Bloque I . Enunciados

ARI 1. Divisibilidad

1. **Un auditorio tiene 26 filas y 24 butacas en cada una. Todas las butacas están numeradas empezando en la primera fila. ¿En qué fila se encuentra la butaca 371?**

2. **En una clase de Matemáticas se formaron grupos de cuatro y quedaron 2 estudiantes libres. Luego se formaron grupos de 5 y quedó libre 1 estudiante. Si 15 de los estudiantes eran chicas y había más chicas que chicos, ¿cuántos chicos había en la clase?**

3. **En un papel hay escrito un número de cuatro cifras. Si borramos las dos últimas, el número queda así: 86??. Sabiendo que el número original era divisible por 3, 4 y 5, ¿cuál es el número que estaba escrito en el papel?**

4. **¿Para cuántos enteros positivos *n* es verdadero que $\frac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?**

5. **¿Cuántos números, del 1 al 1001 son divisibles por 5 o por 9 pero no por ambos?**

6. **¿Cuál es el cociente entre el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros positivos y el mínimo común múltiplo de los 30 primeros?**

7. **¿Cuál es el mayor resto posible cuando dividimos un número de dos cifras entre la suma de sus cifras?**

8. **En un colegio hay 1000 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, y el primero abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego el tercero acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas; a continuación el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta que todos pasan por las taquillas. Al final, ¿cuál es el número de la última taquilla abierta?**

9. **Un punto reticular es un punto del plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulares de la recta $3x + 4y = 59$ hay en el primer cuadrante?**

10. **Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en 3 días de trabajo y 1 de descanso, mientras que Beatriz trabaja 7 días seguidos y luego descansa 3 días seguidos. En los 1.000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?**

Bloque I

Bloque II

Bloque III

Bloque IV

11. ¿Cuántos años del siglo XXI verificarán la propiedad de que dividiendo el número del año por 2, 3, 5 y 7 obtengamos siempre de resto 1?

12. El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos vivos será un número primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

13. Mustafá compró una gran alfombra. El vendedor midió la alfombra con una regla que supuestamente medía un metro. Como resultó de 30 metros de largo por 20 metros de ancho, le cobró 120000 rupias. Cuando Mustafá llegó a su casa midió nuevamente la alfombra y se dio cuenta que el vendedor le había cobrado 9408 rupias de más. ¿Cuántos centímetros mide la regla que usó el vendedor?

14. Joaquín y su amigo Andrés van todos los días a clase en el autobús de la línea 62. Andrés paga siempre los billetes.

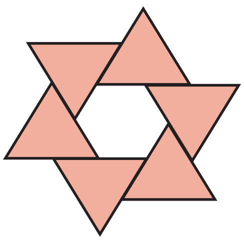
Cada billete tiene impreso un número de 5 dígitos. Un día, Andrés observa que los números de sus billetes –el suyo y el de Joaquín– además de consecutivos, son tales que la suma de los diez dígitos es precisamente 62.

Joaquín le pregunta a Andrés si la suma de los dígitos de alguno de los billetes es 35 y, al saber la respuesta, puede decir correctamente el número de cada billete.

¿Cuáles eran esos números?

ARI 2. Fracciones y porcentajes

1. El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos representa el área del hexágono?



2. Alicia ahorra cada semana los $\frac{3}{4}$ de su paga. Si consigue ahorrar 312 euros al año, ¿cuál es la paga semanal de Alicia?

3. Si n es un entero y $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de n?

4. ¿Cuándo es un número entero el siguiente producto?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

5. Dos jarras de 600 mililitros cada una contienen zumo de naranja. Una está llena la tercera parte y la otra los dos quintos. Añadimos agua a cada una hasta llenarlas completamente y, posteriormente, las vaciamos en una jarra grande. ¿Qué fracción del líquido de la jarra grande es zumo de naranja?

6. Juan utiliza parte del dinero que lleva para comprar varios CDs, todos a igual precio. Si con un quinto del dinero que tenía ha pagado un tercio del total de los CDs que compró, ¿qué fracción del dinero que llevaba le quedará después de pagar todos los CDs?

7. ¡El 80 % de los estudiantes de este centro está a favor de que haya exámenes no avisados!, proclamó el Jefe de Estudios con satisfacción pero olvidando conscientemente que al 80 % de los estudiantes del centro no se les había preguntado nada. ¿Qué porcentaje de los estudiantes del centro le habían dicho al Jefe de Estudios que estaban a favor de los exámenes no avisados?

