TEMA 14: ECUACIONES. RESOLUCIÓN. APROXIMACIÓN.

TIEMPO: 70 — 69

Esquema

1) Introducción
   1.1) Antiguo Egipto
      1.1.1) Rhind
      1.1.2) Moscú
   1.2) Antigua Mesopotamia
   1.3) Antigua China
   1.4) Antigua India
      1.4.1) Bhaskara
   1.5) Antigua Grecia
      1.5.1) Tres problemas clásicos
   1.6) Árabes
   1.7) s.XIX

2 Ecuaciones. Resolución
   2.1) Definiciones: ecuación, incógnita, solución
   2.2) Función polinómica de primer grado
   2.3) Función polinómica de segundo grado
   2.4) Función polinómica de tercer grado
   2.5) Función polinómica de grado ≥ 4
   2.6) Teorema Fundamental del Álgebra
   2.7) Otras ecuaciones

3) Aproximación de raíces
   3.1) Teorema de Bolzano
   3.2) Método de Bisección
   3.3) Método de la Cuerda o "*Regula Falsi*"
   3.4) Método de Newton
   3.5) Método del punto fijo o iterativo
      3.5.1) Teorema $\times 2$

1) Introducción:

▷ Antiguo Egipto: de esta época de la Historia conservamos fundamentalmente dos papiros matemáticos: el papiro Rhind y el papiro de Moscú.

▷ En el papiro Rhind (que se encuentra en Londres) tenemos 84 problemas de carácter apilado. Se usan fracciones, se hallan las áreas del triángulo, rectángulo y círculo (dando como valor de $\pi = \frac{16}{9} \approx 3,16$), los volúmenes del paralelepípedo o el cilindro,... También nos encontramos con problemas de divisiones proporcionales.

▷ En el papiro moscovita se recogen 25 problemas, muchos parecido a los del papiro Rhind. Aquí se calcula correctamente el volumen de un pirámide truncada con base cuadrada y se halla el área de un superficie curva (un cesto).

▷ Antigua Mesopotamia: tenemos una inmensa cantidad de tablillas de arcilla de esta época. Sin embargo, de todas esas, apenas unas 300 son de contenido puramente matemático. Cabe destacar que existían reglas uniformes para las operaciones matemáticas. Para facilitar las operaciones existían tablas de multiplicar desde $1 \cdot 1 = 1$ hasta $60 \cdot 60 = 3600$ (recordemos que ellos usaban la base 60). Para números más grandes se hallaban los productos parciales y luego se sumaban. Para dividir usaban las tablas de valores inversos. También hay tablas de los cuadrados de los naturales, cálculos de porcentajes, repartos proporcionales,... y de resolución de ecuaciones. Bartel van der Waerden clasificó todos estos métodos de solución de estas tablillas. Su conclusión fue que eran equivalentes a las siguientes ecuaciones:

a) Una incógnita: $a \cdot x = b$ // $x^2 = a$ // $x^2 \pm a \cdot x = b$ // $x^3 = a$; $x^2(x+1) = a$

b) Dos incógnitas: $x \pm y = a$ // $x \cdot y = a$ // $x^2 + y^2 = a$

Aunque aquí hemos usado notación algebraica hemos de recordar que ellos no la tenían o que en ecuaciones como las de segundo grado sólo contemplaron las que tenían soluciones reales pues no conocían los complejos.
Conservamos incluso tablillas donde aparecen los triángulos rectángulos con lados racionales, es decir, las ternas pitagóricas $x^2 + y^2 = z^2$. El método que seguían para resolverlas nos lleva a las fórmulas: $x = \dfrac{p^2 - q^2}{2}$; $y = p \cdot q$; $z = \dfrac{p^2 + q^2}{2}$

▷ Antigua China: en el 8º libro de la "*Matemática en 9 libros*" (que es un recopilatorio de los logros de la Matemática china hasta comienzos de nuestra era) se recoge la regla de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y su generalización a sistemas con un mayor número de incógnitas (que ya se plantean en el 7ª libro). Utilizaban un método muy parecido al de Gauss y para ello introducen los números negativos (nótese que en Europa los números negativos aparecen en el s.XV y los determinantes en el s.XVII). También tenían reglas como el "método del elemento celeste" que es equivalente al método de Ruffini-Horner (x.XIX).

