Solución a los problemas 1, 3 y 8 (hechos en clase) de la página 368 del libro de texto, para los alumnos de 2 de Bachillerato A del I. E. S. Mateo Alemán de Alcalá de Henares.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Ejercicio 1. La duración media de los ramos de flores puestos en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar a una distribución normal de desviación típica 10 horas. Se toma una muestra de doce ramos de ess flores y se obtienen las siguientes duraciones en horas:

$$64,\ 58,\ 72,\ 66,\ 84,\ 50,\ 62,\ 74,\ 86,\ 52,\ 76,\ 62$$

Halla el intervalo de confianza al 99% para la duración media de los ramos de flores.

Solución:

Sea X la variable aleatoria:

$$X = \text{“Duración de los ramos de flores”}$$

X sigue una distribución normal de media desconocida μ (que vamos a estimar por medio de un intervalo de confianza) y desviación típica $\sigma = 10$. Esto se expresa matemáticamente como:

$$X \sim N(\mu, 10)$$

La expresión de un intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En nuestro caso:

- $n = 12$ (que es el número de datos, número de ramos de la muestra)
- $\bar{x} = \dfrac{64 + 58 + 72 + 66 + 84 + 50 + 62 + 74 + 86 + 52 + 76 + 62}{12} = 67.16666$ (que es la media de los datos
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el **valor crítico**.

  Vamos a calcular este valor crítico.

  Como nos piden calcular un intervalo con una confianza del 95% tenemos:

  $$1 - \alpha = \frac{99}{100} = 0.99$$

  por lo que

$$\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$$

Así:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

y

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005}$$

Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ hay que recordar la fórmula:

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

De donde

$$P\left(Z \leq z_{0.005}\right) = 1 - 0.005 = 0.9950$$

Buscando en la tabla de la normal $N(0,1)$ de la página 343 del libro, aparece que 0.9950 corresponde a 1.96, por lo que:

$$z_{0.005} = 2.575$$

Sustituyendo ahora estos valores en la fórmula del intervalo de confianza obtenemos:

$$\left(67.16666 - 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{12}}, \quad 67.16666 + 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{12}}\right)$$

Y ahora, operando:

$$\begin{aligned}\left(67.16666 - 2.575 \cdot \frac{10}{3.464102}, \quad 67.16666 + 2.575 \cdot \frac{10}{3.464102}\right) &= \\ (67.16666 - 2.575 \cdot 2.886751, \quad 67.16666 + 2.575 \cdot 2.886751) &= \\ (67.16666 - 7.433384, \quad 67.16666 + 7.433384) &= \\ (59.73328, \quad 74.60004)\end{aligned}$$

Es decir:

$$(59.73, \quad 74.60)$$

y el significado que tiene es:

La duración media de los ramos puestos en un jarrón se encuentra entre 59.73 horas y 74.60 horas con un 99% de confianza.

Ejercicio 3. La estatura media de los niños de diez años en España es de 135 *cm* con una desviación típica de 8 *cm*. Halla el tamaño de la muestra necesario para que el intervalo de confianza al 95% en el que se encuentra la media poblacional tenga una amplitud de 2 *cm*.

Solución:

Sea X la variable aleatoria:

$$X = \text{“Estatura de los niños de diez años en España”}$$

X sigue una distribución normal de media $\mu = 135$ y desviación típica $\sigma = 8$. Esto se expresa matemáticamente como:

$$X \sim N(135, 3)$$

La expresión del tamaño de la muestra para la media es (página 356):

$$n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \sigma^2}{E^2}$$

En nuestro caso:

- $\sigma = 8$ (que es la desviación típica).
- $E = 2$ (que es la mitad del intervalo, una cota del error cometido).
- $1 - \alpha = 0.95$, luego el valor crítico es $z_{0.025} = 1.95$

  Nos piden calcular n.

  Sustituyendo los datos en la expresión de n obtenemos:

  $$n = \frac{(1.95)^2 \cdot 8^2}{2^2}$$

  y operando:

  $$n = 60.84$$

  Luego $n \geq 61$ y hay que tomar una muestra de, al menos, 61 niños.

Ejercicio 8. Un hospital hace un estudio sobre la relación entre entre enfermo de cáncer de pulmón y fumador. Obtiene que de 121 enfermos de cáncer de pulmón 42 eran fumadores de la . Halla el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 98%. Se sabe que esta proporción en la población es del 30%. ¿Esta proporción está incluida en el intervalo anterior?

Solución:

$$p = \text{“Proporción de enfermos con cáncer de pulmón que son fumadores}$$

Sea $\hat{p}$ la proporción muestral.

La expresión de un intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

En nuestro caso:

- $\widehat{p} = \frac{42}{121} = 0.347$ (que es la proporción en la muestra).
- $n = 121$ (que es el tamaño de la muestra).
- $1-\alpha = 0.98$, $\alpha = 0.02$ y $\frac{\alpha}{2} = 0.01$ luego el valor crítico es $z_{0.01} = 2.325$

Sustituyendo los datos en la expresión del intervalo de confianza obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left(0.347 - 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.347\cdot(1-0.347)}{121}}, \quad 0.347 + 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.347\cdot(1-0.347)}{121}}\right)\\
&= (0.347 - 2.325 \cdot 0.0432, \quad 0.347 + 2.325 \cdot 0.0432)\\
&= (0.347 - 0.10044, \quad 0.347 + 0.10044)\\
&= (0.24656, \quad 0.44744)
\end{aligned}$$

Por lo que el intervalo de confianza es

$$(0.25,\ 0.48)$$

En cuanto a la pregunta de si la proporción poblacional $p = 0.30$ (30%) se encuentra en el intervalo anterior, la respuesta es que sí, ya que $0.25 < 0.30 < 0.48$.