TEMA 33: EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

TIEMPO: 88 — 80

Esquema

1) Introducción

   1.1) Cálculo Diferencial e Integral

   1.2) Dos problemas: tangente y área

   1.3) Preguntas y respuestas

2 Antigua Grecia

   2.1) Origen geométrico

   2.2) Eudoxio

   2.3) Arquímides

3) Edad Moderna

   3.1) Antes de Newton y Leibniz

   3.2) Newton y Leibniz

      3.2.1) Newton

      3.2.2) Leibniz

   3.3) Desarrollo posterior

4) Edad Contemporánea

   4.1) Cauchy

5) Notación

   5.1) Derivada

   5.2) Integral

1) Introducción:

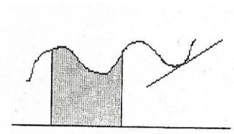
▷ La historia del Cálculo Diferencial está tan ligada a la del Cálculo Integral que ambas se funden en una disciplina que hoy llamamos Análisis Infinitesimal. En algunos países también se puede usar la expresión Cálculo Infinitesimal o, simplemente, Cálculo para referirse a ambas ramas.

▷ Cálculo Diferencial: estudia los problemas relacionados con el trazado de rectas tangentes a curvas, determinación de máximos y mínimos, cálculo de velocidades de móviles y orden del contacto de curvas.

▷ Cálculo Integral: estudia los problemas relativos a rectificación de curvas, cálculo de áreas y volúmenes y determinación de centros de gravedad.

▷ El considerable progreso habido en la ciencia y la técnica durante los últimos doscientos años procede en gran parte del desarrollo de las Matemáticas. La rama de las Matemáticas conocida como Análisis Infinitesimal es un instrumento poderoso para atacar múltiples problemas que surgen en Física, Astronomía, Ingeniería, Química, Geología, Biología, Economía y en otros campos de las Ciencias Sociales o las Humanidades.

▷ El Cálculo se desarrolló a partir de la formulación y resolución de los dos siguientes problemas relacionados con funciones: el problema de la tangente (C. Diferencial) y el problema del área (C. Integral). Si nos fijamos en la imagen a continuación el primero de los problemas sería el determinar el número que mide la pendiente de la recta tangente a la curva y el segundo sería hallar el valor del área de la región sombreada.



▷ Pero el Cálculo no es sólo un instrumento técnico sino que contiene una colección de ideas fascinantes y atrayentes que han ocupado las mentes humanas por siglos. Estas ideas están relacionadas con la velocidad, el área, el volumen, la tasa de crecimiento, la tangente a una línea,... El Cálculo obliga a detenerse y a pensar cuidadosamente acerca del significado de estos conceptos. Otro carácter notable del Cálculo es su poder unificador. Muchos de estos problemas pueden ser formulados de manera que se reduzcan a otros problemas de naturaleza puramente geométrica. Para dar una idea de los muy diversos problemas que pueden tratarse con las herramientas del Análisis Infinitesimal exponemos una pequeña muestra:

1) ¿Con qué velocidad habría que lanzar un cohete para que no volviera a la Tierra?

2) ¿Cuál es la forma de la superficie de un líquido que se hace girar alrededor de un eje vertical?

3) ¿Cuál es el radio del menor disco circular que puede cubrir a un triángulo isósceles cualquiera de perímetro dado L?

4) ¿Cuál es el volumen de materia extraído en una esfera de radio $2R$ al atravesarla por un orificio cilíndrico de radio R cuyo eje pase por el centro de la esfera?

5) Si un cultivo de bacterias crece en relación directa a la cantidad que hay en cada instante, y la población se duplica cada hora, ¿cuánto se habrá incrementado en t horas?

6) ¿Cuál es la masa de una esfera no homogénea si su densidad en cada punto P es proporcional al doble de la distancia de P al centro de la esfera?

2) Antigua Grecia:

▷ Los orígenes del Cálculo Infinitesimal se remontan a la época de los matemáticos griegos quienes se centraron en los problemas de Geometría referentes a la determinación de tangentes a una curva dada y al cálculo de áreas y volúmenes. Sus métodos para tratar problemas del Cálculo se inscriben estrictamente en el de la invención geométrica. En general, éstos usaron para sus demostraciones el método apagógico (también nombrado exhaustivo). Se trata de un método de demostración y no de descubrimiento, es decir, hay que conocer a priori el resultado que se quiere demostrar y consiste en lo siguiente: por medio de una descomposición en "sumas de Riemann" se obtienen cotas superiores e inferiores de la cantidad estudiada, cotas que se comparan directamente con el valor previsto de una cantidad, o bien con las cotas correspondientes para un problema análogo ya resuelto.

▷ De esta época inicial cabe destacar los avances realizados por Eudoxio y Arquímides. El primero demostró el volumen del cono y de la pirámide utilizando el método anterior. En cuanto a los estudios más destacados y relevantes de Arquímides se encuentran: área de la espiral de Arquímides, el método de construcción de la recta tangente a partir de considerar su espiral como una curva descrita por un móvil, área del segmento de la parábola o centro de gravedad del triángulo. De todos ellos subrayamos la importancia de la determinación de la tangente de la espiral por su planteamiento y resolución. Este problema es el primero que se puede citar como realmente la fuente más antiguas del Cálculo Diferencial.

