow$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Crecimiento de $f(x)$

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$
$\nearrow$	$\nearrow$	Máx.R	$\searrow$	$\searrow$

☞ $f(x)$ es estrictamente creciente si $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Crecimiento de $f(x)$

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$
$\nearrow$	$\nearrow$	Máx.R	$\searrow$	$\searrow$

- ☞ $f(x)$ es estrictamente creciente si $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$
- ☞ $f(x)$ es estrictamente decreciente si $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Crecimiento de $f(x)$

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$
$\nearrow$	$\nearrow$	Máx.R	$\searrow$	$\searrow$

- ☞ $f(x)$ es estrictamente creciente si $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$
- ☞ $f(x)$ es estrictamente decreciente si $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(0, f(0)) = (0,-1)$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

☞ $f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

☞ $f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_i \notin \mathbb{R}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

- $f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_i \notin \mathbb{R}$

- Creamos nuestra tabla de intervalos de Curvatura teniendo en cuenta también las discontinuidades

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

- $f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_i \notin \mathbb{R}$

- Creamos nuestra tabla de intervalos de Curvatura teniendo en cuenta también las discontinuidades

Signo de $f''(x)$		
$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
☺ $\rightarrow \smile$	☹ $\rightarrow \frown$	☺ $\rightarrow \smile$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Curvatura de $f(x)$

Signo de $f''(x)$		
$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
☺ $\rightarrow \smile$	☹ $\rightarrow \frown$	☺ $\rightarrow \smile$

☞ $f(x)$ es cóncava[a] si $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

[a] Visto desde arriba

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Curvatura de $f(x)$

Signo de $f''(x)$		
$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
☺ $\rightarrow \smile$	☹ $\rightarrow \frown$	☺ $\rightarrow \smile$

- ☞ $f(x)$ es cóncava[a] si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- ☞ $f(x)$ es convexa si $x \in (-1, 1)$

[a] Visto desde arriba

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Curvatura de $f(x)$

Signo de $f''(x)$		
$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
☺ $\rightarrow \smile$	☹ $\rightarrow \frown$	☺ $\rightarrow \smile$

- ☞ $f(x)$ es cóncava[a] si $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
- ☞ $f(x)$ es convexa si $x \in (-1,1)$

$f(x)$ cambia su curvatura en las discontinuidades, sin puntos de inflexión.

[a] Visto desde arriba

Ejemplos

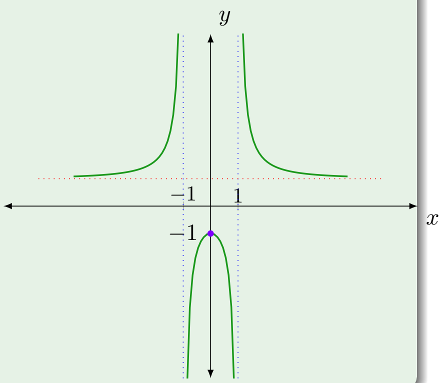
Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Resumen

Signo de $f'(x)$				
$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$
$\nearrow$	$\nearrow$	Máx.R	$\searrow$	$\searrow$

Signo de $f''(x)$		
$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)>0$	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$
☺ $\rightarrow \smile$	☹ $\rightarrow \frown$	☺ $\rightarrow \smile$

Gráfica de $f(x)$



Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

☞ $Dom(f) : x \in \mathbb{R}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

☞ $Dom(f):\ x\in\mathbb{R}$

☞ $f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

☞ $Dom(f): \ x \in \mathbb{R}$

☞ $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
- $Dom(f) : x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

- Creamos nuestra tabla de intervalos de crecimiento teniendo en cuenta también las discontinuidades

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del crecimiento de $f(x)$

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

☞ $Dom(f) : x \in \mathbb{R}$

☞ $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

☞ Creamos nuestra tabla de intervalos de crecimiento teniendo en cuenta también las discontinuidades

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	Mín.R	$\nearrow$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Crecimiento de $f(x)$

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	Mín.R	$\nearrow$

☞ $f(x)$ es estrictamente decreciente si $x \in (-\infty, 0)$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Crecimiento de $f(x)$

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	Mín.R	$\nearrow$

- ☞ $f(x)$ es estrictamente decreciente si $x \in (-\infty, 0)$
- ☞ $f(x)$ es estrictamente creciente si $x \in (0, \infty)$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Crecimiento de $f(x)$

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	Mín.R	$\nearrow$

- $f(x)$ es estrictamente decreciente si $x \in (-\infty, 0)$
- $f(x)$ es estrictamente creciente si $x \in (0, \infty)$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(0, f(0)) = (0, -1)$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

- $f''(x) = \dfrac{4 - 12x^2}{(x^2 + 1)^3}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

☞ $f''(x) = \dfrac{4 - 12x^2}{(x^2 + 1)^3}$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

- $f''(x) = \dfrac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- Creamos nuestra tabla de intervalos de Curvatura teniendo en cuenta también las discontinuidades

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Estudio del Curvatura de $f(x)$

- $f''(x) = \dfrac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$

Posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- Creamos nuestra tabla de intervalos de Curvatura teniendo en cuenta también las discontinuidades

Signo de $f''(x)$				
$\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f''(x) < 0$	0	$f''(x) > 0$	0	$f''(x) < 0$
☹ $\rightarrow \frown$	P.I.	☺ $\rightarrow \smile$	P.I.	☹ $\rightarrow \frown$

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Curvatura de $f(x)$

Signo de $f''(x)$				
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f''(x) < 0$	0	$f''(x) > 0$	0	$f''(x) < 0$
☹→⌢	P.I.	☺→⌣	P.I.	☹→⌢

☞ $f(x)$ es cóncava[a] si $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

[a] Visto desde arriba

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Curvatura de $f(x)$

Signo de $f''(x)$				
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f''(x) < 0$	0	$f''(x) > 0$	0	$f''(x) < 0$
☹ $\rightarrow \frown$	P.I.	☺ $\rightarrow \smile$	P.I.	☹ $\rightarrow \frown$

- ☞ $f(x)$ es cóncava[a] si $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ☞ $f(x)$ es convexa si $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

[a] Visto desde arriba

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Curvatura de $f(x)$

Signo de $f''(x)$				
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f''(x) < 0$	0	$f''(x) > 0$	0	$f''(x) < 0$
☹→⌢	P.I.	☺→⌣	P.I.	☹→⌢

- ☞ $f(x)$ es cóncava[a] si $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ☞ $f(x)$ es convexa si $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

💡 $f(x)$ Tiene dos puntos de inflexión en $x_{12} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

[a] Visto desde arriba

Ejemplos

Estudio del crecimiento y la curvatura de una función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Resumen

Signo de $f'(x)$		
$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$\searrow$	Mín.R	$\nearrow$

Signo de $f''(x)$				
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f''(x) < 0$	0	$f''(x) > 0$	0	$f''(x) < 0$
☹ $\rightarrow \frown$	P.I.	☺ $\rightarrow \smile$	P.I.	☹ $\rightarrow \frown$

Gráfica de $f(x)$