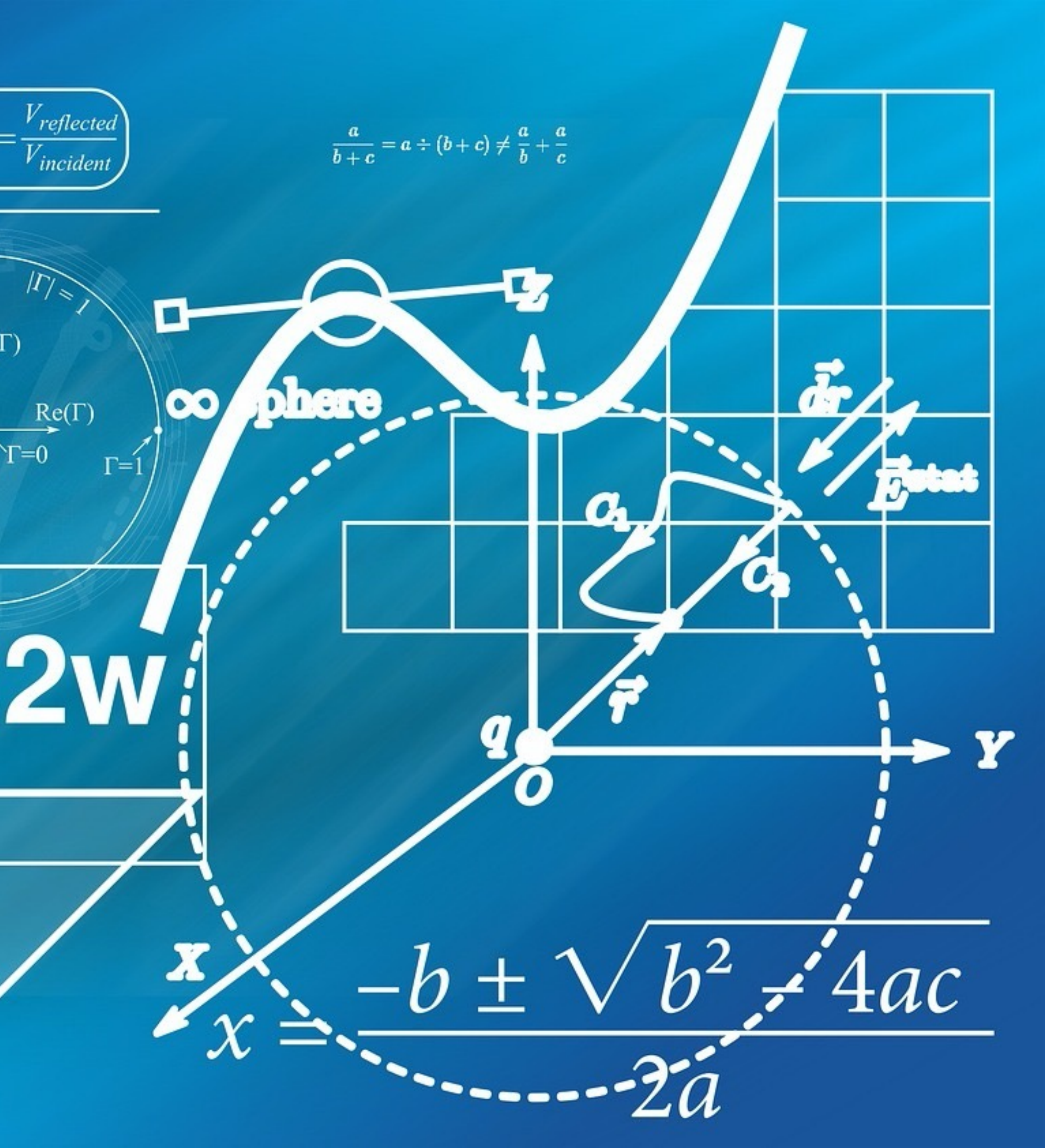


Funciones

Temas 8 y 9

Jon Canca Ruiz

Colegio FEC de Jesús

1. Concepto de Función

- Una función es una relación entre dos magnitudes variables (variables), de tal manera que a cada valor de la primera (variable independiente) le corresponde un único valor de la segunda (variable dependiente o función).
- Es decir, es una relación que permite calcular el valor de una magnitud variable conociendo el valor de la otra.

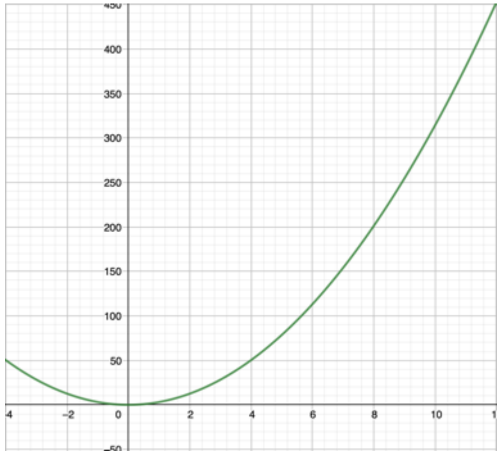
- La **variable independiente**, ***x***, la forman los valores del conjunto inicial que se fijan previamente.
- La **variable dependiente**, ***y***, la forman los valores del conjunto final que se obtienen al aplicar la función a la variable independiente.
- Las funciones se expresan como $y = f(x)$.

Ejemplo:

- El área de un círculo es función de su radio, ya que, si varía el radio, también variará el área.
- Radio: Variable independiente
- Área: Variable dependiente

Radio (cm)	Área (cm^2)
2	12,57
4	50,27
6	113,10
8	201,06
10	314,16

$$f(x) = \pi r^2$$



1. Concepto de Función

Una función puede definirse de varias formas:

- Enunciado
- Tabla
- Gráfica
- Ecuación

Hay que saber interpretar la función en todas su formas

Enunciado:

Un taxista cobra una cuota fija de 3 € por cliente y 0,5 € por cada kilómetro recorrido.

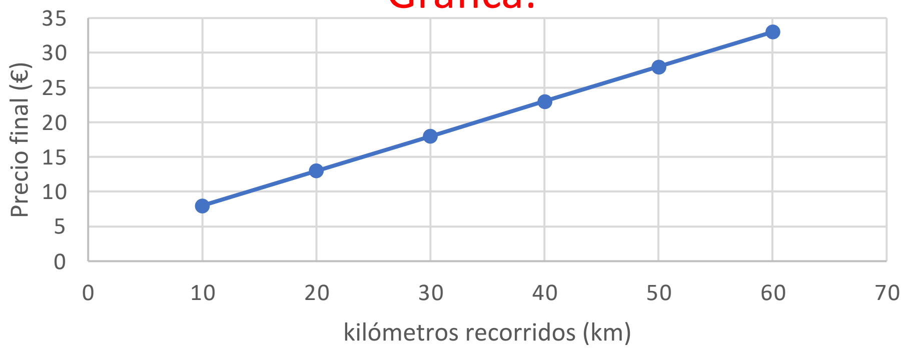
Ecuación:

$$f(x) = 3 + 0{,}5x$$

Tabla:

km	10	20	30	40	50	60
Precio (€)	8	13	18	23	28	33

Gráfica:



1.1. Funciones definidas a trozos

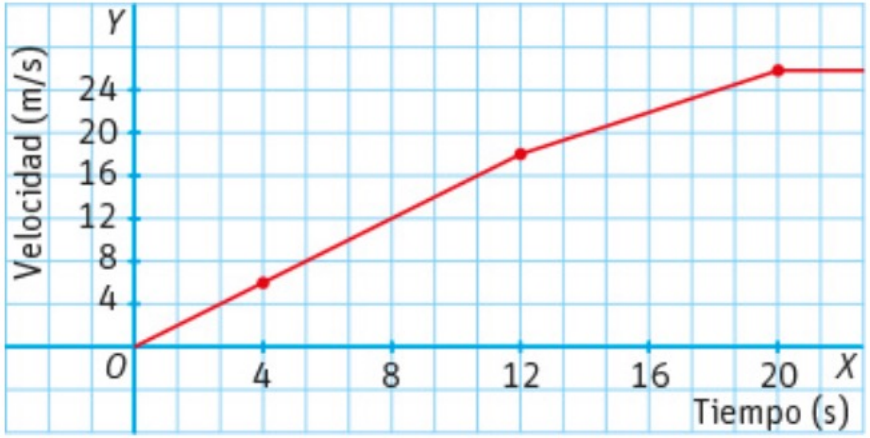
- Una función puede tener diferentes intervalos y cada uno de esos intervalos tiene que definirse algebraicamente.

Según cuál sea el valor de x (la condición) tenemos que usar una u otra función.

$$v(t) = \begin{cases} 1{,}5t & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ t+6 & \text{si } 12 \leq t < 20 \\ 26 & \text{si } t \geq 20 \end{cases}$$

Función

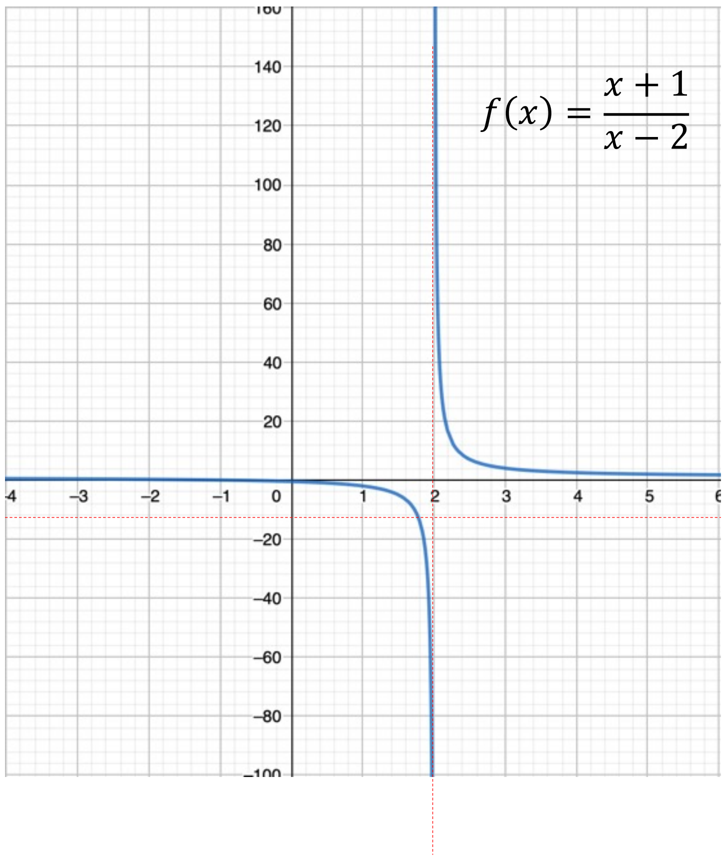
Condición



2. Dominio y recorrido

Dominio:
Conjunto de todos los valores que puede tomar la variable **independiente** (x).

Recorrido:
Conjunto de todos los valores que puede tomar la variable **dependiente** (y).



Dominio D(f):
La función puede tomar todos los valores de ***x*** menos el 2.

- En el gráfico se observa que no existen valores para x=2.
- En la ecuación se puede comprobar viendo el denominador.
  - El denominador no puede tomar el valor 0. El denominador se hacer cero cuando x=2

Recorrido R(f):
La función puede tomar todos los valores ***y*** menos el 1.

- En el gráfico se observa que no existen valores para y=1.
- Se puede comprobar al resolver la ecuación para f(x)=1

$$1=\frac{x+1}{x-2}$$
$$x-2=x+1$$
$$x-x=1+3$$
$$0\neq 4$$

$$D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$R(f)=\mathbb{R}-\{1\}$$

2.1. Cálculo de dominio

Existen dos operaciones que nunca van a estar permitidas:

Dividir entre 0:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

El denominador no puede ser cero

$$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$$

$x = -1$ no puede ser un valor de la función

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

Raíz cuadrada (o índice par) de número negativo:

$$f(x) = \sqrt{x-4}$$

El número dentro de la raíz no puede ser negativo. Igualando a cero, encontramos el límite:

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$D(f) = [4, \infty)$$

3. Características de una función

Una función se caracteriza por los siguientes aspectos.

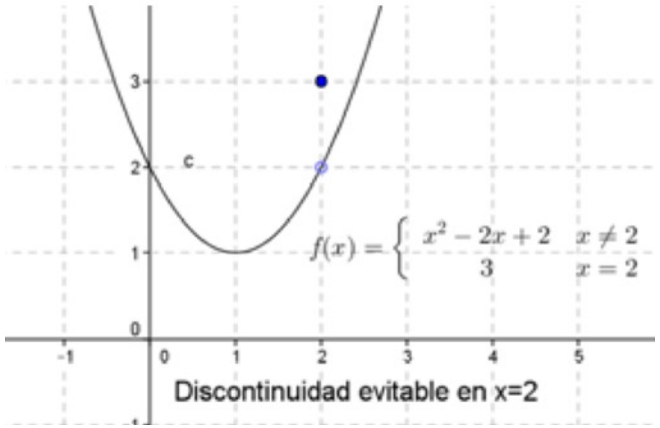
- 3.1. Continuidad
- 3.2. Monotonía
- 3.3. Simetría

3.1. Continuidad

Una función será continua si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel. De lo contrario, será discontinua.

Existen tres tipos de discontinuidad

Evitable

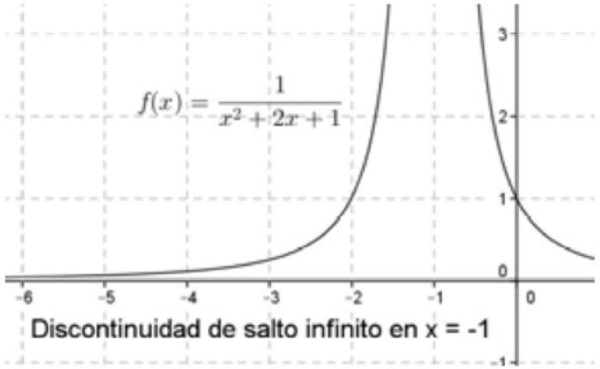


Hay un único punto de la función no está donde debería estar (en este caso x=2).

