

Problemas métricos: aluden a medidas (distancias, ángulos, áreas, volúmenes, ...)

Se utilizan el producto escalar, el producto vectorial y el mixto.

La perpendicularidad es un problema métrico.

Problemas afines: tratan de incidencias (pto $\in$ recta, pto $\in$ plano, recta $\in$ plano), paralelismo e intersecciones.

A veces, se utilizan procedimientos métricos para resolver problemas afines.

Repaso: Direcciones de rectas y de planos.

- Dirección de una recta (dada en paramétricas).
Ej. $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ $(3, -1, 0)$ vector director.

- Dirección de un plano dado en forma implícita.
 $ax + by + cz + d = 0$ $(a, b, c) = \vec{n}$.
vector normal del plano.

- Plano $\parallel$ a 2 rectas:
Si $\pi \parallel r \text{ y } r' \Rightarrow$ vector normal a π es $\vec{d} \times \vec{d}'$.

Ej: $P(3, -7, 4) \in \pi$ y $\pi \parallel r \text{ y } s$.

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s: \frac{x-3}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z+10}{2}$$

$$\vec{d} = (3, 1, -1)$$

$$\vec{d}' = (5, -1, 2)$$

$$\vec{n} = \vec{d} \times \vec{d}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 11\vec{j} - 8\vec{k}.$$

$$\vec{n} = (1, -11, -8).$$

$\Rightarrow \Pi: \dots$ como $P \in \Pi$.

$x - 11y - 8z + D = 0$
sustituimos el pto en Π .

$$3 - 11 \cdot (-7) - 8 \cdot 4 + D = 0.$$

$$3 + 77 - 32 + D = 0$$

$$48 + D = 0 \Rightarrow D = -48$$

$$\text{luego } \Pi: x - 11y - 8z - 48 = 0.$$

• Recta definida por 2 planos.

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \vec{n} = (a, b, c) \perp \Pi \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & \vec{n}' = (a', b', c') \perp \Pi' \end{cases}$$

un vector director de r es $\vec{n} \times \vec{n}'$

Medida de ángulos entre rectas y planos.

• Ángulo entre 2 rectas.

$r \cap d \rightarrow$ vectores
 $r' \cap d' \rightarrow$ directores.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$$

observación: Dos rectas son $\perp$ si sus vectores directores son ortogonales.

Ex 47. Calcula el áng. formado por las rectas
e y s.

Tema 12/2.

a) r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2}$. s: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2-t \end{cases}$

$\vec{d} = (1, -1, 2)$.

$\vec{d}' = (2, -1, -1)$.

$\vec{d} \cdot \vec{d}' = 2 + 1 - 2 = 1$.

$|\vec{d}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$|\vec{d}'| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{6} = 80^\circ 24'$.

b) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2y-z=4 \end{cases}$

s: $\begin{cases} x-2y=10 \\ y+z=0 \end{cases}$

r: $\begin{cases} \vec{n} = (1, 1, 0) \\ \vec{n}' = (0, 2, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_c = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{e} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-1, 1, 2)$

s: $\begin{cases} \vec{n} = (1, -2, 0) \\ \vec{n}' = (0, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{d}'_c = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{e} - \vec{j} + \vec{k} = (-2, -1, 1)$

$\cos \alpha = \frac{|(-1, 1, 2) \cdot (-2, -1, 1)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$.

- Ángulo entre 2 planos.

$$\begin{aligned} \Pi &\sim \vec{n} \\ \Pi' &\sim \vec{n}' \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

OBS. Dos planos son $\perp$ si sus vectores normales son ortogonales.

Pág 325
Ej. 48] ángulo que forman Π y Π'

a) $\Pi: 2x + 3y - z + 6 = 0$ $\Pi': 2x - z + 5 = 0$

$$\vec{n} = (2, 3, -1)$$

$$\vec{n}' = (2, 0, -1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(2, 3, -1) \cdot (2, 0, -1)|}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow \arccos \frac{7}{\sqrt{70}}$$

b) $\Pi: 2x - 3y + 2z - 6 = 0$ $\Pi': 3x + 6y + 6z - 1 = 0$

$$\vec{n} = (2, -3, 2)$$

$$\vec{n}' = (3, 6, 6)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(2, -3, 2) \cdot (3, 6, 6)|}{\sqrt{4+9+4} \cdot \sqrt{9+36+36}} = 0 \Rightarrow \arccos 0 = 90^\circ$$

c) $\Pi: x - 2y + z - 4 = 0$

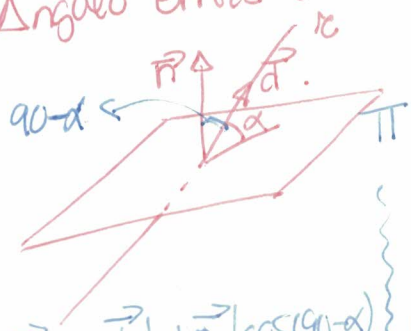
$$\vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$\Pi': 2x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\vec{n}' = (2, 2, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(1, -2, 1) \cdot (2, 2, 1)|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{54}} \Rightarrow \arccos \frac{1}{\sqrt{54}} = 82^\circ$$

- Ángulo entre una recta y un plano.



$$\sin \alpha \Rightarrow r, \Pi$$

$$\cos(90^\circ - \alpha)$$

ángulo que forma $\vec{n}_\Pi$ con $\vec{d}_r$

OBS. Ortogonalidad y paralelismo entre recta y plano.