8. Si la base de un rectángulo aumenta un 15% y su altura un 20%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

9. En una clase aprobó el 66% de los alumnos y en otra, en la que había el doble, aprobó solamente el 57%. ¿Cuál es el porcentaje de aprobados entre las dos clases?

10. En una epidemia de gripe en Madrid, hace tres días, tenía gripe el 10% de la población y estaba sana el 90% restante. En los tres últimos días, el 10% de los enfermos se curó y el 10% de los sanos cogió la gripe. ¿Qué porcentaje de la población está ahora sana?

11. En una reunión, una de cada tres mujeres y dos de cada cinco hombres son fumadores, y hay doble número de hombres que de mujeres. ¿Cuál es la proporción de personas fumadoras?

12. **Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10% de los gatos se creen que son perros y el 10% de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?**

13. **En la fiesta del vals, $\frac{1}{3}$ de los chicos está bailando con $\frac{2}{5}$ de las chicas. ¿Qué fracción de personas no está bailando?**

14. **El parlamento de un país cuenta con 2000 diputados. El 12,121212…% de los diputados asistentes a una reunión son rubios y el 23,423423423…% fuman. ¿Cuántos diputados faltaron a esa reunión?**

ARI 3. Potencias y raíces

1. **Si desarrollamos el número $4^5 \cdot 5^{13}$, ¿cuántas cifras tendrá?**

2. **Un viaje espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 2^{20} km. Después de hacer un cuarto del trayecto, la nave pierde el contacto por radio con la Tierra, recuperándolo cuando está a 2^{19} km de ella. ¿Cuántos km recorrió la nave sin contacto por radio?**

3. **Si $8^{668} + 2^{2005} + 4^{1003} = 7 \cdot 16^x$, ¿cuánto vale x?**

4. **a) ¿Cuál es la cifra de las unidades de $3^{1001} \cdot 7^{1002} \cdot 13^{1003}$?**
b) ¿Cuál es la penúltima cifra de 11^{48} ?

5. **¿Cuál es el mayor entero n para el que $n^{200} < 5^{300}$?**

6. **¿Cuál es el valor de $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2005} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2005}$?**

7. Si $x > y > 0$, expresa $\dfrac{x^y \cdot y^x}{y^y \cdot x^x}$ como una única potencia.

8. Calcula el valor de $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$.

9. ¿Cuántas parejas de números hay cuyo mínimo común múltiplo sea $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ y su máximo común divisor sea $2^2 \cdot 5$?

10. La familia Abolengo es muy tradicional. Hace muchísimos años Pepita Abolengo tuvo tres hijas a las que dio su apellido (la primera generación) y, desde entonces, todas las mujeres Abolengo tienen siempre tres hijas de apellido Abolengo. Si van ya por la séptima generación de mujeres Abolengo, ¿cuántas mujeres Abolengo, incluida Pepita, han existido?

11. Si $1^2 + 11^2 + 21^2 + ... + 91^2 = S$, ¿cuánto vale la suma $2^2 + 12^2 + 22^2 + ... + 92^2$ en función de S?

12. ¿Cuál es el primer natural n para el que $(0,2)^n < 10^{-6}$?

ARI 4. Proporcionalidad

1. Dos gatos, *Mu* y *Mi*, cazaron entre los dos 60 ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

2. Un terreno está representado sobre un plano con una escala 1:2500 por un rectángulo de 64 mm de longitud y 48 mm de anchura. ¿Cuál es el área real del terreno?

3. Un albañil necesita 10000 ladrillos para cierto trabajo. Por su larga experiencia sabe que no más del 7% de los que le traigan se le van a romper. Si los ladrillos vienen en cajas de 100, ¿cuál es el mínimo número de cajas que debe pedir para estar seguro de acabar el trabajo?

Bloque I
Bloque II
Bloque III
Bloque IV

4. Tres personas se han repartido una cantidad de dinero directamente proporcional a los números 6, 3 y 2. Si la que menos recibe, ha recibido 300 euros, ¿qué cantidad total se repartió?

