TEMA 32: APLICACIÓN DEL ESTUDIO DE FUNCIONES A LA INTERPRETACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA ECONOMÍA, LAS CIENCIAS SOCIALES Y LA NATURALEZA.

TIEMPO: 72 — 68

Esquema

1) Introducción
   1.1) Concepto de función
   1.2) Análisis Matemático
2) Definiciones básicas
   2.1) Función
   2.2) Derivada
   2.3) Integral
   2.4) Máximos y mínimos
3) Aplicaciones a la Economía
   3.1) Interés simple y compuesto
   3.2) Oferta y demanda
   3.3) IRPF
   3.4) Publicidad y ventas
4) Aplicaciones a las Ciencias Sociales
   4.1) Crecimiento poblacional
   4.2) Series cronológicas
   4.3) Difusión de la información
5) Aplicaciones a las Ciencias Naturales
   5.1) Movimiento
   5.2) Energías potencial y cinética
   5.3) Desintegración radioactiva
   5.4) Enfriamiento de un cuerpo
   5.5) Tendencia al estado de mínima energía

1) Introducción:

▷ El concepto de función ha sufrido un proceso de discusión y refinamiento durante los últimos 300 años hasta cristalizar en el concepto que hoy día manejamos. En la actualidad las funciones se definen dentro de las relaciones entre conjuntos formando parte de la Teoría de Conjuntos.

▷ La rama matemática que se dedica al estudio de las funciones es el Análisis Matemático. Esta disciplina proporciona métodos para la investigación cualitativa de los distintos procesos de definición, cambio o dependencia de una magnitud respecto a otras. Entre esos métodos destacaremos la diferenciación, la integración o la determinación de sus máximos y mínimos.

▷ Las funciones reales de variable real constituyen el armazón de la matemática actual y, por lo tanto, de la ciencia y tecnología modernas (ya sean las funciones que podemos definir gracias a leyes naturales - como las rectas - o las obtenidas experimentalmente y que ayudan a modelar procesos más complicados - como la delta de Dirac). Sus aplicaciones son innumerables y destacaremos algunas de ellas a lo largo de este tema.

2) Definiciones básicas:

$\triangleright$**Definición**: llamamos función real de variable real a toda aplicación $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $x \longmapsto y = f(x)$. A veces se necesita que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o $A \subseteq \mathbb{C}^n$.

$\triangleright$ De la propia definición observamos que cada elemento $a \in A$ tiene una única imagen $f(a) \in \mathbb{R}$

$\triangleright$ **Definición**: a la variable "x" la llamamos variable independiente y a la variable "y" la llamamos variable dependiente.

$\triangleright$**Definición**: llamamos domino de f al conjunto:
$D(f) = A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists y = f(x) \in \mathbb{R}\}$

$\triangleright$**Definición**: llamamos imagen, recorrido o gráfica de "f" al conjunto:
$\text{Im}(f) = \text{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$

$\triangleright$ De esta forma, la información relativa a un fenómeno representado por la variable independiente "x" permite describir el comportamiento de una variable "y", representativa de otro fenómeno, mediante el establecimiento de una relación funcional entre ambas. Por ejemplo la hora del día y la cantidad de luz solar que nos llega (el tiempo como variable independiente y la luminosidad como variable dependiente). Destacaremos que la representación gráfica de una función puede ser muy útil a la hora de resaltar información de la función que pueda no ser evidente a partir de las descripciones verbales o algebraicas. Por comodidad usaremos $\mathbb{R}$ como conjunto final en las siguientes definiciones aunque se puedan extender a $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ sin problemas.

