TEMA 52: PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES. PRODUCTO VECTORIAL Y PRODUCTO MIXTO. APLICACIONES A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS FÍSICOS Y GEOMÉTRICOS.

TIEMPO: 81 — 81

Esquema

1) Introducción

    1.1) Klein y su programa

2 Producto escalar

    2.1) Def: producto escalar + propiedades + matriz del producto escalar

    2.2) Def: norma + propiedades + Def: coseno

    2.3) Interpretación geométrica

    2.4) Def: aplicación ortogonal + proposición + grupo ortogonal

    2.5) Proceso de ortogonalización de Gram-Schimdt

3) Producto vectorial

    3.1) Definición 1 + propiedades

    3.2) Definición 2 + propiedades

4) Producto mixto

    4.1) Definición

    4.2) Expresión matricial

    4.3) Propiedades

5) Aplicaciones

    5.1) Aplicaciones geométricas

        5.1.1) Áreas de polígonos

        5.1.2) Volúmenes de poliedros convexos: paralelepípedo + tetraedro

    5.2) Aplicaciones a la Física

        5.2.1) Momento central

        5.2.2) Brazo + propiedades

1) Introducción:

▷ Klein y su programa: el matemático alemán Felix Klein (ss.XIX-XX) ejerció una decisiva influencia en el posterior desarrollo de la Geometría mediante el conocido “programa de Erlangen”, ciudad donde era profesor de Matemáticas.
En dicho programa se describía un proyecto de unificación de las Matemáticas en términos de la Teoría de Grupos, proponiéndose la concepción de cada una de las distintas geometrías como esencialmente constituidas por la teoría de los invariantes según un grupo particular de transformaciones. Fue el primer matemático en poner de manifiesto las ventajas de un estudio secuencial de la Geometría, de forma que se partiese de las propiedades proyectivas[1] para seguir con las afines y, por último, con las métricas siendo la base común el espacio vectorial.

▷ En este tema daremos las herramientas adecuadas para estudiar las propiedades métricas del plano y del espacio. Se trabajarán por tanto con el producto escalar, el producto vectorial y el producto mixto que, como consecuencia, nos determinarán la norma, perpendicularidad, ángulos, áreas, volúmenes y distancias.

[1] El plano o espacio proyectivo pueden considerarse como una generalización del plano o del espacio intuitivos mediante la inclusión de los llamados puntos impropios o del infinito

2) Producto escalar:

▷ Sea V un espacio vectorial bidimensional sobre $\mathbb{R}$.

▷ **Definición**: dados $a, b \in V$ llamamos producto escalar de "a" y "b" y lo notaremos por "$a \cdot b$" a cualquier aplicación $f : v \times V \longmapsto \mathbb{R}$ cumpliendo las siguientes propiedades:

1) $\forall a \in V$ con $a \neq \overrightarrow{0}$, $a \cdot a > 0$
2) $\forall a, b \in V$, $a \cdot b = b \cdot a$
3) $\forall a, b, c \in V$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$
4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in V$, $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

Es decir, el producto escalar es una forma bilineal simétrica, no degenerada y positiva.

▷ **Propiedades**:

1) $a \cdot a = 0 \longleftrightarrow a = \overrightarrow{0}$

   Proof. $\Rightarrow$: primera propiedad
   $\Leftarrow$: $a \cdot a = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} = 2\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} \longrightarrow \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} = a \cdot a = 0$ □

2) $a \cdot \overrightarrow{0} = 0$, $\forall a \in V$

   Proof. $a \cdot \overrightarrow{0} = a \cdot (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = 2a \cdot \overrightarrow{0} \longrightarrow a \cdot \overrightarrow{0} = 0$ □

3) $\forall a, b, c \in V$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

   Proof. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b = b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$ □

4) $(a \cdot b)\lambda = \lambda(b \cdot a)$, $\forall a, b \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

   Proof. Por ser conmutativo el producto el producto de números y que $a \cdot b = b \cdot a$

   □

▷ Sea $B = \{v_|, v_2\}$ base de V. Entonces: $a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$; $b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ y por la definición de producto escalar:
$a \cdot b = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ constituye la expresión analítica del producto escalar.

▷ **Definición**: a la matriz simétrica definida arriba se la conoce como la matriz del producto escalar.

▷ **Definición**: decimos que una base es ortonormal/métrica cuando la matriz del producto escalar es la matriz identidad: $\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

▷ **Definición**: al par $(V(\mathbb{R}^2), \cdot)$ lo llamaremos plano vectorial euclídeo y lo notaremos por E^2.