5. En cierta competición, se entregan premios en metálico a los clasificados en los tres primeros lugares. La cantidad total a entregar se divide en dos partes que está en la proporción 5:4, donde la parte mayor corresponde al primero y la otra se vuelve a dividir en dos partes en la misma razón 5:4, siendo ahora la mayor para el segundo y la pequeña para el tercero. Si el tercer clasificado recibe 290 euros menos que el primero, ¿cuántos euros recibió el segundo?

6. Una lámina de cristal absorbe el 20 % de la luz roja que le llega, es decir, deja pasar el 80 %. ¿Cuántas láminas de cristal debo colocar como mínimo, una encima de otra, para que pase como mucho la mitad de la luz roja que les llegue?

7. En un supermercado se vende detergente en tres tipos de envases: pequeño (P), mediano (M) y grande (G). El envase mediano cuesta un 50% más que el pequeño y contiene 20% menos detergente que el grande. El envase grande contiene doble detergente que el pequeño y cuesta un 30% más que el mediano. Ordena los tres tipos de envase, del más rentable al menos rentable.

8. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 4:20?

9. Una fotocopiadora tarda una hora en sacar *m* fotocopias y otra, para sacar el mismo número de fotocopias, tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos juntas en sacar ese número *m* de fotocopias?

10. Trabajando juntas, Ana y Cati pintan un mural en 10 horas; Ana y Gloria lo harían en 12 horas y Cati y Gloria en 15 horas. Si se pusieran las tres juntas a pintar, ¿en cuántas horas acabarían el mural?

11. En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

12. El jardín de Antonio es doble que el de Benito y triple que el de Carlos. Los tres empiezan a la vez a cortar la hierba, cada uno en su jardín. Carlos va la mitad de rápido que Benito y la tercera parte de rápido que Antonio.

¿Quién acabó el primero?

13. La torre Eiffel tiene 300 m de altura, está construida enteramente de hierro y pesa exactamente 8000 toneladas. Se quiere construir un modelo reducido de la torre, también de hierro y que pese 1 kg. ¿Cuál debe ser su altura?

ARI 5. Tiempo, distancia y velocidad

Algunos de los problemas de este tipo pueden resolverse generalizando juiciosamente el concepto de velocidad a cualquier magnitud que varíe con el tiempo y aplicando los mismos procedimientos empleados en la resolución de problemas de movimiento. Además ofrecen una oportunidad más de relacionar la aritmética con la geometría y el álgebra, contribuyendo así a percibir la unidad de la matemática.

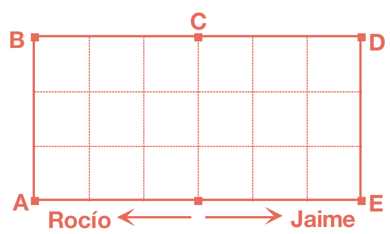
1. **Un grifo pierde una gota de agua cada segundo. Si 600 gotas de agua llenan una vasija de 100 mililitros, ¿cuántos litros de agua se pierden en 300 días?**

2. **Un ciclista va de excursión y cuando lleva recorrido un tercio del camino, para a comer un poco. Si en ese momento le faltan aún 11 km para llegar a la mitad del camino, ¿cuántos kilómetros tiene la excursión completa?**

3. **Un coche sale de un punto P a las 12 de la mañana a 90 km/hora. ¿A qué hora dará alcance a un ciclista que salió de P a las 7 de la mañana a 15 km/hora?**

4. **Para hacer un viaje de 30000 km utilizamos las cinco ruedas de un coche. (A veces cambiábamos una por la de repuesto). Si cada una de las cinco recorrió los mismos kilómetros, ¿cuántos km hizo cada una?**

5. **Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, ¿cuál, de los puntos indicados, será el más próximo cuando se encuentren por primera vez?**



6. **En cierto momento de un viaje, el conductor observa que el cuentakilómetros marca el número capicúa 35953 km y 75 minutos después el cuentakilómetros marca el capicúa siguiente. ¿Cuál es la velocidad media, en km/hora, del coche durante esos 75 minutos?**

7. ***Rayo* corre a velocidad constante, y *Centella* m veces más rápido que *Rayo* (m es un número mayor que 1). Si *Centella* le da una ventaja de h metros a *Rayo*, ¿qué distancia, en metros, debe recorrer *Centella* para alcanzar a *Rayo*?**

8. En Matematilandia hay un sistema muy curioso de limitación de velocidad: A 1 km del centro de la ciudad hay una señal de limitación de velocidad a 120 km/hora; a medio kilómetro, otra limitación a 60 km/hora, a $\frac{1}{3}$ de km, la limitación de velocidad llega a 40 km/hora; a $\frac{1}{4}$ km, la señal es de 30 km/hora, a $\frac{1}{5}$ km de 24 km/hora y, finalmente, a $\frac{1}{6}$ de km del centro de la ciudad, hay una señal de limitación de velocidad a 20 km/hora. Si viajas siempre a la velocidad límite, ¿qué tiempo tardas en llegar desde la señal de 120 km/hora al centro de la ciudad?