▷ Antigua India: los documentos más antiguos datan de los siglos VIII-VII a.C. y son libros matemático-religiosos escritos en sánscrito. En ellos encontramos construcciones geométricas, métodos de cuadratura de círculos, aplicaciones del Teorema de Pitágoras,... El período más brillante de desarrollo matemático fueron los siglos V-XII d.C.
Y el matemático más notorio fue Bhaskara con sus dos obras "*Lilavati*" y "*Vijaganita*". En ellos resuelve problemas de álgebra, de análisis indeterminado, de combinatoria, sumas de series, cálculo de volúmenes,... incluso llega a escribir la solución general para la ecuación de segundo grado.

▷ Antigua Grecia: el lugar principal entre las escuelas griegas de filosofía lo ocuparon sucesivamente la jónica, la pitagórica y la ateniense. En estas escuelas también se elaboraban cuestiones matemáticas en especial los problemas prácticos relacionados con mediciones, construcciones y cálculos geométricas. A estos problemas se les englobó dentro de la "logística". A esta ciencia se le atribuirán: extracción numérica de raíces, cálculo de fracciones, problemas prácticos de arquitectura,...
Destacamos los tres problemas clásicos de la Matemática griega (construcciones con regla y compás):

a) La cuadratura del círculo: construir un cuadrado de área π. Se demuestra que es imposible.

b) La trisección del ángulo: dividir un ángulo en tres partes iguales. En general no es posible.

c) Duplicación del cubo: construir un cubo con el doble de volumen de uno dado. No es posible.

▷ Árabes: las matemáticas árabes acumularon muchos procedimientos de cálculo y algoritmos especiales como:

a) Obtención de 17 cifras decimales exactas del número π mediante polígonos inscritos.

b) Cálculo de raíces por el "método del elemento celeste" (técnica que aprendieron de los chinos) y cálculo de distintas raíces del tipo $\sqrt[n]{q}$

c) Se dieron cuenta de que: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$ y que $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m}$

En Europa la tabla de coeficientes binomiales (≤ 17) fue publicada en el s.XVI (por Stiefel) y el método de cálculo de raíces superado por Ruffini y Horner en el s.XIX.

▷ s.XIX: durante este siglo, el problema fundamental del Álgebra lo constituía la resolución de ecuaciones algebraicas. Se descubrieron multitud de métodos y a finales del s.XVIII se vieron obligados a la introducción de nuevos conceptos (grupo, campo,...) que terminarían revolucionando el Álgebra. De esta época destacaremos el Teorema Fundamental del Álgebra y la imposibilidad de resolución en general de las ecuaciones de grado mayor que 4 (Teoría de Abel-Galois).

2) Ecuaciones. Resolución:

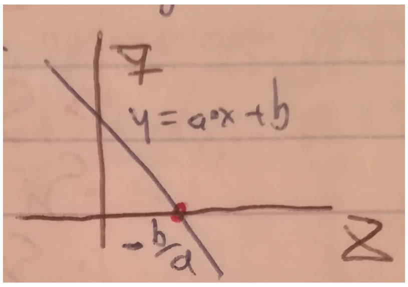
▷ **Definición**: dado un cierto conjunto donde se han definido una serie de operaciones (suma, producto,...) llamamos ecuación a toda igualdad donde intervienen elementos conocidos y desconocidos del conjunto inicial relacionados por medio de las operaciones.

▷ **Definición**: a los elementos desconocidos los llamaremos incógnitas.