▷ Por el rigor aplicado a la subdivisión de curvas en segmentos infinitamente pequeños, las obras de Arquímides han tenido gran influencia para el desarrollo posterior de bastantes métodos matemáticos. Es por ello que lo consideramos el precursor del Cálculo Infinitesimal.

3) Edad Moderna

Antes de Newton y Leibniz:

▷ Durante toda la Edad Media no hay avances respecto de esta disciplina, se siguen con las pautas marcadas por Arquímides. No será hasta el s.XVII cuando nuevos problemas relacionados con la Astronomía y la Mecánica obliguen a un empuje que resultaría definitivo, problemas como cálculo de máximos y mínimos cálculo de los momentos de inercia o rectificaciones de curvas.

▷ Varios matemáticos de principio de siglo, siguiendo con el desarrollo de los problemas que Arquímides había iniciado, realizan una serie de avances que culminarían con los trabajos de Leibniz y Newton.

a) **Galileo**: estudia las relaciones existentes entre las fórmulas de caída de los cuerpos.: $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ y $v = g \cdot t$ y deduciendo que esas trayectorias eran parabólicas.

b) **Cavalieri**: establece su famoso principio: "si en dos cuerpos las secciones transversales en una cierta dirección tienen áreas iguales, entonces tienen volúmenes iguales". Siguiendo la obra de Arquímides llega a la fórmula (por supuesto no con esta notación): $\int_0^n x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^n$

c) **Fermat**: generaliza lo anterior dando valores fraccionarios a "n". Además, estudia la determinación de máximos y mínimos de funciones como puntos de tangente horizontal. Usa un rudimentario concepto de derivada pero, básicamente, como artificio de cálculo. Como aún no se tenía el concepto de límite, él usaba la letra E, que hoy equivaldría a nuestros infinitésimos.

d) **Saint-Vincent**: es el primero en dar una fórmula equivalente a la actual $\int \frac{dx}{x} = Lx$

e) **Kepler**: observó que un entorno de una máximo o un mínimo las funciones varían lentamente.

f) **Huygens**: en su "*Horologium Oscillatorum*" (péndulos) realiza el estudio de la evoluta de una curva, que utiliza el concepto de la derivada segunda. Sería profesor de Leibniz y mantendría importantes discusiones científicas con Newton durante su estancia en la Royal Society (siempre criticaría su Ley de Gravitación Universal).

g) **Wallis**: realizó la introducción sistemática al Análisis Infinitesimal de las series. En su "*Aritmética Infinitorum*" se encuentran por primera vez el actual símbolo de infinito (∞) y la fórmula de π como producto infinito.

▷ A primera vista puede parecer que no hay una relación entre el problema de hallar el área de una región delimitada por una curva y el hallar la tangente en un punto a una curva. Serían los matemáticos Giles Persone de Roberval y Evangelista Torricelli los que los relacionarían por primera vez. Dicho resultado sería generalizado por el maestro de Newton, Isaac Barrow (del que tendremos su "regla" para el cálculo de áreas a través de primitivas de funciones).

▷ El siguiente, y definitivo, paso lo darán Newton y Leibniz cuando deciden buscar la justificación de estos nuevos métodos, no al estilo de la Geometría, sino más bien en la no contradicción de los resultados obtenidos por los mismos.

Newton y Leibniz:

▷ Dejando de lado a los precursores del Cálculo, no cabe duda de que los dos grandes creadores fueron Newton y Leibniz.

▷ **Newton**: desarrolla una labor matemática muy amplia relacionada con sus investigaciones de filosofía natural. Concibe las funciones como fluyentes dependiendo de un parámetro y las derivadas como fluxiones (con un método creado por él mismo y con el que resuelve los problemas del trazado de tangentes, cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión, determinación del centro y radio de curvatura, etc.). Al no disponer del concepto de límite él habla de "razones que se desvanecen". Se nota una fuerte influencia de su maestro al dar a la integral un papel secundario por ser la inversa de la derivada.

▷ **Leibniz**: resuelve las integrales expresándolas mediante funciones elementales y estudia métodos para transformar integrales, siguiendo así un procedimiento distinto al de Newton que daba las soluciones mediante desarrollos en serie. Estudia las integrales racionales y se plantea el problema de las raíces complejas en el denominador. A él debemos la mayor parte de la notación actual del cálculo diferencial e integral (observando que la fórmula del cambio de variable de Barrow era evidente con su notación en vez de la de Newton): dx, $\int f(x)dx$. Dos discípulos suyos, Jakob y Juan Bernouilli, introdujeron la regla de L'Hôpital.