9. Un triángulo equilátero está originariamente pintado de negro. Cada minuto cambia, de forma que la cuarta parte de cada triángulo negro se vuelve blanca.
Al cabo de 5 minutos, ¿qué parte del triángulo original sigue estando de negro?

10. Dos ciclistas marchan a velocidad uniforme. El más lento tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km y recorre 1 km menos que el otro en 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad, en km/hora, del ciclista más rápido?

11. Luis y Esteban tuvieron que ir, cada uno en su coche, desde Madrid al pueblo de Luis.

Ambos viajaron a velocidad constante. Esteban salió a las 7 de la mañana y llegó a la una de la tarde y Luis salió una hora más tarde que Esteban pero llegó hora y media antes que éste. ¿A qué hora alcanzó Luis a Esteban?

12. En el pueblo de Luis solo tienen dos caminos. Uno de ellos tiene un tramo en muy mal estado y el otro es intransitable en una longitud triple que la anterior, siendo ambos tramos uniformemente malos. El alcalde decide que eso no puede seguir así y, para ello, dispone de una brigadilla de mantenimiento (con la virtud de que todos los hombres tienen el mismo rendimiento).

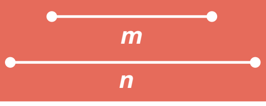
Durante día y medio la brigadilla al completo trabaja en el tramo largo. El resto del segundo día se reparten mitad por mitad entre los dos tramos y finalizan el más largo.

Por fin, el tercer día, 2 hombres trabajando durante toda la jornada terminan el tramo corto. ¿Cuántos hombres componen la brigadilla?

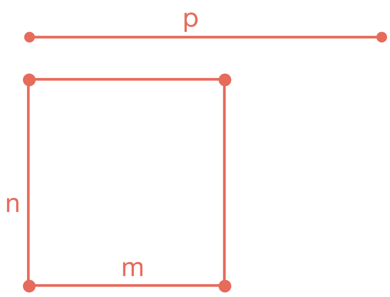
Bloque II. Enunciados

GEO 1. Construcciones geométricas con GeoGebra

1. **Dados dos segmentos de longitudes *m* y *n*, respectivamente, construye el segmento media geométrica de longitud $\sqrt{m \cdot n}$. Indica cómo usar el resultado anterior para hallar las medidas $\sqrt{n}$, donde *n* es un número natural positivo.**
Usa también la construcción para obtener un cuadrado equivalente (de igual área) al rectángulo de lados *m* y *n*.



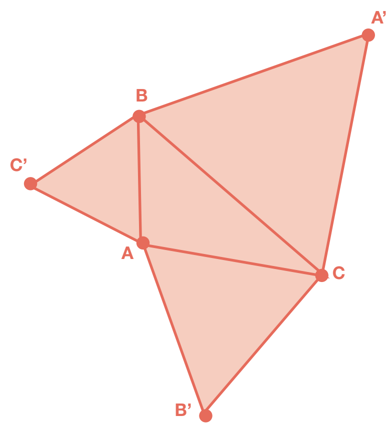
2. **Dado un rectángulo de lados *m* y *n*, construye un rectángulo equivalente de lado *p*.**



3. **En un triángulo cualquiera ABC, construye el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro F. Comprueba que están alineados (la recta que pasa por G, F y H se llama recta de Euler). Mide los segmentos HG y GF y calcula el cociente de sus medidas. Tira ahora de uno de los vértices del triángulo y observa que se mantiene la proporción. Fija de nuevo un triángulo ABC y construye el triángulo definido por sus puntos medios. Razona en el nuevo dibujo las relaciones observadas de F, G y H.**