$$r \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \parallel \vec{n}_\Pi \Leftrightarrow \vec{d}_r = \lambda \vec{n}_\Pi$$

$$r \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\Pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\Pi = 0$$

¡ojo! $\vec{d} \cdot \vec{n} = |\vec{d}| \cdot |\vec{n}| \cos(90^\circ - \alpha)$

Act 49 ángulo formado por π y Π .

a) $\pi: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-10}{-2}$

$\vec{d} = (1, 1, -2)$

$\Pi: 2x - y = 0$

$\vec{n} = (2, -1, 0)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|(1, 1, -2) \cdot (2, -1, 0)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$\Rightarrow \arcsin(1/\sqrt{30}) = 10^\circ 31'$

b) $\pi: x = y = z$ $\Pi: 2x - y + 2z = 0$

$\vec{d} = (1, 1, 1)$

$\vec{n} = (2, -1, 2)$

$$\sin \alpha = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (2, -1, 2)|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} = 35^\circ 16'$

c) $\pi: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

$\vec{d} = (3, -1, 1)$

$\Pi: x - 2y + 3z + 8 = 0$

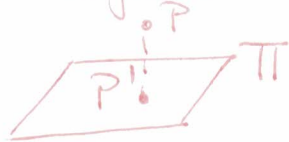
$\vec{n} = (1, -2, 3)$

$$\sin \alpha = \frac{|(3, -1, 1) \cdot (1, -2, 3)|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{154}}$$

$\arcsin \frac{8}{\sqrt{154}} = 40^\circ 8' 24''$

Proyecciones ortogonales y pto simétrico

④ Proyección ortogonal de un pto sobre un plano



$$r \perp \Pi, P \in r$$

$$P' = r \cap \Pi.$$

Act 51 Proyección ortogonal de P sobre Π :

a) $P(1, -2, 1)$ y $\Pi: 2x + y - z = 0$.

vector normal de Π es el vector director de r

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow P' = r \cap \Pi \Rightarrow$$

$$2(1+2\lambda) + (-2+\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

$$\text{luego } P' = \left(1 + \frac{1}{3}, -2 + \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{6}\right)$$

sustituir el valor λ en r .

$$= \left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

b) $P(-1, 2, 3)$ y Π es el plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ y al pto $Q(0, 2, -1)$.

1. Determinar el plano.

$$\vec{d}_{\Pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, -5)$$

La recta dada en implícitas nos da el haz de planos que se cortan en ella.

$$x + 2y - z + \lambda(2x - y + 3) = 0$$

Sustituimos el pto $Q \in \Pi$ en el haz, y despejamos λ .

$$4 + 3 + \lambda(-2 + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = -7$$

$$\text{luego, } \Pi: x + 2y - z - 7(2x - y + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \Pi: -13x + 9y - z = 21.$$

$$\vec{n} = (-13, 9, -1).$$

Shoara $\vec{n}_{\Pi} = \vec{d}_r \Rightarrow$ recta buscada es

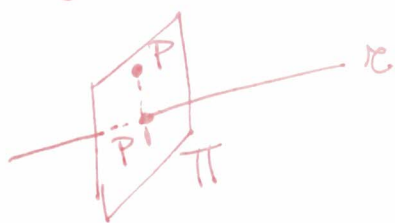
$$r: \begin{cases} x = -1 - 13\lambda \\ y = 2 + 9\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$P': r \cap \Pi \Rightarrow -13(-1 - 13\lambda) + 9(2 + 9\lambda) - (3 - \lambda) = 21$$

$$\lambda = \frac{-7}{251}$$

$$\text{luego } P' = \left(-1 - \frac{13 \cdot (-7)}{251}, 2 - \frac{63}{251}, 3 + \frac{7}{251} \right) = \left(-\frac{160}{251}, \frac{439}{251}, \frac{760}{251} \right).$$

② Proyección ortogonal de un pto sobre una recta.



• $\Pi \perp r, P' \in \Pi$.

$$P' = \Pi \cap r.$$

Act 52 ¿Proyección ortogonal de P sobre r?

a) $P(-2, -4, 9)$ y $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$

Plano $\perp$ a r $\vec{d}_r = \vec{n}_{\Pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-8, -7, 3)$

$$\text{luego } \Pi: -8x - 7y + 3z + K = 0$$

este es un plano

pto P .

$$-8 \cdot (-2) - 7 \cdot (-4) + 3 \cdot 9 + K = 0$$

$$K = -71$$

$$\text{luego } \Pi: -8x - 7y + 3z - 71 = 0$$

$$\text{Como } P' \in r \cap \Pi \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ -8x - 7y + 3z = 71 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' = \left(-\frac{1294}{3}, -\frac{765}{6}, \frac{113}{61} \right)$$

b) $P(-1, -5, 6)$ y r es la recta que pasa por

$$A(0, -8, 4), B(1, -4, 12)$$

$$\vec{d} = \vec{AB} = (1, 4, 8) \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -8 + 4\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\Pi = (1, 4, 8) \Rightarrow \Pi: x + 4y + 8z + K = 0$$

como $P \in \Pi \Rightarrow$ hallamos K

$$-1 + 4 \cdot (-5) + 8 \cdot 6 + K = 0$$

$$K = -27$$

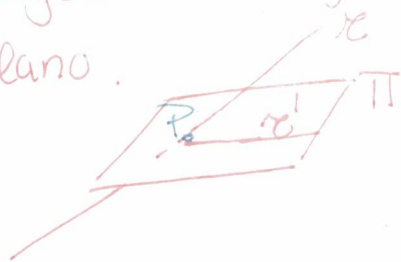
$$\Rightarrow \Pi: x + 4y + 8z - 27 = 0$$

$$P' = r \cap \Pi$$

$$\lambda + 4(-8 + 4\lambda) + 8(4 + 8\lambda) - 27 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\text{luego } P' = \left(\frac{1}{3}, -8 + \frac{4}{3}, 4 + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{20}{3} \right)$$

③ Proyección ortogonal de una recta sobre un plano.