▷ **Definición**: llamamos norma del vector $a \in E^2$ al número real $||a|| = +\sqrt{a \cdot a}$. Al par $(V, ||\cdot||)$ lo llamamos plano normado.

▷ **Propiedades**:

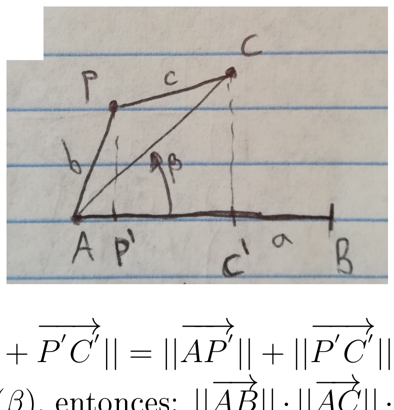
1) $||a|| = 0 \longleftrightarrow a = \overrightarrow{0}$. Lo que implica que $||a|| > 0$, $\forall a \in E^2$, $a \neq \overrightarrow{0}$
2) $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||$, $\forall a \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
3) $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$, $\forall a, b \in E^2$ (Desigualdad de Schwartz).
4) $(a \cdot b)^2 \leq (a \cdot a)(b \cdot b) = ||a|| \cdot ||b||$
5) Desigualdad triangular o de Minkowski: $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$, $\forall a, b \in E^2$

▷ Si $a, b \neq \overrightarrow{0}$, la desigualdad de Schwartz nos dice que $-1 \leq \dfrac{a \cdot b}{||a|| \cdot ||b||} \leq +1$ y esto motiva la siguiente definición:

▷ **Definición**: definimos el coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ como el número real: $\cos(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{||a|| \cdot ||b||}$

▷ **Proposición**: si definimos $a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos(a, b)$ obtenemos el mismo producto escalar que definimos anteriormente.

Proof. Propiedad 1: $\forall a \in V$, $a \neq \overrightarrow{0}$, $a \cdot a = ||a|| \cdot ||a|| \cdot \cos(a, a) = ||a||^2 > 0$
Propiedad 2: $\forall a, b \in V$, $a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos(a, b) = ||b|| \cdot ||a|| \cdot \cos(b, a) = b \cdot a$
Propiedad 3: $\forall a, b, c \in V$, veamos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'C'}$, luego $||\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'C'}|| = ||\overrightarrow{AP'}|| + ||\overrightarrow{P'C'}||$
Por otro lado, $||\overrightarrow{AC'}|| = ||\overrightarrow{AC}|| \cdot \cos(\beta)$, entonces: $||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cdot \cos(\beta)$ y esto nos dice que podemos expresar el producto escalar como: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC'}||$ resultado que nos da la interpretación geométrica del producto escalar: "el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él". Aplicando esto tenemos que:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC'}|| = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'C'}|| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PC}$
Entonces, tenemos que:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PC} \longrightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Propiedad 4: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in V$ veamos que $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$
Sea $\lambda > 0$: $(\lambda a) \cdot b = ||\lambda a|| \cdot ||b|| \cdot \cos(\lambda a, b) = |\lambda| \cdot ||a|| \cdot ||b|| \cos(a, b) = \lambda(a \cdot b)$.
Sea $\lambda < 0$: $(\lambda a)b = |\lambda| \cdot ||a|| \cdot ||b|| \cos(\lambda a, b) = -\lambda \cdot ||a|| \cdot ||b|| \cdot (-\cos(a, b)) = \lambda \cdot ||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos(a, b) = \lambda(a \cdot b)$

□

▷ **Definición**: sea $f : E^2 \longmapsto E^2$ endomorfismo (i.e., $f(a+b) = f(a) + f(b)$; $f(\lambda b) = \lambda f(b)$) que además cumple que $f(a) \cdot f(b) = a \cdot b$. Diremos que se trata de una aplicación ortogonal, es decir, un endomorfismo que conserva el producto escalar. Al conjunto de aplicaciones ortogonales de E^n en E^n lo llamaremos $A_o(E^n)$.