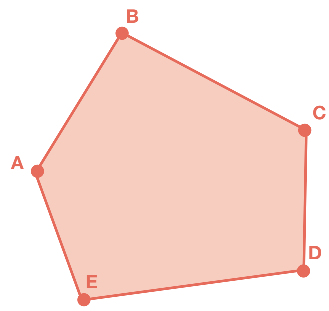
4. **Problema de Napoleón.**

Dado un triángulo cualquiera ABC, sobre cada lado construye triángulos equiláteros hacia afuera ABC', BCA' y CAB'. Comprueba que los centros de los equiláteros forman así mismo un triángulo equilátero. Comprueba que las circunferencias circunscritas a estos equiláteros se cortan en un punto T. Comprueba que T es también la intersección de los segmentos AA', BB' y CC'. Comprueba también que desde T se ven los lados de ABC con un ángulo de 120º.

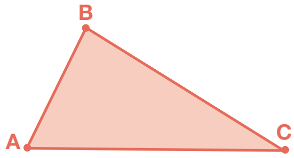


5. **Problema de Fermat.**
Seguimos en el dibujo del problema anterior. Tira de un vértice para que el triángulo no tenga un ángulo mayor de 120º. Dibuja un punto P dentro del triángulo, y calcula la suma de distancias de P y de T a los vértices A, B y C. Comprueba, moviendo P, que la suma de las distancias es mayor que la suma de las distancias de T.

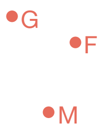
6. Dado el pentágono convexo ABCDE, encuentra un cuadrilátero con igual área.



7. Dado un triángulo ABC, dibuja un hexágono convexo de igual área.

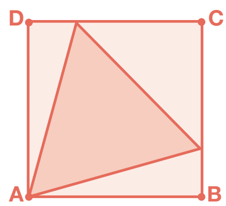


8. Construye un triángulo conociendo su circuncentro F, su baricentro G y un punto medio M de un lado.



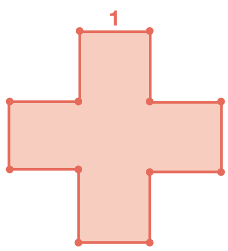
9. Construye un rectángulo áureo, sabiendo que sus lados están en proporción $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10. Dado un cuadrado ABCD, construye un triángulo equilátero inscrito en el cuadrado y que tenga A como vértice.



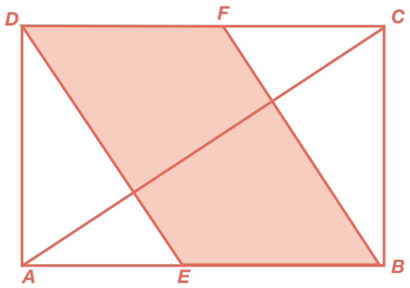
11. Usando la igualdad $5 = 2^2 + 1^2$, trocea un cuadrado y con los trozos forma cinco cuadrados iguales.

12. Trocea una cruz griega de lado 1 en cuatro trozos y con ellos forma un cuadrado.

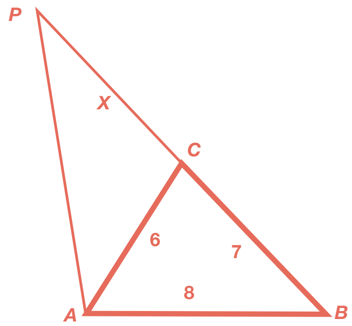


GEO 2. Teoremas de Pitágoras y Tales

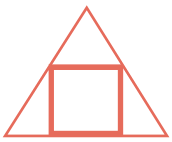
1. En el rectángulo que se muestra en la figura, *DE* y *FB* son perpendiculares a *AC*. Si *AB* = 18 cm y *BC* = 12 cm, calcula la longitud del segmento *EB* y el área del paralelogramo *EBFD* sombreado.



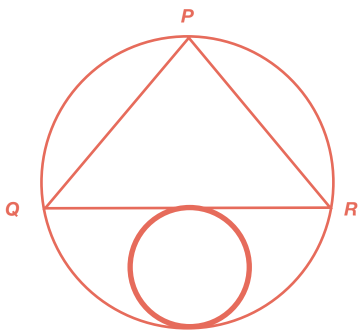
2. Prolongamos el lado *BC* del triángulo *ABC* hasta un punto P de forma que el triángulo *PAB* sea semejante al triángulo *PCA*. Si *AB* = 8, *BC* = 7 y *CA* = 6, calcula la longitud de *PC*.