$\Pi' \perp \Pi, r \subset \Pi'$ contenido.
 $r' = \Pi \cap \Pi'$

Act 53 ¿proyec. ortogonal de $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ sobre el plano $\Pi: x+y-z=4$?

$r \cap \Pi \Rightarrow \begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$

Sustituimos en Π .

$\Pi: x+y-z=4$

$\Rightarrow (1+4\lambda) + (-2+\lambda) - (3-\lambda) = 4$
 $\lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Pto = $(1 + \frac{16}{3}, -2 + \frac{4}{3}, 3 - \frac{4}{3}) =$
 $= (\frac{19}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$

Calculamos la proyección del pto $Q(1,2,3)$ de r sobre Π .

$S: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$ $\nwarrow \vec{n} \text{ de } \Pi$

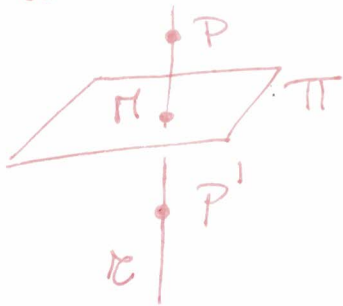
$P' = S \cap \Pi \Rightarrow 1+\lambda - 2+\lambda - 3+\lambda = 4$
 $\lambda = \frac{8}{3}$

$P' \rightarrow (1 + \frac{8}{3}, -2 + \frac{8}{3}, 3 - \frac{8}{3}) =$
 $= (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

La recta e' , proyección ortogonal de e sobre π , será la recta que pasa por P y P' .

$$e': \frac{x - \frac{11}{3}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{3}}{1}$$

④ Pto simétrico de un pto respecto de un π



- $e \perp \pi$; $P \in e$
- $N = e \cap \pi$
- N pto medio de $\overline{PP'}$.

Act 54 Pto simétrico de P respecto del plano

a) $P(2, -5, 6)$ y $\pi: x + y - 5z + 6 = 0$.

Buscamos $e \perp \pi$ que $P \in e$.

$$\vec{n}_{\pi} = \vec{d}_e.$$

$$e: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 6 - 5\lambda \end{cases}$$

Después, N es pto de intersección de $e \cap \pi$.

$$N \Rightarrow (2 + \lambda) + (-5 + \lambda) - 5(6 - 5\lambda) + 6 = 0$$

$$\lambda = 1.$$

$$N = (3, -4, 1).$$

Suponiendo que el simétrico buscado es

2º Bach / Mat II
Tema 12/6

$$P'(a, b, c) = \begin{cases} \frac{2+a}{2} = 3 \Rightarrow a = 4 \\ \frac{-5+b}{2} = -4 \Rightarrow b = -3 \\ \frac{6+c}{2} = 1 \Rightarrow c = -4. \end{cases}$$

$$P'(4, -3, -4).$$

b) $P(1, -4, 3)$ y Π es el plano que pasa por las pts $A(1, 0, -2)$, $B(0, 1, -3)$ y $C(-1, 0, 0)$.

$$\Pi: \begin{cases} \vec{AB} = (-1, 1, -1) \\ \vec{AC} = (-2, 0, 2) \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 2x + 4y + 2z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x + 2y + z + 1 = 0} \end{cases}$$

Proyección de P sobre Π :

$$\begin{aligned} &P: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad P_{\Pi} = P \cap \Pi \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow 1 + \lambda - 8 + 4\lambda + 3 + \lambda + 1 = 0 \\ &\quad \quad \quad \lambda = \frac{1}{2}. \\ &\quad \Rightarrow P_{\Pi} = \left(\frac{3}{2}, -3, \frac{7}{2} \right). \end{aligned}$$

Suponiendo que el simétrico buscado es

$$P'(a, b, c) = \begin{cases} \frac{1+a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2 \\ \frac{-4+b}{2} = -3 \Rightarrow b = -2 \\ \frac{3+c}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow c = 4. \end{cases} \quad P' = (2, -2, 4)$$

b) $P(1, -4, 3)$ y Π es el plano que pasa por $A(0, -2)$, $B(0, 1, -3)$ y $C(-1, 0, 0)$.

1.º Ec. del plano, implícita.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 2(x-1) + 2y + 2y + 2(z+2) = 0$$

$$= 2x - 2 + 4y + 2z + 4 = 0$$

$$= \underline{2x + 4y + 2z + 2 = 0}$$

Recta $r \perp \Pi$ y $P \in r$.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -4 + 4\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow P_{\Pi} = r \cap \Pi \Rightarrow 2(1+2\lambda) + 4(-4+4\lambda) + 2(3+2\lambda) = 0$$

$$2 + 4\lambda - 16 + 16\lambda + 6 + 4\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Pto medio } P_{\Pi} = \left(\frac{3}{2}, -3, \frac{7}{2} \right)$$

$$\text{Pto simétrico } P'(a, b, c) = \begin{cases} \frac{a+1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2 \\ \frac{b-4}{2} = -3 \Rightarrow b = -2 \\ \frac{c+3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow c = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{P'(2, -2, 4)}$$

c) $P(1,0,2)$ y $\Pi \perp$ al eje X que pasa por el pto $B(4,1,-2)$.