De salto finito

En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha y a izquierda.

De salto infinito



Igual que en el salto finito hay dos ramas. Pero en este caso una de las ramos (o las dos normalmente) tiende al infinito.

3.2. Monotonía

La monotonía de una función indica la tendencia de dicha función

Constante

Un intervalo será constante si el valor que toma la variable independiente (y) es igual sea cual sea el valor de la variable dependiente (x).

$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$

Esta expresión indica que para dos valores de x (x_1 y x_2, siendo x_1 más pequeño), al sustituir los valores en la función f(x) se obtiene el mismo valor ($f(x_1) = f(x_2)$).

Creciente

Al aumentar el valor de la variable dependiente (x) también aumenta el valor de la variable independiente (y).

$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

Esta expresión indica que los valores de x más altos (x_2) dan lugar a un valor de la función también más altos ($f(x_2)$).

Decreciente

Inversa de la decreciente. A valores de x más altos se obtienen valores de y más bajos

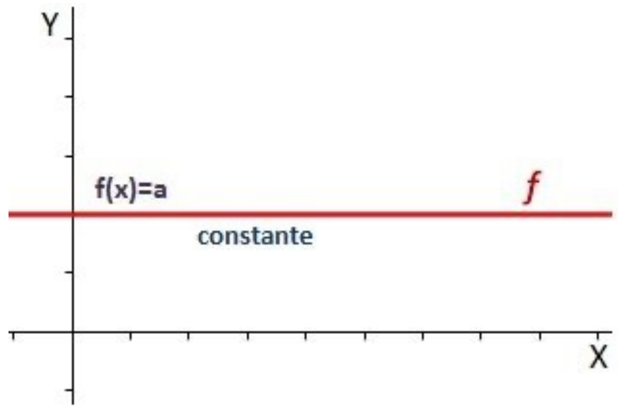
$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Cuando el valor de x se hace más alto, se obtienen valores de f(x) más bajos.

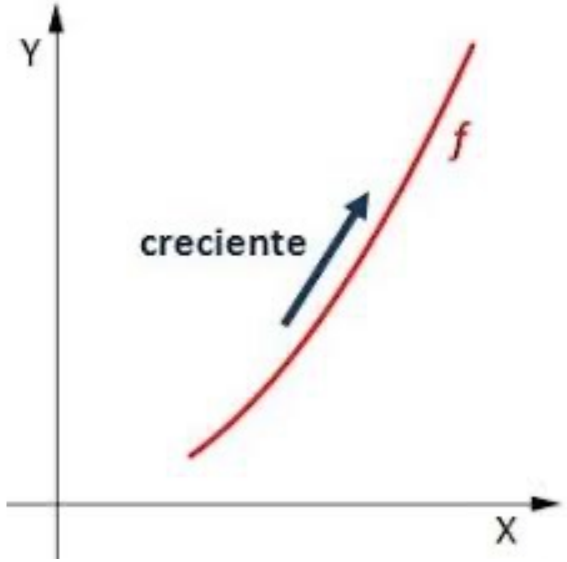
3.2. Monotonía

La monotonía de una función indica la tendencia de dicha función

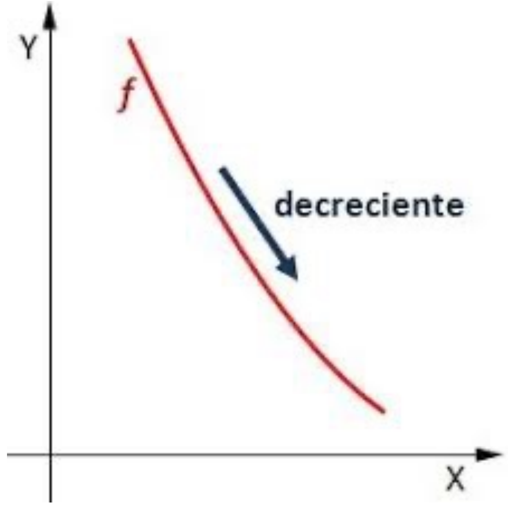
Constante



Creciente



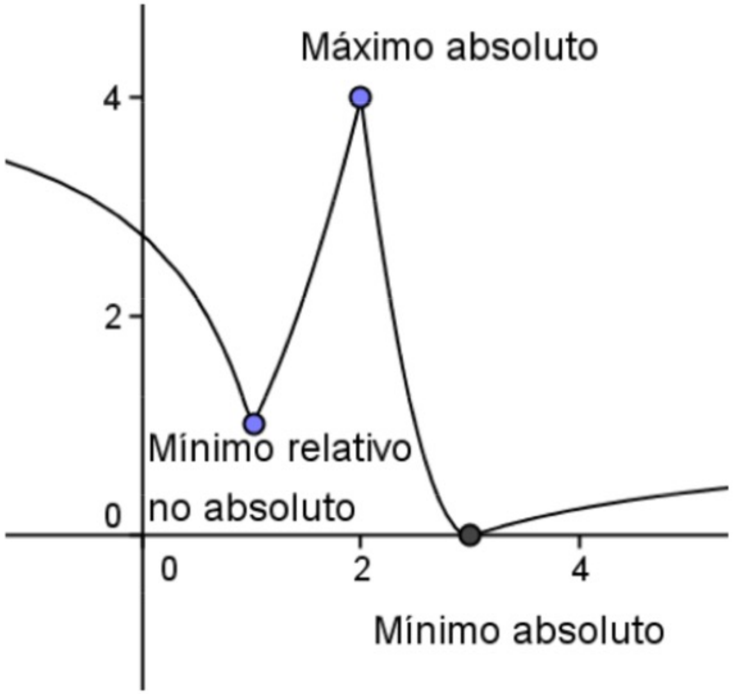
Decreciente



3.2. Monotonía

Los cambios en la monotonía de una función generan máximos y mínimos. Es decir, cuando hay un cambio en la función de creciente a decreciente o viceversa, se genera un máximo o mínimo relativo.

- Si el máximo o el mínimo obtiene el valor de f(x) más alto o más bajo se denomina máximo o mínimo absoluto.



3.3. Simetría

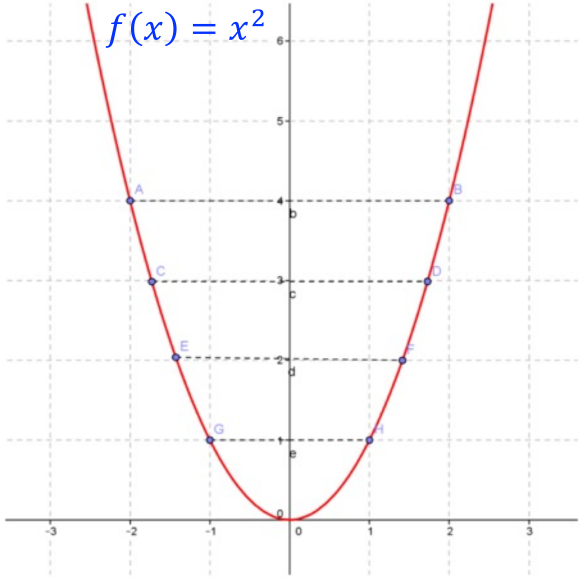
Existen dos posibles simetrías en una función: **par** o **impar**

Función Par

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número y su opuesto:

$$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

Este hecho genera una función simétrica respecto al eje de ordenadas (eje y).