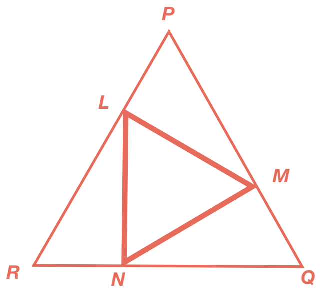
3. Un cuadrado de lado 1 m está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo?



4. En una circunferencia de radio 6 inscribimos el triángulo isósceles *PQR* en el que *PQ* = *PR*.
Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base *QR* del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura. Si la longitud de *PQ* es $4\sqrt{5}$, ¿cuál es el radio de la circunferencia pequeña?

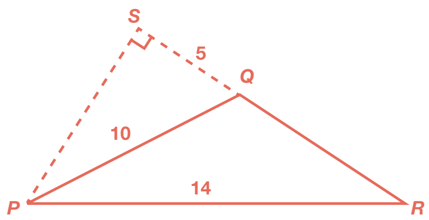


5. El triángulo equilátero *LNM*, inscrito en otro triángulo equilátero *PRQ*, tiene un área igual a 7 cm². Si el lado *LN* es perpendicular al lado *RQ*, ¿cuál es el área del triángulo grande *PRQ*?



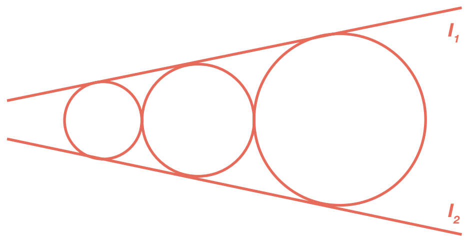
6. En una circunferencia tenemos dos cuerdas paralelas de longitudes 10 cm y 14 cm que distan 6 cm entre sí. Halla la longitud de la cuerda paralela a ambas y que equidista de ellas.

7. En el triángulo PQR, $PR = 14$ y $PQ = 10$.
Si prolongamos RQ hasta que corte en S a la perpendicular PS, resulta que $QS = 5$. ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?

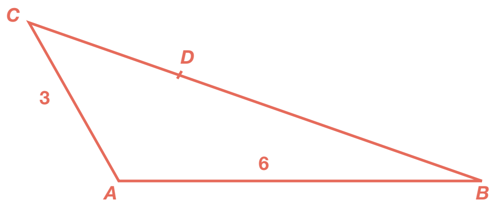


8. En un día soleado, reposa sobre un campo horizontal una gran esfera. En cierto momento, la sombra de la esfera llega hasta una distancia de 10 m del punto donde dicha esfera toca el suelo. En el mismo instante, un bastón de 1 m, colocado verticalmente, produce una sombra de 2 m. ¿Cuál es el radio de la esfera?
(Suponemos que los rayos del Sol son paralelos y que el bastón lo podemos representar por un segmento).

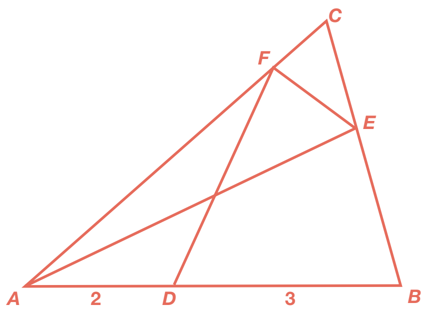
9. Las tres circunferencias de la figura adjunta son tangentes a las rectas l_1 e l_2 y además, cada una de ellas es tangente a la anterior. Si el radio de la mayor es 9 y el de la menor 4, ¿cuál es el radio de la del medio?



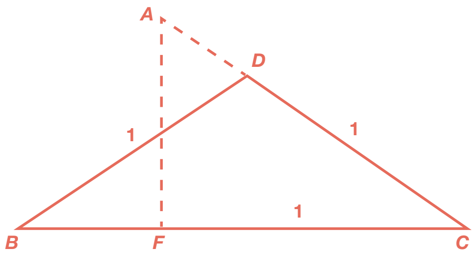
10. Tomamos un punto D en el lado CB de un triángulo ABC en el que $AC = 3$ y $AB = 6$. Si $\angle CAD = \angle DAB = 60º$, calcula la longitud del segmento AD.