Ec. de Π
si es $\perp$ al eje $X = \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; es vectorial.

$$\vec{d}_{\text{gex}} = \vec{n}_{\Pi}$$

$$(x,y,z) = (0,0,0) + (1,0,0)\lambda$$

$$x + D = 0.$$

Sustituimos el pto en la ec del Π .

$$4 + D = 0 \Rightarrow D = -4.$$

$$\underline{\text{Ec. } \Pi: x - 4 = 0.}$$

Proyección de P sobre Π :

$$r = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

recta $\perp$ a Π by $P \in r$.

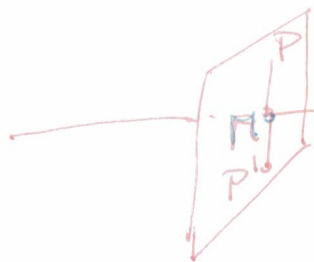
$$P_{\Pi} = r \cap \Pi \Rightarrow \begin{aligned} (1+\lambda) - 4 &= 0 \\ \lambda &= 4 - 1 \\ \lambda &= 3. \end{aligned}$$

$$P_{\Pi} = (4, 0, 2)$$

$$\text{Pto simétrico } P'(a,b,c) = \begin{cases} \frac{a+1}{2} = 4 \Rightarrow a=7 \\ \frac{b+0}{2} = 0 \Rightarrow b=0 \\ \frac{c+2}{2} = 2 \Rightarrow c=2 \end{cases}$$

$$P'(7, 0, 2)$$

⑤ Pto simétrico de un pto respecto de una recta



$\pi: \pi \perp r, P' \in \pi$

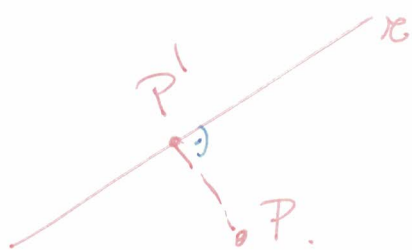
• π : pto proyección ortogonal de P sobre r . (es el pto medio de $\overline{PP'}$)

Distancia entre ptes rectas y planos

de $\overline{PP'}$

π pto medio de $\overline{PP'}$

• Distancia entre un pto y una recta.

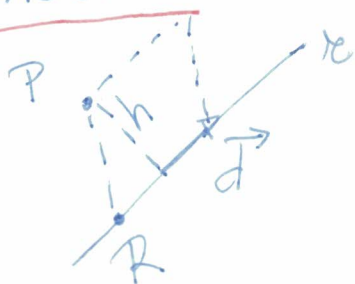


$\text{distancia}(P, r) = \text{distancia}(P, P')$

P' es la proyección de P sobre r .

1er método: • Hallar plano π , $\pi \perp r$, $P \in \pi$ ($\vec{d}_r = \vec{n}_\pi$)
• $P' = \pi \cap r$, con P' se calcula $\text{dist}(P, P')$

2º método: (si hallar P').



• De r conocemos un pto R y $\vec{d}_{recta}$

• Área paralelogramo = $|\vec{d} \times \vec{RP}|$

$$\text{dist}(P, r) = h = \frac{|\vec{d} \times \vec{RP}|}{|\vec{d}|}$$

Pág 325.

$\Delta \in S^2$. ¿dist(P, $\mathcal{C}$)?

a) $P(1, 0, -3)$ $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

2º método:

Un pto $\Delta \in \mathcal{C} \Rightarrow \Delta(1, 2, 0)$
 $\vec{d}_{\mathcal{C}} = (1, -1, 1).$

$\vec{\Delta P} = (0, -2, -3).$

$$\text{dist.}(P, \mathcal{C}) = \frac{|(0, -2, -3) \times (1, -1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{|(5, 3, -2)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{114}}{3} \text{ u.}$$

1º método:

• Hallar un plano $\Pi \perp \mathcal{C}$ y $P \in \Pi$.

$\vec{d}_{\mathcal{C}} = \vec{n}_{\Pi} \Rightarrow x - y + z + D = 0$

substituimos P en $\Pi \Rightarrow 1 - 3 + D = 0$
 $D = 2.$

$\Pi: x - y + z + 2 = 0.$

• $P' = \Pi \cap \mathcal{C}.$

$(1 + \lambda) - (2 - \lambda) + \lambda + 2 = 0.$

$1 + \lambda - 2 + \lambda + \lambda + 2 = 0$

$3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}.$

$P' = (1 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$

$$\text{dist}(P, P') = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}+3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{49}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{114}{9}} = \frac{\sqrt{114}}{3}$$

u.

b) $P(-2, 1, 0)$ e: $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$

Para hallar vector director de e:

2ptos de e.

$x=0$: $y+z=2 \Rightarrow y=2$. $\Delta Pto(0, 2, 0)$.
 $z=0$

$x=1$. $1+y+z-2=0 \Rightarrow y+z=1$
 $2-z=0 \Rightarrow z=2$ $\Delta Pto(1, -1, 2)$

$\vec{d}_e = \vec{AB} = (1, -3, 2)$.

$\vec{AP} = (-2, -1, 0)$.

