Solución a los problemas 17, 18, 19 y 20 de la página 368 del libro de texto, enviados a los alumnos de 2 de Bachillerato A del I. E. S. Mateo Alemán de Alcalá de Henares, para el lunes 16-03-20.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Ejercicio 17. Supongamos que la cantidad de agua recogida cada día en un determinado pantano sigue una distribución normal de desviación típica 3 L. Se elige una muestra aleatoria y se obtienen las siguientes cantidades de agua: 12.3; 5.8; 7.6; 4.8; 7; 4.2; 9.5; 5; 13.4; 10.6. Encuentra el intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida en el pantano cada día con un nivel de confianza del 95%.

Solución:

Sea X la variable aleatoria:

$$X = \text{“Cantidad de agua recogida por día en el pantano”}$$

X sigue una distribución normal de media desconocida μ (que vamos a estimar por medio de un intervalo de confianza) y desviación típica $\sigma = 3$. Esto se expresa matemáticamente como:

$$X \sim N(\mu, 3)$$

La expresión de un intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

En nuestro caso:

- $n = 10$ (que es el número de datos)
- $\bar{x} = \dfrac{12.3 + 5.8 + 7.6 + 4.8 + 7 + 4.2 + 9.5 + 5 + 13.4 + 10.6}{10} = \dfrac{80.2}{10} = 8.02$ (que es la media de los datos
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el **valor crítico**.

  Vamos a calcular este valor crítico.

  Como nos piden calcular un intervalo con una confianza del 95% tenemos:

$$1 - \alpha = \frac{95}{100} = 0.95$$

  por lo que

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

Así:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

y

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025}$$

Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ hay que recordar la fórmula:

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

De donde

$$P\left(Z \leq z_{0.025}\right) = 1 - 0.025 = 0.9750$$

Buscando en la tabla de la normal $N(0,1)$ de la página 343 del libro, aparece que 0.9750 corresponde a 1.96, por lo que:

$$z_{0.025} = 1.96$$

Sustituyendo ahora estos valores en la fórmula del intervalo de confianza obtenemos:

$$\left(8.02 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad 8.02 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Y ahora, operando:

$$\begin{aligned}\left(8.02 - 1.96 \cdot \frac{3}{3.16227766}, \quad 8.02 + 1.96 \cdot \frac{3}{3.16227766}\right) =\\ (8.02 - 1.96 \cdot 0.948683298, \quad 8.02 + 1.96 \cdot 0.948683298) =\\ (8.02 - 1.859419264, \quad 8.02 + 1.859419264) =\\ (6.160580736, \quad 9.879419264)\end{aligned}$$

Es decir:

$$(6.1606, \quad 9.8794)$$

y el significado que tiene es:

La media de la cantidad de agua que se recoge por día en el pantano se encuentra entre 6.16 L y 9.88 L con un 95% de confianza.

Ejercicio 18. En un grupo de 60 estudiantes universitarios se observa que 48 tienen uno o ningún hermano. Halla el intervalo de confianza del 90% para la proporción de dicho estudiantes en ese grupo.

Solución:

Sea p la variable aleatoria:

$p =$ "Proporción de estudiantes universitarios que tienen uno o ningún hermano"

p sigue una ley de distribución normal.

La expresión de un intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right)$$

En nuestro caso:

- $n = 60$ (que es el número de estudiantes)
- $\hat{p} = \dfrac{48}{60} = 0.8$ (que es la proporción de estudiantes, entre los 60, que tienen uno o ningún hermano)
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el **valor crítico**.

  Vamos a calcular este valor crítico.