▷ **Definición**: llamaremos solución de una ecuación al conjunto de posibles valores que pueden tomar las incógnitas para verificar la igualdad. Este conjunto puede ser vacío (por ejemplo las soluciones a $x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{R}$)

▷ **Funciones polinómicas de primer grado**:

▷ Son aquellas de la forma $a \cdot x + b = 0$ con "a" y "b" conocidos y $a \neq 0$. Si tenemos $a, b, x \in \mathbb{R}$ lo que nos dice la ecuación es que estamos buscando el corte con el eje $\mathbb{X}$ de la recta $y = a \cdot x + b$. Es por este motivo que a este tipo de ecuaciones las llamaremos de primer grado o lineales. Se resuelven así: $x = -\dfrac{b}{a}$



▷ **Funciones polinómicas de segundo grado**:

▷ Son de la forma $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ donde "a, b, c" son conocidos y $a \neq 0$. Si tenemos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ es al ecuación de una parábola en el plano. A este tipo de ecuaciones las llamaremos de segundo grado o cuadráticas. Para resolverlas se utiliza la conocida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

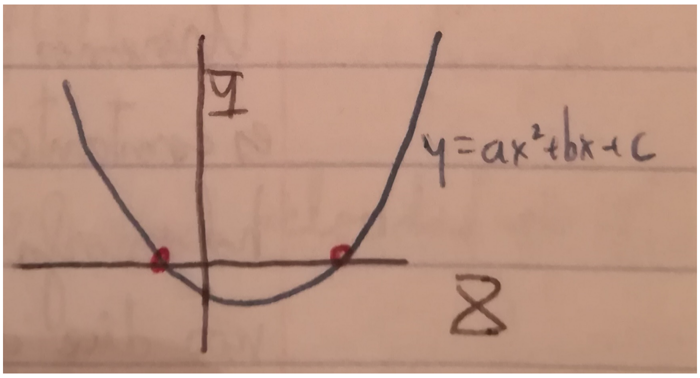
Proof. $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
Despejamos y obtenemos:
$x = \pm\sqrt{\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}} - \dfrac{b}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

□

▷ Si el radicando es mayor que creo tendremos dos soluciones reales. Si es menor que cero tendremos dos soluciones complejas conjugadas. Si es igual a cero tendremos una única solución real (doble). Además, las soluciones de al ecuación tienen que cumplir: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} // x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

▷ La ecuación bicuadrática: $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$ se resuelve haciendo el cambio $y = x^2$.

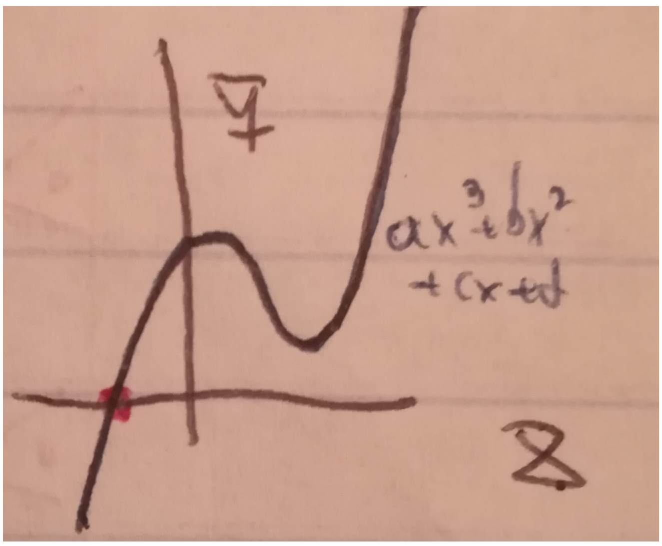
▷ La ecuación recíproca: $a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0$ se resuelve haciendo el cambio $y = x + \frac{1}{x}$ y escribiendo: $a \cdot (x^2 + \frac{1}{x^2}) + b \cdot (x + \frac{1}{x}) + c = 0$



▷ **Funciones polinómicas de tercer grado**:

▷ Son aquellas de la forma $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c|cdotx + d = 0$, donde "$a, b, c, d$" son conocidos y $a \neq 0$. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tenemos la ecuación de una cúbica. Estas ecuaciones siempre tienen, al menos, una raíz real (por el Teorema de Bolzano). Para resolverla se puede utilizar el método de Cardano-Viéte:

- Sea $x^3 + \hat{b}x^2 + \hat{c}x + \hat{d} = 0$ (hemos divido por "a").
- Anulamos el monomio en x^2 haciendo el cambio $x = y - \frac{\hat{b}}{3}$.
- En la ecuación resultante: $y^3 + p \cdot y + q$ hacemos $y = \alpha + \beta$. Operamos para obtener: $\alpha^3 + \beta^3 = -q$; $\alpha^3\beta^3 = -\dfrac{p^3}{27}$ y las vemos como las soluciones a una ecuación de segundo grado.
- $z^2 + q \cdot z - \dfrac{p^3}{27} = 0 \longrightarrow \alpha^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ y $\beta^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$
- Deshacemos todos los cambios y obtenemos el valor de una de las soluciones de la ecuación original. Después, resolvemos la cuadrática resultante.