$\text{dist}(P, e) = \frac{|(-2, -1, 0) \times (1, -3, 2)|}{\sqrt{1+9+4}} =$

$= \frac{|(-2, 4, 7)|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{4+16+49}}{\sqrt{14}} =$

$= \sqrt{\frac{69}{14}}$ u.

* Distancia entre 2 pts.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 (x_1, y_1, z_1) \\ P_2 (x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} \text{dist. } (P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}|$$

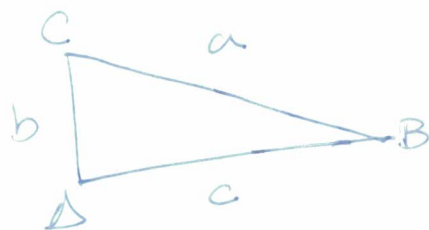
Pág 325

Ex 55. Hallar perímetro del triáng. de
vértices $A(4, -5, -2)$

$B(-6, 10, 3)$

$C(14, 0, 3)$

Comprobar que es triángulo rectángulo en A .



longitud de los lados, son las distancias
entre los vértices.

$$a \Rightarrow \text{dist.}(B, C) = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500}$$

$$c \Rightarrow \text{dist.}(A, B) = \sqrt{10^2 + 15^2 + 5^2} = \sqrt{350}$$

$$b \Rightarrow \text{dist.}(A, C) = \sqrt{10^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{150}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{500} + \sqrt{350} + \sqrt{150} \text{ u.}$$

Comprobar que es rectángulo en A .

$$\begin{aligned} \sqrt{500}^2 &= \sqrt{350}^2 + \sqrt{150}^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

✓

Dist 56 | d'á" tq segmento $\Delta(-2, 3, 4)$ y $B(-1, -1, a)$ tengn

long 9?

$$\text{dist}(A, B) = 9$$

$$\sqrt{1^2 + 4^2 + (1-a)^2} = 9$$

$$1 + 16 + 1 + 2a + a^2 = 81$$

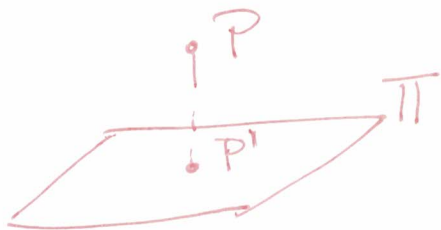
$$a^2 - 2a - 63 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 252}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{256}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 16}{2} \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 9 ; a = -7$$

* Distancia de un pto a un plano.



$$\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, P')$$

P' es la proy de P sobre Π .

• Hallar $x, y, z \perp \Pi, P \in \mathbb{R}$.

• P' es el pto de intersección de x con Π .

Otra forma:

$$\text{dist}(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$.

Sub 57] dist. (P a un plano).

2º Bach / Mat II
Tema 12/10

a) $P(1, -2, 3)$ $\Pi: 2x + y + z + 3 = 0$.

$$d(P, \Pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 3 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u.}$$

b) $P(2, -2, 4)$

$$\Pi: \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 - 2 + 2\mu \\ z = -2 + 2 + \mu \end{cases} \Rightarrow \text{Implicar.}$$

$\Rightarrow$ Implicar.

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \Rightarrow -5x + y + 3z + 5 = 0$$

$$d(P, \Pi) = \frac{|-5 \cdot 2 - 2 + 3 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{25 + 1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7} \text{ u.}$$

* Distancia entre 2 rectas.

I Si $r \parallel s$: tomamos un pto de una de ellas y hallamos la dist. de ese pto a la otra.

II Si r no $\parallel s$: hallar $\Pi: \Pi \parallel a s, r \in \Pi$

1º método: Hallar Π ; $r \in \Pi$ y $s \parallel \Pi$.
 $\left\{ \begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \\ &= \text{dist}(\Pi, s) = \\ &= \text{dist}(P_s, \Pi). \end{aligned} \right.$

5: $r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases}$
 $\vec{d}_r = (1, 0, 2)$ $\vec{d}_s = (3, -1, 4)$

ó paralelas a ellas.

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \vec{n}_\Pi \Rightarrow (1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1) \perp \Pi$$

Pto $(5, -1, 8) \in r$ y también $\in \Pi$.

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) - 8 + D = 0 \Rightarrow D = 0.$$

$$\Rightarrow \text{ec. } \Pi: 2x + 2y + z = 0.$$

$$2x + 2y - z + D = 0$$

Tomamos un pto de $s = (4, 3, 5)$

$$d(P, \Pi) = \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3u.$$

2º método: Obtener R y S extremos del segmento

⊥ a egs .

$$R \in e \Rightarrow (5+\lambda, -1, 8+2\lambda)$$

$$S \in s \Rightarrow (4+3\mu, 3-\mu, 5+4\mu)$$

$$\overrightarrow{RS} = (-1+3\mu-\lambda, 4-\mu, -3+4\mu-2\lambda).$$

Como es ⊥ a $egs \Rightarrow$ productos escalares de $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{d_e} = 0$

$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0$$

$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{d_e} = 0 \Rightarrow 7+5\lambda-11\mu=0$$

$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0 \Rightarrow 19+11\lambda-26\mu=0$$

Resolvemos y la solución es $\lambda=3, \mu=2$.

$$\text{Por lo tanto, } R(8, -1, 14)$$

$$S(10, 1, 13).$$

$$\text{dist}(e, s) = \text{dist}(R, S) = \sqrt{(10-8)^2 + (1+1)^2 + (13-14)^2} = 3u.$$

La recta que pasa por R y S es la recta perpendicular a egs (perpendicular común) ($\overrightarrow{d_e} \times \overrightarrow{d_s}$)

Otra forma: $\Pi \perp \text{rect } \Pi, s \parallel \Pi$

Dibujó pág 456.