11. El área del triángulo ABC de la figura es 10. Los puntos D, E y F, todos distintos de A, B y C, están, como se observa, en los lados AB, BC y CA respectivamente, siendo $AD = 2$ y $DB = 3$. Si el triángulo ABE y el cuadrilátero $DBEF$ tienen áreas iguales, ¿cuál es el valor de esta área?



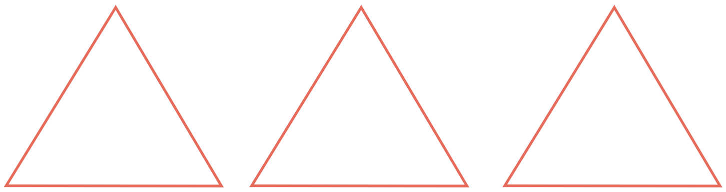
12. En el triángulo isósceles BCD de la figura, sus lados iguales miden $BD = DC = 1$. Por un punto F del lado BC, situado a 1 de distancia del vértice C, se traza una perpendicular a este lado y corta a la prolongación del lado DC en un punto A de manera que el triángulo ABC es rectángulo. Calcula la longitud de AC y de BC.



GEO 3. Polígonos. Cuadriláteros

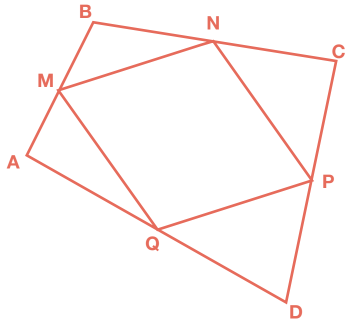
1. **Un triángulo cualquiera puede ser dividido en cuatro triángulos iguales semejantes al de partida. Un triángulo equilátero puede ser dividido en tres triángulos isósceles iguales, y un triángulo isósceles puede ser dividido en dos triángulos rectángulos iguales.**

Divide cada uno de los tres triángulos equiláteros dados en veinticuatro triángulos rectángulos iguales. Hazlo de tres formas diferentes.



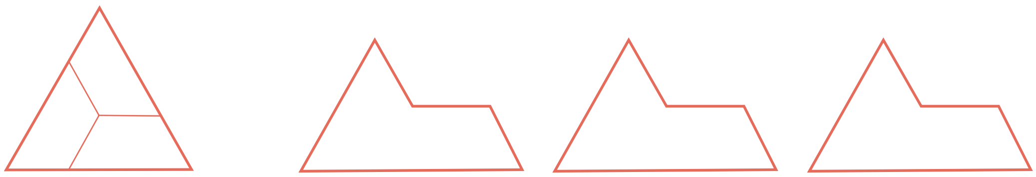
2. **Unimos en el sentido de avance de las agujas del reloj los puntos medios de un cuadrilátero convexo (según aparece en el dibujo). Prueba que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo.**

¿Cuál es la relación de áreas entre los dos cuadriláteros?

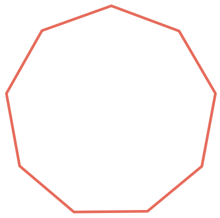


3. **Dividimos un triángulo en tres trapecios isósceles iguales. Llamamos esfinges a las figuras formadas por dos de ellos.**

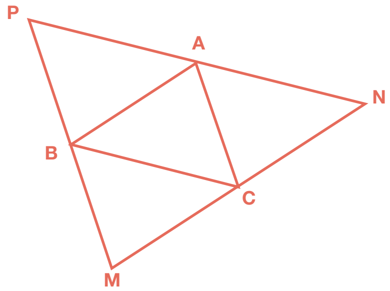
Divide la primera esfinge de abajo en seis triángulos equiláteros iguales, la segunda esfinge en cuatro esfinges iguales y la tercera esfinge en ocho trapecios isósceles.