▷ **Definición**: diremos que $a, b \in V$ son ortogonales/perpendiculares entre sí cuando: $a \cdot b = 0$. Si ambos son $\neq \overrightarrow{0}$ quiere decir que el ángulo$(a, b) = \dfrac{\pi}{2}$

▷ **Proposición**: la condición $f(a) \cdot f(b) = a \cdot b$ equivale a que $||f(a)|| = ||a||$

Proof. $\Rightarrow$: si $a = b$, $f(a) \cdot f(a) = a \cdot a$, pero como $||f(a) = \sqrt{f(a) \cdot f(a)} = \sqrt{a \cdot a} = ||a|| \longrightarrow ||f(a)||^2 = ||a||^2 \longleftrightarrow ||f(a)|| = ||a||$
$\Leftarrow$: $\forall x, y \in E^2$, se tiene que $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2x \cdot y$. Entonces:
$f(a) \cdot f(b) = \dfrac{1}{2}\Big(||f(a) + f(b)||^2 - ||f(a)||^2 - ||f(b)||^2\Big)$ y al ser "f" homomorfismo y conservar la norma por hipótesis:
$f(a) \cdot f(b) = \dfrac{1}{2}\Big(||a + b||^2 - ||a||^2 - ||b||^2\Big) = a \cdot b$

□

▷ Por otro lado, estos endomorfismos son biyectivos. Sólo hay que probar la inyectividad: $a \in \mathrm{Ker}(f) \longleftrightarrow f(a) = \overrightarrow{0} \longrightarrow ||f(a)|| = ||\overrightarrow{0}|| = 0 \longleftrightarrow$ como $||f(a)|| = ||a||$, tenemos que $||a|| = 0 \longrightarrow a = \overrightarrow{0}$. Si añadimos a $A_o(E^n)$ la composición de funciones y teniendo en cuenta que son automorfismos, obtenemos lo siguiente:

▷ **Definición**: $(A_o(E^n), \circ)$ es el llamado grupo ortogonal de E^n.

▷ **Proposición**: $f : E^n \longmapsto E^n$ es ortogonal $\longleftrightarrow f(\{\text{base ortonormal}\}) = \{\text{base ortonormal}\}$.

▷ **Proceso de ortogonalización de Gram-Schimdt**: dado un conjunto de vectores linealmente independientes $\{u_1, u_2, \ldots, v_n\}$, se puede a partir de ellos formar un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormales dos a dos que generen el mismo espacio que los primeros. Estudiamos el caso de E^3 y fabricamos una base ortogonal a partir de otra dada y se generaliza sin problemas. Para que sea ortonormal la base no hay más que dividir cada vector por su norma (que será $\neq 0$).

▷ Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y tomemos $v_1 = u_1$. Buscamos v_2 linealmente dependiente de v_1 y u_2 y que sea linealmente independiente de v_1 y ortogonal a éste:
$$\begin{cases} v_2 = u_2 + \lambda_{21} \cdot v_1 \\ v_2 \cdot v_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow (u_2 + \lambda_{21} v_1) \cdot v_1 = 0 \longrightarrow u_2 \cdot v_1 + \lambda_{21} v_1 \cdot v_1 = 0 \longrightarrow \lambda_{21} = -\frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$$

3) Producto vectorial:

▷ Vamos a estudiar ahora una operación interna en el espacio vectorial $V = V(\mathbb{R}^3)$ conocida como producto vectorial y que es muy utilizada tanto en Matemáticas como en Física.

▷ **Definición**: llamaremos producto vectorial de $a, b \in V$ y que notaremos por $a \times b$ o $a \wedge b$ a una aplicación $f : V \times V \longmapsto V$ que cumple:

1) Tiene por módulo: $||a \times b|| = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \sin(a, b)$
2) La dirección es perpendicular a ambos, es decir, es perpendicular al plano $\Pi =< a, b >$
3) El sentido es el del avance del sacacorchos que gira de "a" hacia "b" siguiendo el camino más corto. Condición equivalente: el signo del $\det(a, b,) =$ signo del $\det(e_1, e_2, e_3)$ con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de V.

▷ **Propiedades**:

1) Si a y b son linealmente dependientes $\longrightarrow a \times b = \overrightarrow{0}$
2) $\forall a, b \in V$, $a \times b = -b \times a$
3) $\forall a, b \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
4) $\forall a, b, c \in V$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

▷ Dados dos vectores $a, b \in V$ referidos a la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ los podemos expresar como $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ y $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$

▷ **Definición**: llamamos producto vectorial de $a, b \in V$ al siguiente vector:
$a \times b = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$, donde este último determinante tiene sentido como notación abreviada (pues los e_j son vectores mientras que α_j y β_j son números).