$P \in e, Q \in s$

$$\text{dist}(e, s) = \text{dist}(Q, \Pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_\Pi}|}{|\overrightarrow{d_e} \times \overrightarrow{d_s}|}$$

$$(*) = \frac{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|}$$

altura del paralelepípedo definido por $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{PQ} = h = \frac{\text{Volumen paralelepípedo}}{\text{Área base}}$ (*)

Oct. 60.

2º Bach. Mat. II.
Tema 12/11.

Dados los paraboloides

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}, \quad s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hallen la distancia entre ellas.

$\vec{d}_r = (1, -2, 1)$ y $\vec{d}_s = (1, -2, 1) \Rightarrow$ al ser iguales, las rectas son // o coincidentes.

Comprobamos que Pto $\Delta(0, 0, 1)$ de r no es de $s \Rightarrow$ en s : $\begin{cases} 0 = 1+t \Rightarrow t = -1 \\ 0 = 1-2\lambda \Rightarrow \lambda = 1/2 \\ 1 = \lambda \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$ No es el mismo λ
no $\Delta \in s$.

Por lo tanto, no son coincidentes

Son //.

La distancia entre dos rectas //, es la distancia de un pto de una de ellas a la otra recta.

Por el 2º método:

De r conocemos un pto $\Delta(0, 0, 1)$ y de s " " " $P(1, 1, 0)$

$$\Rightarrow \text{dist}(r, s) = \text{dist}_\perp(P, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{\Delta P}|}{|\vec{d}_r|}$$

$$\vec{\Delta P} = (1, 1, -1)$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{\Delta P}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k} + \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{i} + \vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

módulo $\sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

$$\Rightarrow \text{dist}(r, s) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \text{ u.}$$

Act 61 | Estudia la posición relativa de r y s ,
y calcula la distancia que las separa.

a) $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ $s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$

Identificamos. $\vec{d}_r = (1, 2, 3)$ $P_r = (0, 2, 3)$
 $\vec{d}_s = (-1, 1, 2)$ $P_s = (1, 1, 2)$

Formamos $\overrightarrow{P_r P_s} = (1, -1, -1)$

$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 $M.$

$\det(M') = 1 + 4 + 3 - 3 + 2 - 1 = 7$
 $\text{rango}(M') = 3$
 $\text{rango}(M) = 2$. Se cancela.

$\Rightarrow$ Por el 1er método:

Hallamos Π tq $\Pi \perp a_s$, $r \in \Pi$.

• Vector normal de Π

$\vec{d}_r = (1, 2, 3)$
 $\vec{d}_s = (-1, 1, 2)$

$(1, 2, 3) \times (-1, 1, 2) =$
 $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$
 $= 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$
 $(4, 5, -3)$

Como $P_r = (0, 2, 3) \in r \Rightarrow P_r \in \Pi$
luego.

$1 \cdot x + 5(y-2) + 3(z-3) = 0$

$x - 5y + 10 + 3z - 9 = 0$

$x - 5y + 3z + 1 = 0 \equiv \Pi$

Ahora: $\text{dist}(P_s, \Pi) = \frac{|1 - 5 + 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + 25 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{35}}{35} \text{ u.}$

$$b) r: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Identificamos.

$$\vec{d}_r = (-1, 1, 2) \quad \vec{d}_s = (1, -1, -2) \text{ y}$$

$$P_r = (1, 0, -1) \quad P_s = (-1, 0, 0) \Rightarrow \vec{P_r P_s} = (-2, 0, 1)$$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Es decir claro que

$$\text{rang}(M) = 1.$$

$$\text{pero } \text{rang}(M') = 2$$

luego son paralelas.

Un pto de r , $P_r = (1, 0, -1)$ (pq $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$
pero $\vec{P_r P_s} \nparallel \vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$).

hallamos la distancia

de P_r a s .

$$d(P_r, s) = \frac{|\vec{d}_s \times \vec{P_r P_s}|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(1, -1, -2) \times (-2, 0, 1)|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u$$

2º método

$$c) r: \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

Identificamos:

$$r: \begin{cases} x=0 & y=0 \\ & z=0 \\ x=1 & y=-1 \\ & z=-1 \end{cases}$$

$$P_{r,s} (0, 0, 0) \quad (1, -1, -1) \\ \vec{d}_r = (1, -1, -1)$$

$$s: \vec{d}_s = (1, 1, 1) \\ P_s = (1, 1, 0) \\ \vec{P_r P_s} = (1, 1, 0)$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{rang}(M) = 2 \\ \text{rang}(M') = 3 \\ \text{Se cruzan.} \end{matrix}$$

distancia : por el otro método, ^{produce mix x}

$$\text{dist}(r,s) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s \cdot \vec{P}_r \vec{P}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} =$$

$$= \frac{|2|}{| (0, -2, 2) |} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u.}$$

* Distancia entre 2 planos.

(I) Si π y π' se cortan, su distancia es 0.