Desarrollo posterior:

▷ El hecho de que el Cálculo naciera a la vez y por obra de dos matemáticos insignes provocó una discusión, iniciada con una pretensión de prioridad para convertirse luego en una acusación de plagio, que enturbiaría las relaciones entre los matemáticos ingleses y los continentales durante más de un siglo. Esta división llevó al aislamiento y a la falta de cooperación entre las dos partes y al ser más eficaz la notación de Leibniz supuso un cierto retraso matemático de Inglaterra durante finales de la Edad Moderna y principios de la Contemporánea.

▷ En cualquier caso, los grandes tratados del s.XVIII ofrecen pocas novedades: Maclaurin en Inglaterra y Euler en el continente permanecen fieles a las tradiciones de las que son herederos.

▷ En Francia tenemos a Lagrange y a D'Alembert, quien define con bastante precisión los conceptos de límite y diferencial, y de esta forma da paso a la labor de fundamentación y profundización que se va a realizar en el s.XIX.

4) Edad Contemporánea

▷ Una vez establecida la notación y zanjadas las discusiones entre los seguidores de una y otra visión, los matemáticos se dedicaron a construir una base sólida para el Cálculo empezando por la definición concisa de función y de continuidad.

▷ Es con Cauchy con quien se cimentan estas bases. Él define rigurosamente el concepto de límite y de continuidad con su definición $\epsilon - \delta$ (aunque su concepto de función sólo incluía las monótonas). Los problemas a la hora de definir el concepto función y, por tanto, hablar de continuidad, derivabilidad e integrabilidad serán constantes a los largo de este siglo hasta que Darboux a finales del mismo dé la solución y dé la demostración de la integrabilidad de una función continua.

▷ Llegamos con esto a la etapa final del Cálculo Diferencial clásico donde destacaremos a Weierstrass, Jordan y Hilbert, quienes en sus tratados no sólo reunían las principales proposiciones demostradas rigurosamente, sino que anunciaban aspectos del Cálculo moderno y prepararon el camino a cuestiones sobre los números reales o el Análisis Funcional.

5) Notación:

▷ La historia nos enseña que la notación juega un papel muy importante en el desarrollo de las matemáticas. En el cálculo diferencial se han empleado muchas notaciones diferentes para las derivadas, prefiriéndose una a otra según las circunstancias que acompañan al uso del símbolo. Repasemos brevemente las distintas notaciones para la derivada.

1) $\underline{f'}$: esta notación, introducida por Lagrange en el s.XVIII, enfatiza que "f'" es una nueva función obtenida a partir de "f" por derivación, indicando su valor en un punto "x" del dominio por $f'(x)$. Como tenemos la relación $y = f(x)$, se puede representar la derivada como y'. Análogamente, usamos y'', y''', $y^{4/}$ para denotar las distintas derivadas de $f(x)$.

2) $\underline{\dot{y}}$: esta notación, introducida por Newton, apenas es usada hoy en día, pero no es imposible verla en contextos asociados con velocidad o aceleración.

3) $\underline{Df}$: notación introducida por Arbogast en el s.XIX. Df, D^2f, etc.

4) $\underline{\dfrac{dy}{dx}}$: notación introducida por Leibniz, significando $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Esta notación era, además, una comprensión de las derivadas como cocientes de cantidades "infinitesimales", donde dy y dx se llaman "diferenciales". Aunque las ideas de Leibniz sobre infinitesimales se han refinado para la derivada, todavía hay quien las considera útiles y otra forma de aproximarse a los incrementos. La mayor virtud de esta notación es que $\dfrac{dy}{dx}$ resume el proceso del cálculo de un cociente de diferencias y posterior paso al límite.

▷ En cuanto a la integral, la notación fue desde el principio muy uniforme y hoy tenemos el símbolo $\displaystyle\int$ para representar la integral sin ningún tipo de discusión. La unión con la diferencial viene de la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde leemos "la integral desde "a" hasta "b" de la función "$f(x)$" "diferencial de x". Esta notación con la diferencial se la debemos a Leibniz y extiende la idea de suma finita a una suma infinita de rectángulos de altura $f(x)$ y de base dx. Los grandes nombres del Cálculo Integral son Cauchy, Riemann y Lebesgue.

1) **Cauchy**: le debemos la definición rigurosa de integral definida como el límite de las sumas de los productos $f(x) \cdot dx$. Él se ciñó a funciones continuas solamente.

2) **Riemann**: generalizó lo anterior a funciones discontinuas mediante pasos al límite. Con él se hablará de "sumas inferiores y superiores" y una función acotada en $[a, b]$ será integrable en sentido Riemann si, y sólo si, el conjunto de sus discontinuidades tiene medida cero.

3) **Lebesgue**: generaliza la integral de Riemann usando la Teoría de Conjuntos y la Teoría de la Medida. Lebesgue, en vez de dividir el dominio en subintervalos, él divide la imagen. Toda función integrable Riemann lo será en el sentido de Lebesgue pero al revés no (la función de Dirichlet, por ejemplo, $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$: es Lebesgue integrable con integral nula pero no es Riemann integrable).