$\triangleright$ **Definición**: dada $f : A \mapsto \mathbb{R}$ llamamos derivada de "$f(x)$" en $a \in D(f)$ al límite, si existe, de:

$$y'(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$\triangleright$ El concepto de integral vamos a simplificarlo como el área debajo de una curva pues es suficiente para las aplicaciones más o menos sencillas de este tema. El concepto de integral se explora más a fondo en otro tema:

$\triangleright$ **Definición**: dada $f : A \mapsto \mathbb{R}$ y $a, b \in D(f)$, llamamos integral de "$f(x)$" entre "a" y "b" al área de la región delimitada por la imagen de $f(x)$, el eje $\mathbb{X}$ y las rectas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$. La notamos por: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$\triangleright$ Máximos y mínimos: decimos que la función "$f(x)$" presenta un máximo (mínimo) relativo en "a" si $\exists \epsilon > 0$ tq $\forall x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$, $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$. Cuando podemos quitar el "ϵ" tenemos un máximo (mínimo) absoluto. Si, además, $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ es derivable en dicho punto a, entonces se tiene que cumplir que $f'(a) = 0$.

3) Aplicaciones a la Economía:

▷ **Definición**: un capital C se dice que está colocado a un interés simple si tanto el capital como los intereses, I (en tanto por uno), no varían a través de los diversos periodos de tiempo en los que el capital está colocado. Dados "t" periodos de tiempo, la fórmula del rendimiento de nuestro capital inicial C_0 es:

$$C_t = C_0 + C_0 \cdot I \cdot t$$

▷ **Definición**: un capital C se dice que está colocado a un interés compuesto cuando los intereses I (en tanto por uno) producidos en cada periodo se suman al capital para construir el nuevo capital que producirá los intereses en el siguiente periodo de tiempo. Dados "t" periodos de tiempo, la fórmula del rendimiento de nuestro capital inicial C_0 es:

$$C_t = C_0 \cdot (1 + I)^t$$

▷ *Nota*: si se capitaliza de forma continua (esto es, hacemos $t \to \infty$), la variación de capital, dC, en el intervalo de tiempo dt se expresa como $dC = C \cdot I \cdot dt$. Resolviendo la ecuación diferencial tenemos la fórmula del capital compuesto de manera continua para cada instante $t \geq 0$:

$$C_t = C_0 \cdot \mathrm{e}^{I \cdot t}$$

▷ **Oferta y demanda**: la ecuación lineal de la demanda de un cierto bien tiene la expresión $C_d = a - b \cdot P$ donde C_d indica la cantidad demandada de un cierto bien, P su precio y $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes. El signo menos hace que la derivada sea negativa lo que se traduce en que cuanto más alto sea el precio del bien, menor será la demanda.
De manera análoga, la ecuación de la oferta es $C_o = -c + d \cdot P$ indicando que si el precio del bien aumenta, entonces también aumenta la cantidad ofertada por sus fabricantes.

▷ **Definición**: llamamos precio de equilibrio del bien al punto obtenido al intersecar ambas rectas.

▷ En general las ecuaciones de la oferta y la demanda de un bien no siguen las anteriores sino que tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} C_d = \dfrac{a}{P} \text{ con } a < 0 \\ C_o = b \cdot P^n, \text{ con } n > 0 \text{ y con } b > 0 \end{cases}$$

▷ **IRPF**: el Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas es otro caso de aplicación de las funciones polinómicas a la Economía. En los tramos de renta más frecuentes, el impuesto se determina mediante una fórmula del tipo: $I = a \cdot x^2 + b \cdot x$ siendo $x =$ la renta individual, $I =$ impuesto a pagar y a, b cantidades prefijadas. Su derivada es positiva $\forall x > 0 \longrightarrow$ a mayor renta más impuesto. El mínimo de la función está diseñado para que caiga en $x < 0$

▷ **Publicidad y ventas**: los estudios demuestran que si se suspende la publicidad de un producto, permaneciendo inalterables las restantes condiciones del mercado, las ventas disminuyen de forma proporcional a las ventas en curso, lo que nos lleva a la siguiente ecuación diferencial ordinaria (E.D.O. en adelante):

$$\frac{dV}{dt} = V'(t) = -\lambda \cdot V(t)$$

Resolviendo esta E.D.O. (integrando y evaluando $V_0 = V(\text{último periodo})$), tenemos:

▷ Fórmula de las ventas sin publicidad: la ecuación que nos indica la evolución de las ventas de un producto que ya no tiene publicidad es:

$$V(t) = V_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

Partimos de que la derivada de las ventas es negativa, luego las ventas decrecerán con el tiempo. Si tomamos el límite cuando $t \longmapsto \infty$ las ventas dejarán de existir (que es lo esperado).