(II) Si π y π' son paralelas y $P \in \pi$,
 $\Rightarrow \text{dist}(\pi, \pi') = \text{dist}(P, \pi') =$

$$= \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Act 62 ¿Distancia entre planos paralelos?

a) $\pi \equiv x + y + z = 0$ $\pi' \equiv 2x + 2y + 2z + 3 = 0.$

$\vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$ $\vec{n}_{\pi'} = (2, 2, 2)$ son // los planos

son proporcionales

(por $d' = 3$
 $d = 0$
 no son coincidentes)

$d(\pi, \pi') = \text{dist}(P, \pi') =$

$= \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.}$

$P_\pi = (0, 0, 0)$

$$b) \Pi: 3x - y = 0 \quad \Pi': -2x + \frac{2}{3}y = 5.$$

$$\vec{n}_{\Pi} = (3, -1, 0) \quad \vec{n}_{\Pi'} = (-2, \frac{2}{3}, 0)$$

✓ /
son proporcionales.

No son coincidentes ($d=0$, $d'=5$).

Pto de Π (0, 0, 0).

$$d(\Pi, \Pi') = d(0, \Pi') = \frac{|-2 \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0 - 5|}{\sqrt{4 + \frac{4}{9}}} =$$

$$= \frac{5}{\frac{\sqrt{40}}{3}} = \frac{3\sqrt{40}}{8} \text{ u.}$$

* Distancia de un recta a un plano.

(I) Si r y Π se cortan, la dist es cero.

(II) Si $r \parallel \Pi$ y $P \in r$, $\text{dist}(r, \Pi) = \text{dist}(P, \Pi)$.

Act 63 | $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ $\Pi: 2x + y - z = 2$.

a) Demuestra que la recta es $\parallel$ al plano.

$$\vec{n}_{\Pi} = (2, 1, -1)$$

$$\vec{d}_r = (1, -1, 1)$$

Si el producto escalar de ambos es 0 $\Rightarrow$ son $\perp$ los vectores $\Rightarrow$ son r y Plano paralelos.

$$(2, 1, -1) \cdot (1, -1, 1) =$$

$$= 2 - 1 - 1 = 0.$$

b) Calcula la distancia que los separa.

$A(-1, 0, 0) \in r$ $d(\Delta, \Pi) = \frac{|-2 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ u.}$

$d(r, \Pi)$

- Si $r // s$ o coincidentes, no $\exists$.
- Si r y s se cortan o se cruzan:

$$e \equiv \begin{pmatrix} P_e \\ \vec{d}_e \end{pmatrix} \quad s \equiv \begin{pmatrix} P_s \\ \vec{d}_s \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \vec{d}_e \times \vec{d}_s$$

La recta $\perp$ común, P , se obtiene como intersección de Π_1 (determinado por $\vec{e}$ y $\vec{u}$) y

$\pi_1 :$

$$\begin{vmatrix} d_1 & u_1 & x-p_1 \\ d_2 & u_2 & x-p_2 \\ d_3 & u_3 & x-p_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_1: \begin{vmatrix} d_1 & u_1 & x-p_1 \\ d_2 & u_2 & x-p_2 \\ d_3 & u_3 & x-p_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$P: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \equiv \pi_1 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & \equiv \pi_2 \end{cases}$$

Ex 65 Perpendicular common to

$$e: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

$$S: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\vec{d}_C = (1, -2, 3) \quad P_C = (0, 0, 4)$$

$$\vec{d}_S = (-1, 1, 2) \quad P_S = (0, +1, 0)$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (-7, -5, -1)$$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & x \\ -2 & -5 & y \\ 3 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 17x - 20y - 19z + 19 = 0$$

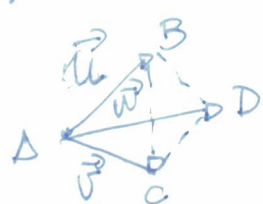
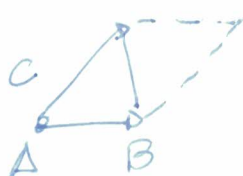
$$\Pi_2: \begin{vmatrix} -4 & -7 & x \\ 1 & -5 & y-1 \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 4z + 5 = 0,$$

$$\Rightarrow P: \begin{cases} 17x - 20y - 19z + 19 = 0 \\ 3x - 5y + 4z + 5 = 0. \end{cases}$$

4) Áreas y volúmenes.

Recordar: Área de un paralelogramo = $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Área " " triángulo = $\frac{1}{2} |\Delta \vec{B} \times \Delta \vec{C}|$



Volumen tetraedro = $\frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ = Ptos.

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Ej 20. Calcula el área

del triángulo ABC en los siguientes casos:

a) $A(4, -6, 2), B(-3, 4, -2), C(0, -8, 0)$

Formamos los vectores $\Delta \vec{B} = (-7, 10, -4)$
 $\Delta \vec{C} = (-4, -2, -2)$

$$\Delta \vec{B} \times \Delta \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 10 & -4 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-28, 2, 54)$$

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{|(-28, 2, 54)|}{2} = \frac{\sqrt{3704}}{2} u^2$$

b) $\Delta (1/2, -2, 1/4), B(-2, 1/2, -2), C(3/4, -1, 1/4)$

Formamos los vectores

$$\vec{AB} = (-5/2, 5/2, 9/4)$$

$$\vec{AC} = (1/4, 1, 1/4)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5/2 & 5/2 & 9/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \end{vmatrix} = \left(\frac{23}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{25}{8} \right)$$

$$\text{Área} = \frac{|(23/8, 1/16, -25/8)|}{2} = \frac{\sqrt{4617}}{2} u^2$$

Ex 81 Calcula el área determinada por el triángulo de vértices $A(1, -3, -2), B(-1, 1, 3)$ y $C(4, 0, 3)$.