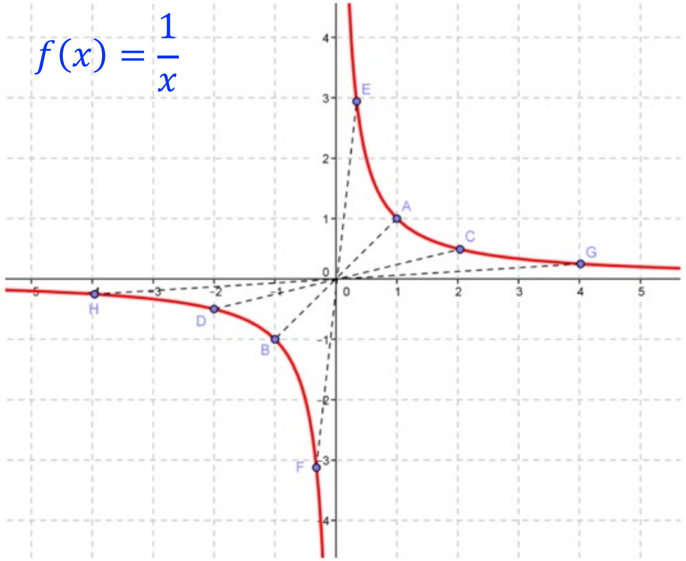


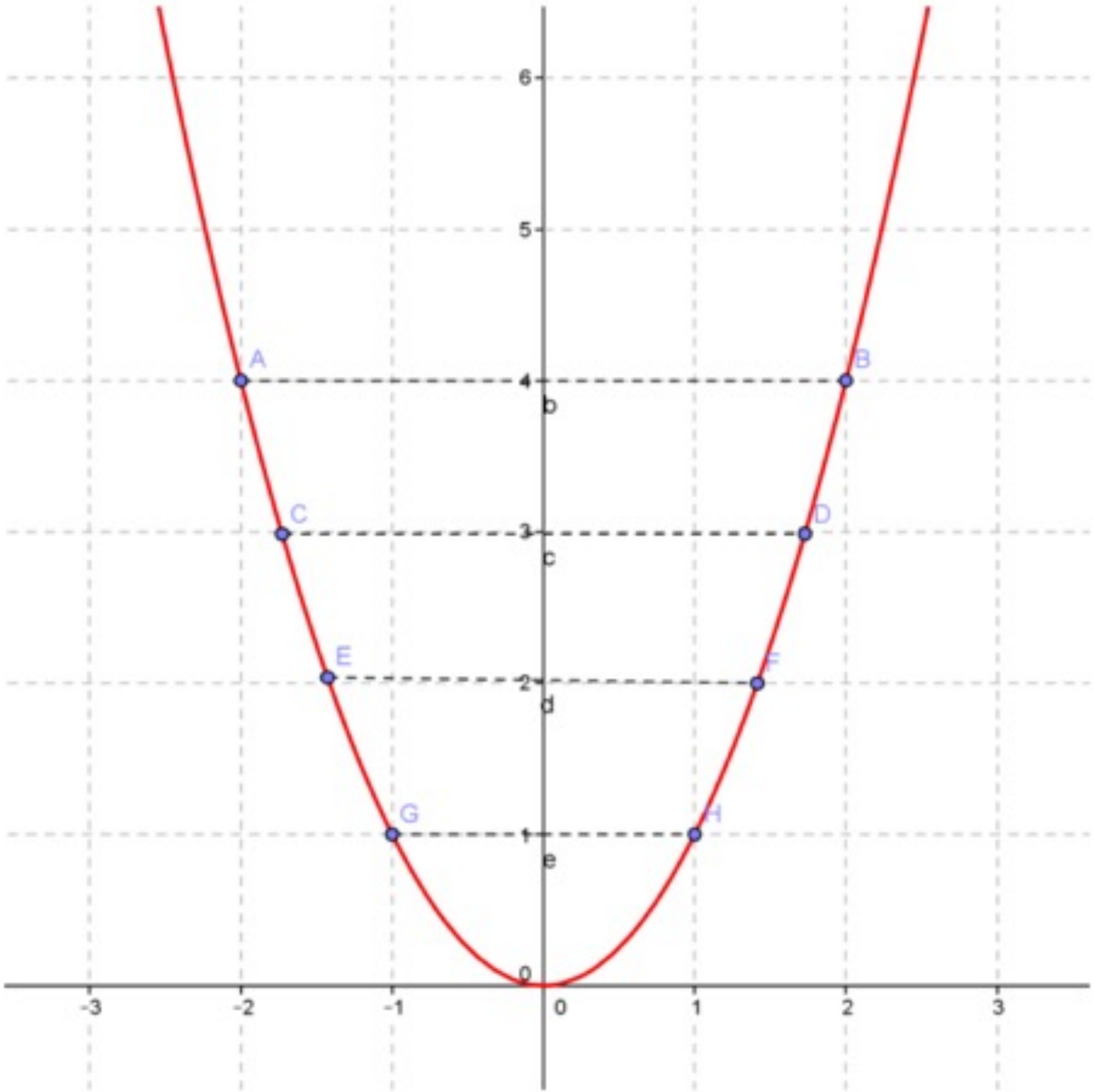
Función Impar

Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número y su opuesto:

$$\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

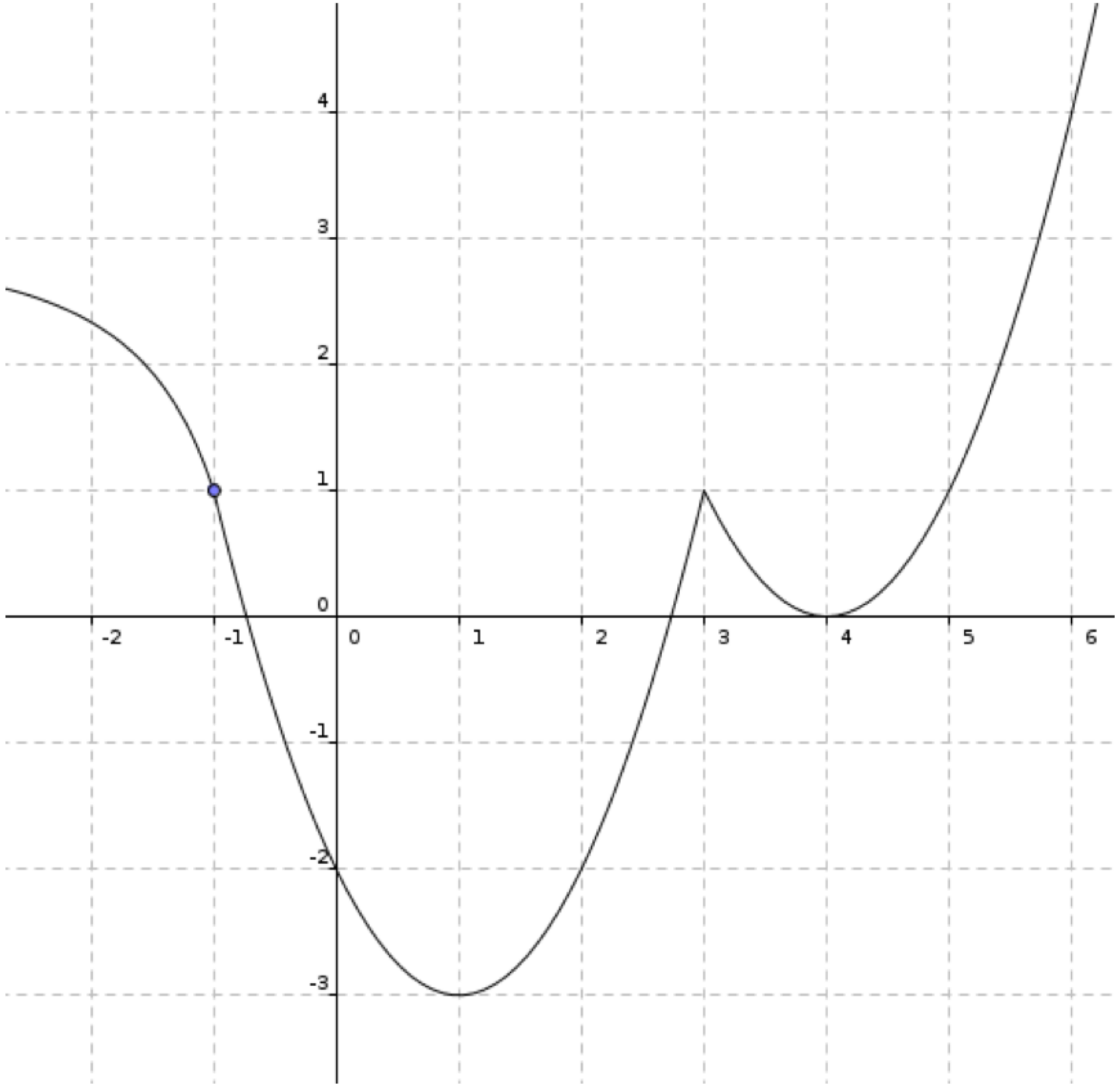
Este hecho genera una simetría con respecto al origen de coordenadas (punto 0,0).




A
B
C
D
E
F
G
H
b
c
d
e
6
5
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

Ejercicios

1. Copia esta función y descríbela lo mejor posible usando las características de las funciones.
    - Continuidad
    - Monotonía
    - Máximos y mínimos
    - Simetría



Ejercicios

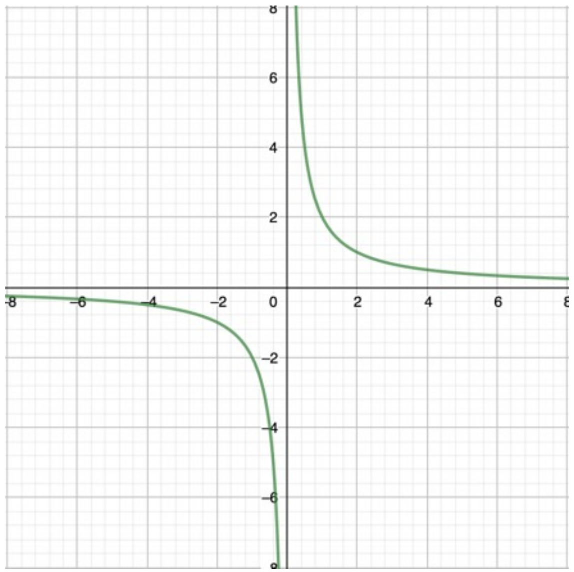
2. Dibuja las siguientes funciones e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

$a)\ \ y = x^3$

$b)\ \ y = x^5$

$c)\ \ y = \frac{1}{x^2}$

3. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



4. Tasa de Variación Media

La **Tasa de Variación Media** es la diferencia de los valores que toma una función en dos puntos concretos [a] y [b]:

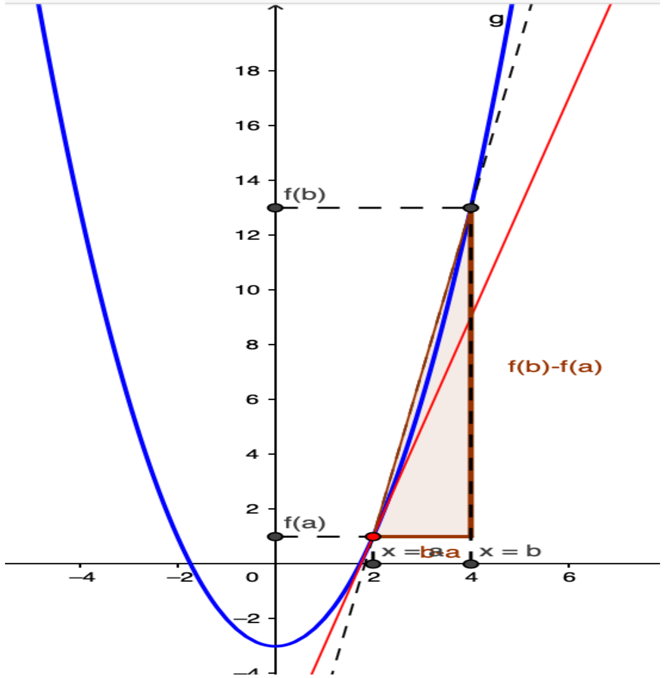
$$TVM\ f[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo

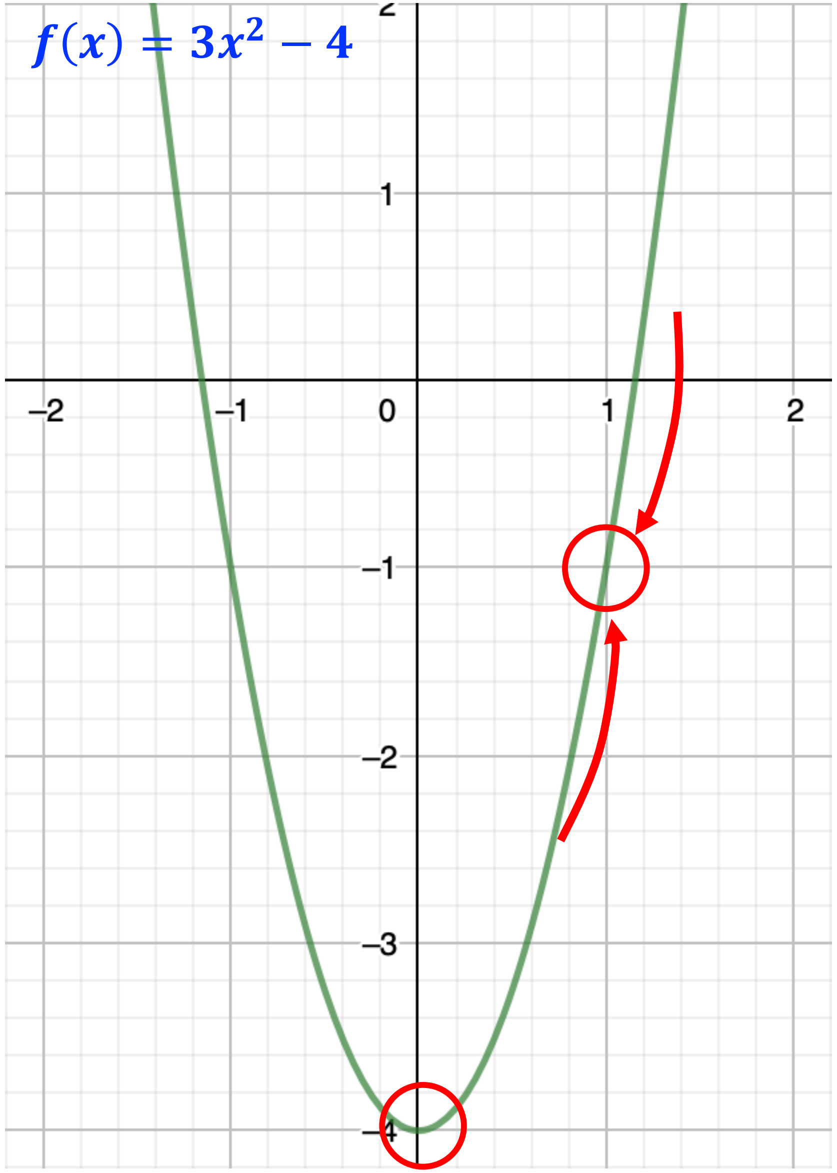
Para la función $f(x) = x^2 - 3$, calcular la TVM en el intervalo x=2 y x=4 (TVM f[2,4])

- $f(2) = 2^2 - 3 = 1$
- $f(4) = 4^2 - 3 = 13$
- $[4] - [2] = 2$

$$TVM\ f[2,4] = \frac{13 - 1}{2} = 6$$



5. Introducción al concepto de límite



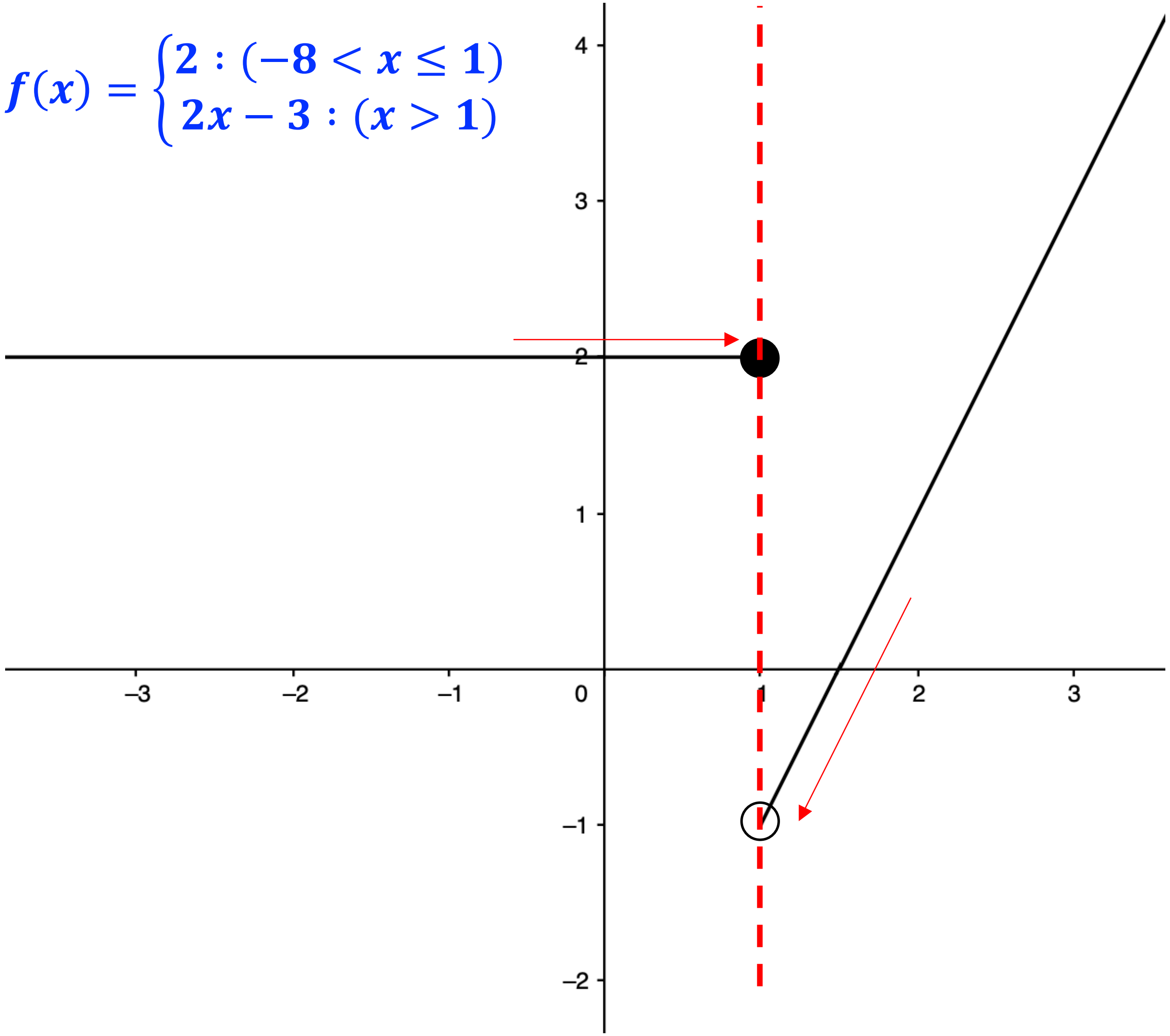
Hasta ahora hemos estudiado el valor que toma una función en un punto concreto:

- En el punto x=0, f(0)=-4
- En el punto x=-1, f(-1)=-1

Sin embargo, matemáticamente también es importante conocer el comportamiento de la función en las proximidades de ese punto.

5. Introducción al concepto de límite

$$f(x) = \begin{cases} 2 : (-8 < x \leq 1) \\ 2x - 3 : (x > 1) \end{cases}$$



La función cuando x=1, tiene un único valor:

- $f(1) = 2$

Los valores cercanos a x=1, dan valores muy distintos:

- Valores muy cercanos, pero menos que 1, dan un valor de 2.
- Valores muy cercanos, pero mayores que 1, dan un valor cercano a -1.