  Como nos piden calcular un intervalo con una confianza del 90% tenemos:

  $$1 - \alpha = \frac{90}{100} = 0.90$$

  por lo que

  $$\alpha = 1 - 0.90 = 0.10$$

  Así:

  $$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.10}{2} = 0.05$$

  y

  $$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05}$$

  Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ hay que recordar la fórmula:

  $$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

De donde

$$P\left(Z \leq z_{0.05}\right) = 1 - 0.05 = 0.9500$$

Buscando en la tabla de la normal $N(0,1)$ de la página 343 del libro, aparece que 0.9500 corresponde a un valor entre 1.64 y 1.65, por lo que tomaremos:

$$z_{0.025} = 1.645$$

Sustituyendo ahora estos valores en la fórmula del intervalo de confianza obtenemos:

$$\left(0.8 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot (1-0.8)}{60}}, \quad 0.8 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot (1-0.8)}{60}}\right)$$

y ahora, operando:

$$\begin{aligned}
\left(0.8 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{60}}, \quad 0.8 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{60}}\right) &= \\
\left(0.8 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{60}}, \quad 0.8 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{60}}\right) &= \\
\left(0.8 - 1.645 \cdot \sqrt{0.002666666666}, \quad 0.8 + 1.645 \cdot \sqrt{0.002666666666}\right) &= \\
(0.8 - 1.645 \cdot 0.051639777, \quad 0.8 + 1.645 \cdot 0.051639777) &= \\
(0.8 - 0.084947434, \quad 0.8 + 0.0849474347) &= \\
(0.715052565, \quad 0.8849474347)
\end{aligned}$$

Es decir:

$$(0.7151, \quad 0.8849)$$

y el significado que tiene es:

La proporción de estudiantes universitarios que tienen uno o ningún hermano se encuentra entre 0.7151 y 0.8849 con un 90% de confianza.

Ejercicio 19. Un médico osteópata quiere estudiar la influencia de una dieta pobre en calcio en la osteoporosis. Para ello, toma una muestra de 225 enfermos de osteoporosis y obtiene que la dieta media de calcio es 920 mg. Suponiendo que la toma de calcio en estos enfermos sigue una distribución normal de desviación típica 175 mg, encuentra el intervalo de confianza al 99% para la cantidad media de calcio que toman estos enfermos.

Solución:

Sea X la variable aleatoria:

$$X = \text{“Cantidad de calcio en la dieta de los enfermos por osteoporosis”}$$

X sigue una distribución normal de media desconocida μ (que vamos a estimar por medio de un intervalo de confianza) y desviación típica $\sigma = 175$. Esto se expresa matemáticamente como:

$$X \sim N(\mu, 175)$$

La expresión de un intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En nuestro caso:

- $n = 225$ (que es el número de enfermos de la muestra que tomamos)
- $\bar{x} = 920$ (que es dieta media de calcio de estos enfermos)
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el **valor crítico**.

  Vamos a calcular este valor crítico.

  Como nos piden calcular un intervalo con una confianza del 99% tenemos:

  $$1 - \alpha = \frac{99}{100} = 0.99$$

  por lo que

  $$\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$$

  Así:

  $$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

  y

  $$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005}$$

  Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ hay que recordar la fórmula:

  $$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

  De donde

  $$P\left(Z \leq z_{0.005}\right) = 1 - 0.005 = 0.9950$$

  Buscando en la tabla de la normal $N(0, 1)$ de la página 343 del libro, aparece que 0.9950 corresponde a un valor entre 2.57 y 2.58, por lo que tomaremos:

  $$z_{0.005} = 2.575$$

Sustituyendo ahora estos valores en la fórmula del intervalo de confianza obtenemos:

$$\left(920 - 2.575 \cdot \frac{175}{\sqrt{225}}, \quad 920 + 2.575 \cdot \frac{175}{\sqrt{225}}\right)$$

Y ahora, operando:

$$\begin{aligned}
\left(920 - 2.575 \cdot \frac{175}{15}, \quad 920 + 2.575 \cdot \frac{175}{15}\right) &= \\
(920 - 2.575 \cdot 11.66666666, \quad 920 + 2.575 \cdot 11.66666666) &= \\
(920 - 30.04166666, \quad 920 + 30.04166666) &= \\
(889.9583333, \quad 950.04166666)
\end{aligned}$$

Es decir:

$$(889.9583, \quad 950.0417)$$

y el significado que tiene es:

La media de la cantidad de calcio de los enfermos de osteoporosis se encuentra entre 889.9583 mg y 950.0417 mg con un 99% de confianza.