Halla la medida de la altura de dicho triángulo que parte del vértice A .

Formamos los vectores

$$\vec{AB} = (-2, 4, 5)$$

$$\vec{AC} = (3, 3, 5)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

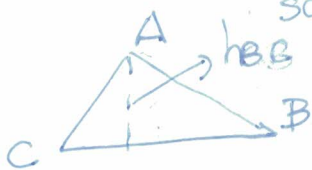
$$\text{Área triángulo} = \frac{|(5, 25, -18)|}{2} = \frac{\sqrt{974}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{974}}{2} u^2$$

Como $\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot h_{BC}}{2} = \frac{\sqrt{974}}{2}$

y como $d(B, C) = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$$\Rightarrow h_{BC} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{974}}{2}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{974}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{487}{13}} u$$



Act 82 | Calcula el volumen del tetraedro

determinado por los vértices $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, 2)$,
 $C(0, 1, 0)$ y $D(1, 1, 1)$.

$$V = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}$$

Producto mixto:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 4 - 6 = -2.$$

$$\vec{AB} = (-1, 3, 0)$$

$$\vec{AC} = (-2, 2, -2)$$

$$\vec{AD} = (-1, 2, -1)$$

$$\Rightarrow V = \frac{|-2|}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} u^3.$$

Act 83 | a) Demuestra que los pts $A(-2, 1, 0)$,
 $B(-2, -1, -1)$, $C(0, -1, 0)$ y $D(1, 2, 2)$

pertenece a un mismo plano (son coplanarios).

Formamos $\vec{AB} = (0, -2, -1)$

$$\vec{AC} = (2, -2, 0)$$

$$\vec{AD} = (3, 1, 2).$$

Comprobamos que
det formado por ellas
es 0.

(o rango $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \neq 3$).

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 8 = 0.$$

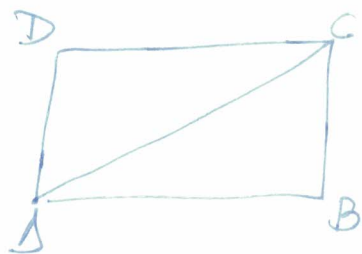
luego son coplanarios.

b) ¿Área del cuadrilátero ΔBCD cuyos vértices son los pto del apartado anterior?

$$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BC} + S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| + \frac{1}{2} |\vec{CD} \times \vec{CA}|$$

↳ triángulos

$$= \sqrt{6} + \sqrt{24} = 3\sqrt{6} \text{ u}^2$$



5] Lugares Geométricos en el plano. Circunferencia

Se llama lugar geométrico del plano al conjunto de pto del plano que verifican una misma propiedad.

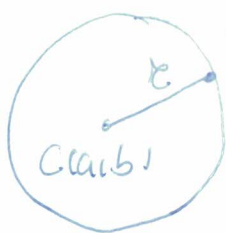
Mediatriz de un segmento ΔB : lugar geométrico de los pto del plano que equidistan de los extremos de Δ y B . Si $P \in \text{mediatriz} \Leftrightarrow d(P, A) = d(P, B)$

ó recta $\perp$ a ΔB que pasa por su pte medio.

Bisectriz de un ángulo determinado por dos rectas: lugar geométrico de los pto del plano que equidistan de las dos rectas. Si $P \in \text{bisectriz}$: $d(P, r) = d(P, s)$

ó recta que pasa por el vértice y divide al áng en 2 partes iguales.

Circunferencia. lugar geométrico de los pto del plano que equidistan de un pto fijo llamado centro. Distancia del centro a un pto de $\odot$ se llama radio.



$P(x,y)$

$$d(P,C) = r.$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Desarrollando las eq. notables $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

donde. $C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$

$$\text{radio } r = \sqrt{\left(-\frac{m}{2}\right)^2 + \left(-\frac{n}{2}\right)^2 - p}.$$

Posición relativa de una recta y una $\odot$.

$\odot$ exterior.

Tangente.

Secante.

Recta tangente a una $\odot$

La recta tangente a una $\odot$ es $\perp$ al radio correspondiente al pto de tangencia.



$P(x_0, y_0)$

r es recta que pasa por $C(a,b)$ y $P(x_0, y_0)$ pto de tangencia.

$\Rightarrow \vec{CP} = (x_0 - a, y_0 - b)$ es el vector director de la recta CP .

$m = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$, como $t \perp$ a esa recta:
 pendiente de la recta CP $m_t \cdot m = -1$

$$m_t = -\frac{1}{m} = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

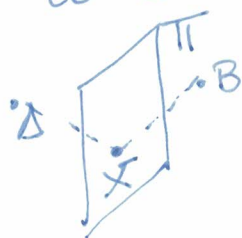
luego, la ec de t :

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b} \cdot (x - x_0)$$

6] Lugares geométricos en el espacio.

Se llama lugar geométrico del espacio al conj. de pto del espacio que verifican una misma propiedad.

Plano mediador: lugar geométrico de los pto del espacio que equidistan de los extremos de un segmento.



$$\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$$

$\Pi \perp \overrightarrow{AB}$, $\Pi \in \Pi$, Π pto medio de A y B .

Plano bisector: lugar geométrico de los pto del espacio que equidistan de los semiplanos que forman el ángulo diedro.

$$\text{dist}(X, \Pi) = \text{dist}(X, \Pi')$$

obs: hay 2 planos bisectores, (nº iguales, o que sean opuestos).