4) Aplicaciones a las Ciencias Sociales:

▷ Crecimiento de una población: consideremos una población que en un instante está compuesta por $P(t)$ individuos y supongamos que dicha población tiene unas tasas de natalidad "n" y de mortalidad "m" constantes.
Si consideramos un intervalo de tiempo Δt pequeño, podemos suponer que en el intervalo $[t, t+\Delta t]$, $P(t)$ es constante. Por lo tanto, la variación de población en dicho intervalo será:
$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = \{P \text{ es constante}\} n \cdot P(t) \cdot \Delta t - m \cdot P(t) \cdot \Delta t = (n-m) \cdot P(t) \cdot \Delta t$. Tomando el límite $\Delta t \longmapsto 0$:

$$\frac{dP}{dt} = P'(t) = (n-m) \cdot P(t)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial ordinaria (integrando y evaluando $P_0 = P(t=0) = P(0)$), tenemos:

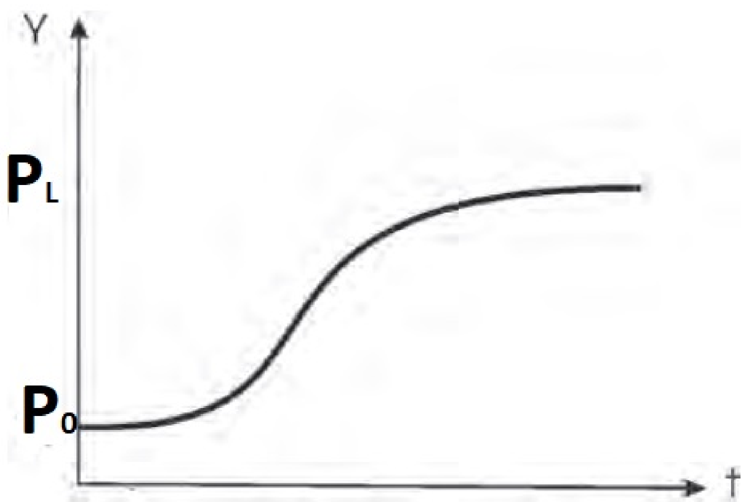
▷ **Crecimiento de una población sin restricciones**: la ecuación que rige el crecimiento de una población que no está sometida a ninguna restricción es:

$$P(t) = P_0 \cdot \mathrm{e}^{(n-m)t}$$

▷ Si $n > m$ la población aumenta pues la derivada es positiva y decrece en el caso contrario (lo que coincide con la intuición). Pero todos sabemos que las poblaciones no pueden crecer indefinidamente y que el medio establece unas condiciones límite (ya sea por la presencia de predadores o el agotamiento de los recursos naturales) y en ese caso usaremos el:

▷ **Modelo logístico**: de crecimiento de una población con restricciones sigue la siguiente ecuación (donde P_L es la población límite y $\alpha, k \in \mathbb{R}$ son constantes):

$$P(t) = \frac{P_L}{1 + \alpha \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}}$$



▷ Por último, hacer notar que en el caso de que las tasas de natalidad y mortalidad no sean constantes el modelo se complica mucho más.

▷ **<u>Series cronológicas</u>**: una serie cronológica es una sucesión de observaciones de una variable en función del tiempo, es decir, tenemos $t_1 \ldots, t_n$ momentos temporales e $y_1 = f(t_1), \ldots, y_n = f(t_n)$ valores de la variable para dichos momentos. La función $f(t)$ es, en general, desconocida y el reto será encontrar la que mejor se ajuste a los datos experimentales y tenga sentido dentro del contexto de las medidas; por ejemplo, una interpolación polinomial para unos valores que miden la luminosidad del Sol en una cierta habitación no tiene ningún sentido, quizás una gaussiana sea lo más adecuado en este caso. En general, uno de los método más usado es de mínimos cuadrados.