Ejercicio 20. En una ciudad se toma, al azar, una muestra de 250 jóvenes de menos de 30 años, y se obtiene que 50 no hablan inglés.

(a) Halla, con una confianza del 98%, el intervalo para estimar la proporción de jóvenes que no hablan inglés.

(b) Queremos repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0.02 con el mismo nivel de confianza del 98%. ¿De cuántos jóvenes se compondrá la muestra?

Solución:

(a) Sea p la variable aleatoria:

$$p = \text{“Proporción de jóvenes que no hablan inglés”}$$

p sigue una ley de distribución normal.

La expresión de un intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right)$$

En nuestro caso:

- $n = 250$ (que es el número de jóvenes de la muestra)
- $\hat{p} = \dfrac{50}{250} = 0.2$ (que es la proporción de jóvenes, entre los 250, que no hablan inglés)
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el **valor crítico**.

  Vamos a calcular este valor crítico.

  Como nos piden calcular un intervalo con una confianza del 98% tenemos:

  $$1 - \alpha = \frac{98}{100} = 0.98$$

  por lo que

  $$\alpha = 1 - 0.98 = 0.02$$

  Así:

  $$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

  y

  $$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.01}$$

  Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ hay que recordar la fórmula:

  $$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

  De donde

  $$P\left(Z \leq z_{0.01}\right) = 1 - 0.01 = 0.9900$$

  Buscando en la tabla de la normal $N(0,1)$ de la página 343 del libro, aparece que 0.9900 corresponde a un valor entre 2.32 y 2.33, por lo que tomaremos:

  $$z_{0.01} = 2.325$$

Sustituyendo ahora estos valores en la fórmula del intervalo de confianza obtenemos:

$$\left(0.2 - 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot (1 - 0.2)}{250}}, \quad 0.2 + 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot (1 - 0.2)}{250}}\right)$$

y ahora, operando:

$$\left(0.2 - 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot (1-0.2)}{250}}, \quad 0.2 + 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot (1-0.2)}{250}}\right) =$$
$$\left(0.2 - 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{250}}, \quad 0.2 + 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{250}}\right) =$$
$$\left(0.2 - 2.325 \cdot \sqrt{0.00064}, \quad 0.2 + 2.325 \cdot \sqrt{0.00064}\right) =$$
$$(0.2 - 2.325 \cdot 0.025298221, \quad 0.2 + 2.325 \cdot 0.025298221) =$$
$$(0.2 - 0.058818364, \quad 0.2 + 0.058818364) =$$
$$(0.141181635, \quad 0.258818364)$$

Es decir:

$$(0.1412, \quad 0.2588)$$

y el significado que tiene es:

La proporción de jóvenes que no hablan inglés se encuentra entre 0.1412 y 0.2588 con un 98% de confianza.

(b) La fórmula del tamaño muestral para una proporción es (página 356 del libro):

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot p \cdot (1-p)}{E^2}$$

En nuestro caso:

- $\hat{p} = \frac{50}{250} = 0.2$ (que es la proporción de jóvenes, entre los 250, que no hablan inglés)
- $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.01} = 2.325$ es el **valor crítico**.
- $E = 0.02$ es una cota del error.

y ahora, operando:

$$n = \frac{2.325 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{0.02^2} = \frac{2.325 \cdot 0.16}{0.0004} = \frac{0.372}{0.0004} = 930$$

Por lo que hay que tomar una muestra de -AL MENOS- 930 jóvenes si queremos tener una cota de error de 0.02 con un 98% de confianza.

Es decir:

$$n > 930$$

de 930 en adelante.

SI EL RESULTADO HUBIERA SALIDO DECIMAL, HABRÍA QUE HABERLO REDONDEADO Y TOMADO -SIEMPRE- UN NÚMERO ENTERO.

Carlos Hermoso Ortiz