5. Introducción al concepto de límite

Definición:

El límite de una función es aquel valor al que se acerca *y* cuando *x* se acerca a un valor concreto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} x^2 =$$

Valores muy cercanos pero menores:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	➞	2
f(x)	3,61	3,96	3,996	3,9996	➞	4

Valores muy cercanos pero mayores:

x	2,1	2,01	2,001	2,0001	➞	2
f(x)	4,41	4,04	4,004	4,0004	➞	4

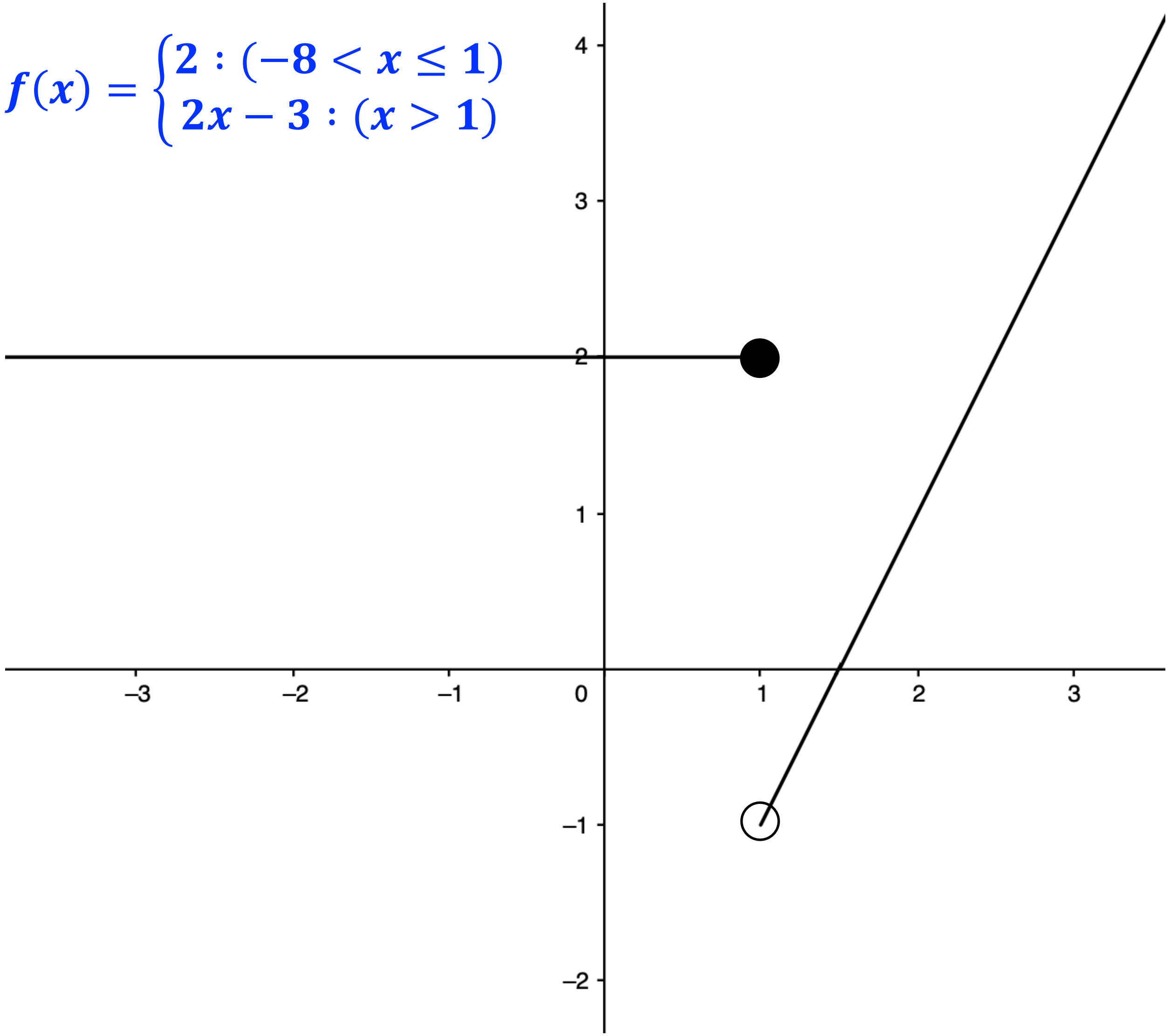
5.2. Cálculo de Límites en un punto

$$\lim_{x \to 2} 2x^2 - 3 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

5.2. Límites laterales

$$f(x) = \begin{cases} 2 : (-8 < x \leq 1) \\ 2x - 3 : (x > 1) \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

Como los dos límites son distintos, no existe:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$$

5.3. Límites en el infinito

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^2} =$$

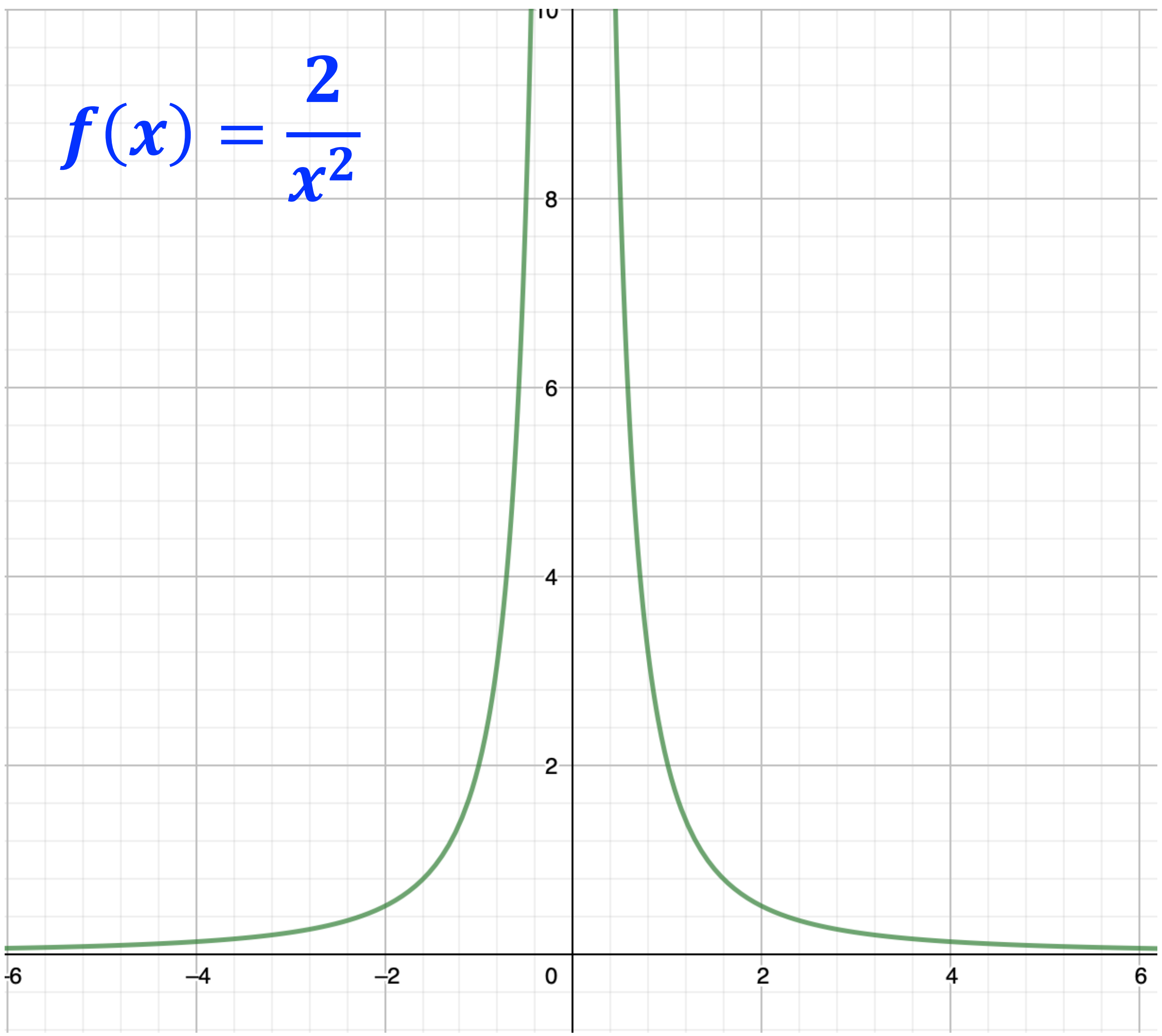
Valores muy cercanos pero menores:

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	➞	0
f(x)	200	20000	3,996	2000000	➞	∞

Valores muy cercanos pero mayores:

x	0,1	0,01	0,001	0,00001	➞	0
f(x)	200	20000	3,996	2000000	➞	∞

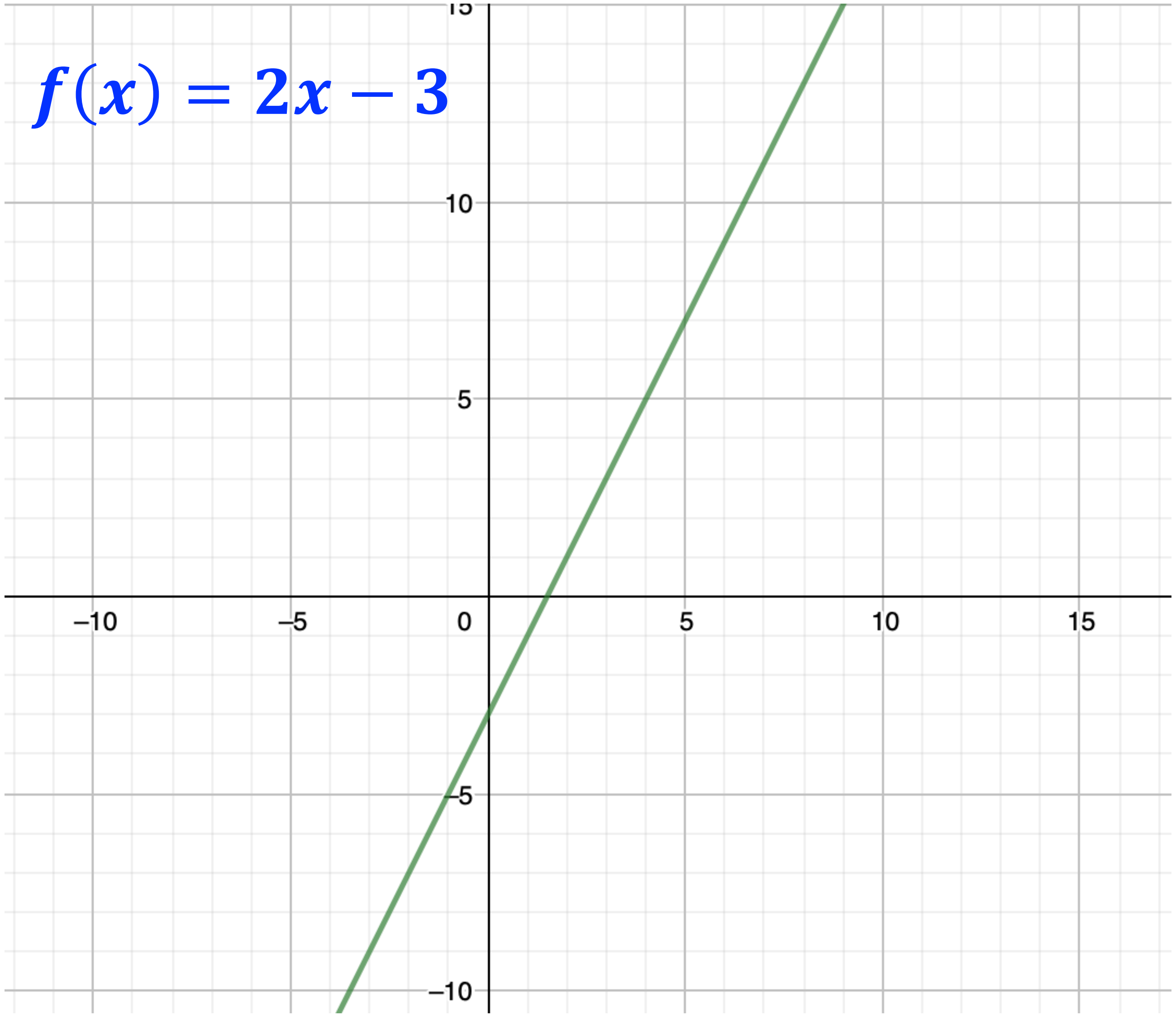
5.3. Límites en el infinito



$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^2} = \infty$$

5.4. Límites que tienden al infinito



$$\lim_{x \to \infty} 2x - 3 = \infty$$

5.5. Ejercicios

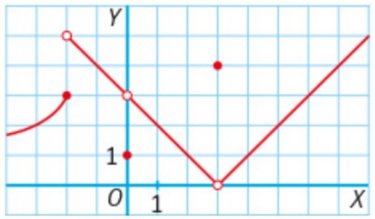
1 Calcula el límite de las funciones en los valores indicados. (●○○)

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, para $x = 3$ y $x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$, para $x = 0$ y $x = 4$

3 Calcula los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 e indica si existe el límite en ese punto. (●○○)

4 A partir de la gráfica de $f(x)$, indica el valor de la función, los límites laterales y el límite si existe en: (●○○)



a) $x = -2$

b) $x = 0$

5.5. Ejercicios

7 Halla el valor de los siguientes límites. (●○○)

a) $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^2 - 2}{2 - x} \right)$

b) $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^2 - 4}{2 - x} \right)$

8 Calcula los siguientes límites de funciones. (●○○)

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x + 1}{5 + x} \right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2 - x}{2x^2 + 1} \right)$