▷ **Funciones polinómicas de grado ≥ 4**:

▷ Son las de la forma $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = 0$, donde $a_0, \ldots, a_n$ son conocidos y $a_n \neq 0$.

- Si $n = 4$ existe una fórmula explícita para calcular las raíces.
- Si $n \geq 5$ se demuestra, con ayuda de la Teoría de Galois, que no puede existir una fórmula general.

▷ **Teorema Fundamental del Álgebra**: todo polinomio con coeficientes complejos de grado "n" tiene exactamente "n" raíces complejas (contando multiplicidad).

Proof. Para demostrarlo usaremos elegantes resultados del Análisis Complejo.
Supongamos $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ que no es constante (grado ≥ 1). Supongamos que no se anula, es decir, que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$
Consideremos $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, función holomorfa y acotada (pues $\lim_{|z| \to \infty} g(z) = 0$).
En estas condiciones, el Teorema de Liouville nos dice que $g(z)$ es constante $\longrightarrow f$ también lo es, en contra de la hipótesis $\longrightarrow f(z) = (z - \alpha_1) f_1(z)$ para cierto $\alpha_1 \in \mathbb{C}$.
Si $f_1(z) \equiv$ cte, hemos acabado. Si no, aplicamos el mismo razonamiento e iteramos el proceso tantas veces como el grado de $f(z)$.
Al final, obtenemos que $f(z) = C(z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$

$\square$

▷ **Otras ecuaciones**:

▷ No todas las ecuaciones son polinómicas. Podemos tener ecuaciones racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas,... y para resolverlas necesitaremos de herramientas más potentes que nos aseguren solución y nos la den exacta o aproximada (según el caso).

3) Aproximación de raíces:

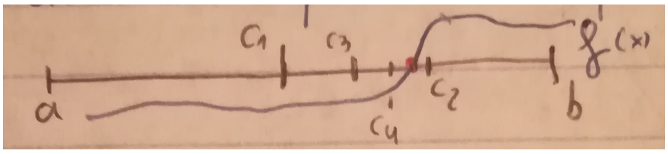
▷ Empezaré enunciando un resultado que nos asegurará existencia de solución. Después expondré algunos métodos para la búsqueda de dicha solución y por último daré un resultado/método bastante usado en situaciones muy generales.

▷ **Teorema de Bolzano**: sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

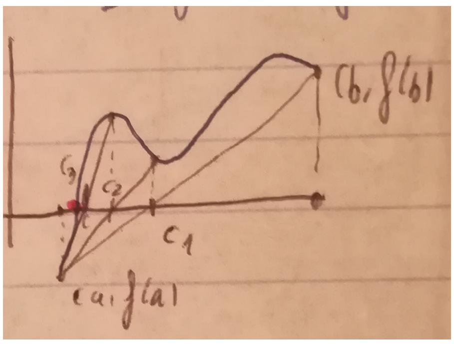
Proof. Supongamos $f(a) < 0 < f(b)$ (si no es así, consideraremos $-f(x)$) y definamos el conjunto A como $A = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < 0\}$, conjunto de números reales no vacío (pues $a \in A$) y mayorado ($b > x$, $\forall x \in A$) $\longrightarrow$ existe el supremo de A: $s = \sup\{A\}$.
Si $f(s) > 0$ tenemos, por continuidad podríamos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $f(s - \epsilon) > 0$, pero $s > s - \epsilon \notin A \longrightarrow$ esto contradice que s es el $\sup\{A\}$.
Si $f(s) < 0$ tenemos, por continuidad, que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(s+\epsilon) < 0$ con lo que $s < s+\epsilon \in A \longrightarrow$ contradiciendo que $s = \sup\{A\}$.
Visto lo anterior, obtenemos que $f(s) = 0$ como pretendíamos.