▷ **Proposición**: ambas definiciones son equivalentes.

Proof. De la segunda definición: $||a \times b||^2 = ||a||^2 \cdot ||b||^2 - (a \cdot b)^2$ se hacen las cuentas y se comprueba que coinciden. Veamos las tres propiedades:
1) $||a \times b||^2 = ||a||^2 \cdot ||b||^2 - (a \cdot b)^2 = ||a||^2 \cdot ||b||^2 - ||a||^2 \cdot ||b||^2 \cdot \cos^2(a, b) = ||a||^2 \cdot ||b||^2 \cdot \sin^2(a, b)$ y tomamos raíces cuadradas.
2) $a \cdot (a \times b) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)\Big(e_1 \Big| \cdot \Big| - e_2 \Big| \cdot \Big| + e_3 \Big| \cdot \Big|\Big) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$. De forma análoga se prueba que $b \cdot (a \times b) = 0$.
3) Si $\det(e_1, e_2, e_3) = 1 > 0$, $\det(a, b, a \times b) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots \\ \beta_1 & \cdots \\ \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} & \cdots \end{vmatrix}$. Desarrollamos y nos sale que es igual a: $\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \Big| \cdot \Big|^2 + \Big| \cdot \Big|^2 > 0$ □

4) Producto mixto:

▷ **Definición**: dados tres vectores $a, b, c \in V = V(\mathbb{R}^3)$, llamamos producto mixto de dichos vectores al producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos. Lo notamos por $[a, b, c] = a \cdot (b \times c)$ y $[\,,\,,\,] : V \times V \times V \longmapsto \mathbb{R}$.

▷ Sea la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ y los vectores a, b, c referidos a dicha base: $a = \sum \alpha_j e_j$, $b = \sum \beta_j e_j$, $c = \sum \gamma_j e_j$ con $j = 1, 2, 3$. Entonces:

$$[a, b, c] = a \cdot (b \times c) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)\left(\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} e_3 \right) =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \cdot \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \cdot \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = [a, b, c]$$

Esta expresión matricial nos va a permitir deducir las propiedades del producto mixto.

▷ **Propiedades**:

1) Si alguno de los vectores es cero, el producto mixto es cero.

2) Si el producto mixto es cero quiere decir que los vectores son linealmente dependientes.

3) $[a, b, c] = [c, a, b] = [b, c, a] = -[b, a, c] = -[a, c, b] = -[c, b, a]$

4) $[\lambda a, b, c] = [a, \lambda b, c] = [a, b, \lambda c] = \lambda [a, b, c]$

5) $[\lambda a, \beta b, \gamma c] = \lambda \beta \gamma [a, b, c]$

6) $[a + \hat{a}, b, c] = [a, b, c] + [\hat{a}, b, c]$

7) $[a, b + \hat{b}, c] = [a, b, c] + [a, \hat{b}, c]$

8) $[a, b, c + \hat{c}] = [a, b, c] + [a, b, \hat{c}]$

5) Aplicaciones:

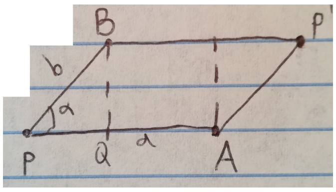
$\triangleright$ Sea $V = V(\mathbb{R}^3)$

$\triangleright$ **Aplicaciones geométricas**: ya vimos la interpretación geométrica del producto escalar. Veamos ahora las diferentes interpretaciones de los otros productos.

$\triangleright$ **Áreas de polígonos**: sean dos vectores libres $a, b \in V$ (si $a, b \in V(\mathbb{R}^2)$ añadimos un cero como tercera coordenada). Tomemos dos representantes de los mismos con origen en P: $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ respectivamente. De esta forma, los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ determinan un paralelogramo donde $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{BP'}$ tienen la misma longitud, al igual que $\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{AP'}$.
El área de $AP'BP$ viene dada por $||\overrightarrow{AP}|| \cdot ||\overrightarrow{BQ}||$ y $||\overrightarrow{BQ}|| = ||\overrightarrow{PB}|| \cdot \sin(a, b)$, luego:

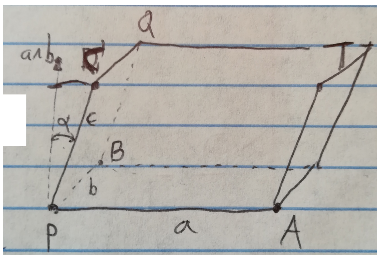
$$S = ||\overrightarrow{AP}|| \cdot ||\overrightarrow{PB}|| \cdot \sin(a, b) = ||a \times b||$$

Esto se resume en: "el módulo del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo determinado por ambos vectores".