▷ **<u>Difusión de la información</u>**: supongamos que la información sea un fragmento de una noticia, un rumor o el conocimiento de un nuevo producto lanzado al mercado. Si designamos por $N(t)$ al número de personas de una población P (constante) que en un momento $t \geq 0$ conocen dicha información, la velocidad de difusión es proporcional al número de personas que la desconocen. Es decir:

$$\frac{dN}{dt} = N'(t) = K \cdot (P - N) \text{ , donde } K \in \mathbb{R}^+ \text{ es una constante}$$

Esta E.D.O. se puede resolver primero resolviendo la homogénea ($N'(t) = -KN \longrightarrow \hat{N}(t)$) y luego la particular (hacemos $N(t) = \hat{N} \cdot C(t)$ e imponemos las condiciones de la derivada) y la solución será la suma de ambas y, tras imponer las condiciones iniciales, tendremos que:

▷ **<u>Modelo de difusión de la información</u>**: la ecuación que rige la difusión de la información es de tipo logístico y se puede escribir como:

$$N(t) = P \cdot (1 - \mathrm{e}^{-K \cdot t})$$

5) Aplicaciones a las Ciencias Naturales:

▷ **Movimiento**: la velocidad de un móvil es la variación de la posición con respecto al tiempo, esto es: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(s+h) - f(s)}{h}$. Tomando límites hallamos la velocidad instantánea de dicho móvil que vendrá dada por: $v = \frac{ds}{dt}$

La aceleración es la variación de la velocidad con respecto al tiempo. Razonando como antes llegamos a que: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Si tenemos un móvil que parte de una posición inicial (s_0) con una velocidad inicial (v_0) y una aceleración constante (a), podemos integrar la última fórmula para obtener las ecuaciones de la velocidad y la posición del móvil en cualquier instante de tiempo:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

▷ **Energía cinética y potencial**: la energía cinética es la cantidad de energía que tiene un cuerpo debido a su movimiento. Su fórmula es $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ que es creciente si la velocidad es positiva y decreciente si lo la velocidad es negativa.

La energía potencial gravitatoria es la energía de un cuerpo debido a su altura. Su fórmula es $E_p = mgh$ que es creciente con la altura.

▷ **Desintegración de las sustancias radioactivas**: ocurre que el número de átomos de un elemento radioactivo que se desintegran en un tiempo dado es proporcional al número actual de átomos y, por tanto, obedece a una ley exponencial: $c(t) = c_0 \mathrm{e}^{-k \cdot t}$, donde $c_0 =$ nº de átomos en $t = 0$. Se llama periodo de desintegración al tiempo en que el número de átomos se reduce a la mitad (en miles de años). La vida media, ν, de un material radioactivo se define como la media de vida de sus núcleos radioactivos. A $k = \frac{1}{\nu}$, se la llama constante de desintegración que mide la probabilidad de desintegración.

▷ **Enfriamiento de un cuerpo**: la cantidad de energía irradiada por un cuerpo negro es $E = \sigma (T - T_0)^4$. Como es una función polinómica par se puede ver que crece con la diferencia de temperatura.

▷ **Tendencia al estado de mínima energía**: se cumple que todo sistema físico tiende hacia el estado de mínima energía. Esto nos permite hallar estados finales calculando el mínimo de la energía de dicho sistema. Veamos algunos ejemplos:

1) La fuerza se relaciona con el potencial a través de la siguiente fórmula: $F = -\frac{dV}{dx}$, es decir, si tenemos un cuerpo en un punto crítico no estará sometido a ninguna fuerza. Si la función es cóncava en ese punto de equilibrio (máximo), éste será inestable y si es convexa (mínimo) será estable.

2) La distancia mínima entre dos puntos de una superficie: en el plano es la línea recta, en la esfera el círculo máximo que los une y en una superficie en general es la geodésica que va de uno al otro. Para encontrar esta solución se requiere de la Geometría Diferencial y las funciones n-dimensionales sobre variedades diferenciables.

3) Problemas de optimización clásicos: ¿cuál es la forma de la caja de volumen máximo que se puede formar con un trozo de material rectangular dado?, ¿cómo se ha de lanzar un proyectil para que su resistencia al aire durante el vuelo sea mínima?, etc.