□

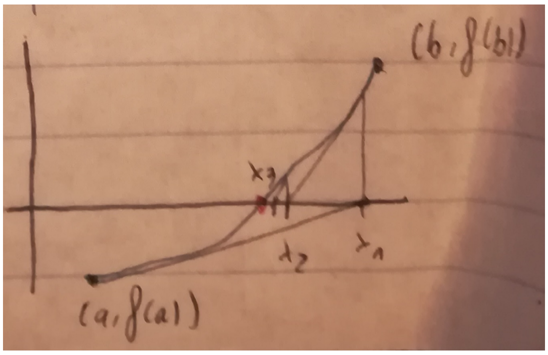
▷ **Método de Bisección**: sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Por el Teorema de Bolzano sabemos que hay, al menos, una solución. Tomemos $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$ y evaluamos.
Si $f(c_1) = 0$ hemos terminado.
Si $f(c) < 0 \longrightarrow I_2 = [c_1, b]$.
Si $f(c_1) > 0 \longrightarrow I_2 = [a, c_1]$.
Repetimos el proceso hasta que lleguemos a la solución o a una aproximación aceptable lo cual es siempre posible pues como $longitud(I_n) \to 0 \longrightarrow \exists_1 x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
El inconveniente de este método es su lenta convergencia.



▷ **Método de la Cuerda o "*Regula Falsi*"**: sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua con $f(a) < 0 < f(b)$. Por el Teorema de Bolzano sabemos que hay, al menos, una solución. Tenemos los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Los unimos por una recta y nos dará un punto de corte "c_1" con el eje $\mathbb{X}$.
Si $f(c_1) = 0$ hemos terminado.
Si $f(c) < 0 \longrightarrow I_2 = [c_1, b]$.
Si $f(c_1) > 0 \longrightarrow I_2 = [a, c_1]$ e iteramos el proceso.
Este método converge más rápido que el de Bisección pero a mucha menor velocidad que el siguiente.



▷ **Método de Newton**: dada $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ derivable, con $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Desde $(a, f(a))$ o $(b, f(b))$ trazamos la recta tangente a la gráfica y la intersecamos con el eje $\mathbb{X}$ obteniendo "c_1".
Si $f(c_1) = 0$ hemos terminado.
Si $f(c) < 0 \longrightarrow I_2 = [c_1, b]$.
Si $f(c_1) > 0 \longrightarrow I_2 = [a, c_1]$ e iteramos el proceso.
Este es uno de los métodos más usados debido a su rapidez de convergencia y sus poco coste y complejidad computacionales.



▷ **Método de iteración o punto fijo**: dada cualquier ecuación algebraica $f(x) = 0$ podemos escribirla como $f(x) = x - g(x)$. Si consideramos los puntos de corte de la curva $g(x)$ con la recta $y = x$ hallaremos los puntos de $g(x)$, es decir, los puntos $x_f \in \mathbb{R}$ tales que:
$g(x_f) = x_f \longrightarrow f(x_f) = x_f - g(x_f) = x_f - x_f = 0 \longrightarrow x_f$ es solución de la ecuación $f(x) = 0$.

▷ **Teorema**: sea $g : [a, b] \longmapsto [a, b]$ continua $\longrightarrow \exists x_f \in [a, b]$ tal que $g(x_f) = x_f$. Si, además, $\exists g'(x)$, $\forall x \in]a, b[$ y $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in]a, b[\longrightarrow$ el punto fijo es único.

▷ **Teorema**: ea $g : [a, b] \longmapsto [a, b]$ continua tal que $\exists g'(x)$, $\forall x \in]a, b[$ y $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in]a, b[$. Entonces:

a) Para cualquier número $x_0 \in [a, b]$, la sucesión dada por $x_n = g(x_{n-1})$, $\forall n \geq 1$ converge al único punto fijo $x_f \in [a, b]$.

b) Si suprimimos la condición de la derivada por ser "g" monótona, obtenemos el mismo resultado que en **(a)**.

c) Si "g" es contractiva ($|g(x) - g(y)| < |x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$) podemos suprimir la condición de la derivada y obtenemos el mismo resultado que en **(a)**.