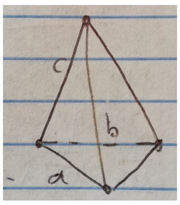
$\triangleright$ **Volúmenes de poliedros convexos**: sean tres vectores libres $a, b, c \in V$ y tomemos representantes $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ con origen en P. Los tres vectores forman un paralelepípedo.
El volumen del paralelepípedo es el área de la base por la altura. La base es un paralelogramo de área $||a \times b||$ y la altura es $||c|| \cos(\alpha)$, luego:

$$V = ||a \times b|| \cdot ||c|| \cos(\alpha) = |(a \times b) \cdot c| = |c \cdot (a \times b)| = |[c, a, b]| = |[a, b, c]|$$



$\triangleright$ Sea un tetraedro determinado por los vectores a, b, c. Al ser el volumen de un tetraedro un tercio del área de su base por la altura y dado que el área de su base por la altura es la mitad del volumen del paralelepípedo engendrado por esos tres vectores se tiene que:

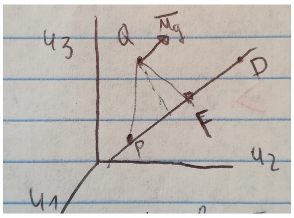
$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}|[c, a, b]|\Big) = \frac{1}{6}|[a, b, c]|$$



▷ <u>**Aplicaciones a la Física**</u>: la Física es la ciencia que estudia las propiedades de la materia y elabora leyes según las cuales se rigen los fenómenos de la misma y su evolución en el tiempo. La Mecánica es la rama de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, las fuerzas que los condicionan y cómo actúan sobre los cuerpos en equilibrio. Cuando utilizamos conceptos tales como trabajo, fuerza o velocidad necesitamos el producto escalar (por eso son llamadas "magnitudes escalares") y cuando tratamos con velocidad angular, momento angular, momento cinético o magnético, necesitamos del producto vectorial (por eso son llamadas "magnitudes vectoriales"). Dada la importancia de los momentos vamos a estudiar algunas propiedades y planteamientos.

▷ <u>**Definición**</u>: sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ base ortonormal de V, $\overrightarrow{F} = (f_1, f_2, f_3)$ un vector con origen en $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ otro punto. Llamamos <u>momento central</u> del vector $\overrightarrow{F}$ respecto a Q, al vector $\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{F}$ con origen en Q. A dicho vector lo notaremos por $\overrightarrow{M_Q}$.

$$\overrightarrow{M_Q} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$



▷ <u>**Definición**</u>: llamamos <u>brazo</u> del vector $\overrightarrow{F}$ respecto a Q a la distancia de Q a la recta que contiene al vector $\overrightarrow{F}$. Como el brazo de $\overrightarrow{F}$ es la altura del triángulo $\overset{\triangle}{PFQ}$ cuya área es al mitad del módulo de $\overrightarrow{M_Q}$. Resulta pues, entonces, que el módulo del vector momento, $\overrightarrow{M_Q}$ es igual al módulo de $\overrightarrow{F}$ por su brazo respecto a Q.

▷ <u>**Propiedades**</u>:

1) El momento central del vector $\overrightarrow{F}$ respecto a Q es independiente del punto de aplicación de $\overrightarrow{F}$

Proof. Apliquémoslo en D, otro punto cualquiera de la recta determinada por P y $\overrightarrow{F}$:
$\overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{QD} \times \overrightarrow{F} = (\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{PD} \times \overrightarrow{F}) = \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{F} + 0 = \overrightarrow{M_Q}$ □

2) El momento central del vector $\overrightarrow{F}$ respecto a una punto E es igual a la suma del momento central respecto a Q más el momento central del vector $\overrightarrow{F}$ respecto a E aplicado en Q.

Proof. Sea $\overrightarrow{F}$ con origen en $P \longrightarrow \overrightarrow{M_E} = (\overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{QP}) \times \overrightarrow{F} = (\overrightarrow{EQ} \times \overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{F}) = \overrightarrow{EQ} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{M_Q}$

□

▷ Una de las condiciones de equilibrio de un cuerpo es que el momento resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre él sea nulo.