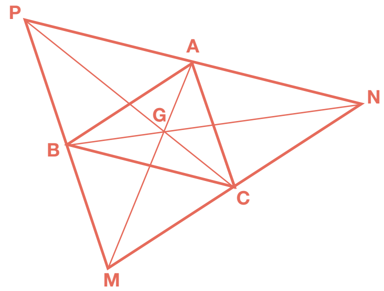


4. **Razona cómo calcular el ángulo interior de un polígono regular de *n* lados.**

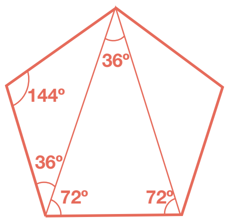


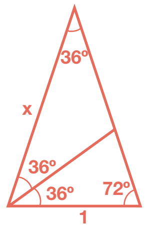
5. Ya sabes, y ahora queremos que demuestres, que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto G (baricentro) y que la distancia de un vértice a G es dos tercios de la longitud de la mediana correspondiente. Si el corte de dos medianas tiene esa propiedad de distancia, la tercera tendrá que pasar también por ese punto. Para probar esa proporción de medidas te proponemos usar un triángulo MNP y el que se obtiene uniendo sus puntos medios.





6. A los triángulos isósceles con un ángulo de 36º los llamamos áureos. Los vemos aparecer en el pentágono regular. Se llama número de oro (y se denota por la letra griega ϕ) a la razón entre el lado grande y el pequeño. A partir de la descomposición del triángulo áureo de la derecha en dos triángulos áureos, calcula el valor de ϕ.





7. **a) Iguales por lados perpendiculares**

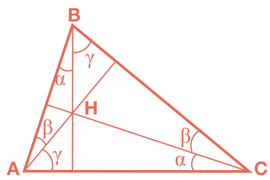
En un triángulo acutángulo dibujamos su ortocentro H y lo unimos con segmentos a los vértices. Prueba que se da la relación de ángulos del dibujo.

b) Iguales por relación cíclica algebraica

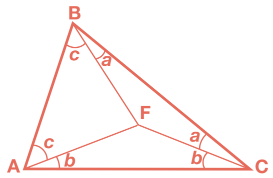
En el mismo triángulo dibujamos su circuncentro F y lo unimos también con los vértices, obteniéndose la relación de ángulos del dibujo.

Demuestra algebraicamente que: $\alpha = a$, $\beta = b$ y $\gamma = c$.

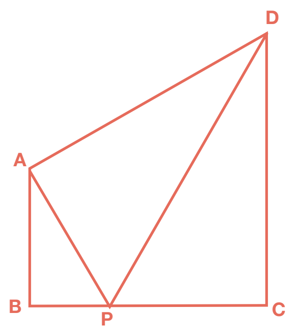
a)



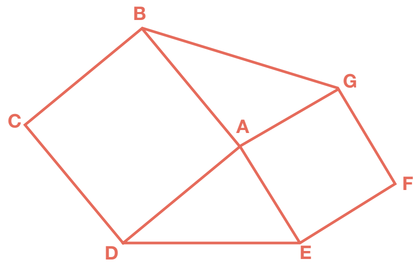
b)



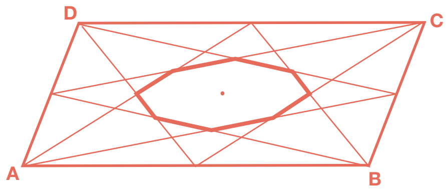
8. Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el triángulo ABP tiene de área 12 cm² ¿cuál es el área del trapecio *ABCD*?



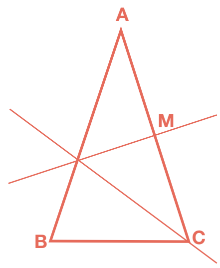
9. **El dibujo de la derecha está formado por dos cuadrados y dos triángulos. Razona que los dos triángulos tienen igual área.**



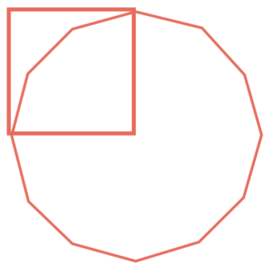
10. **En un paralelogramo se une cada vértice con los puntos medios de los lados no contiguos envolviendo dichos segmentos un octógono. Dividiendo este octógono en quesitos, calcula su razón de área con el paralelogramo**



11. **En un triángulo isósceles ABC, donde $\overline{AB} = \overline{AC}$, se verifica que la mediatriz del lado AC y la bisectriz de $\hat{C}$ se cortan en el lado AB. Halla sus ángulos.**

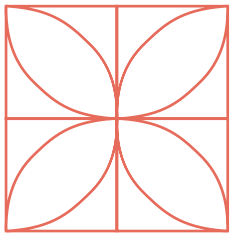


12. **Razona a partir del dibujo, la relación entre las áreas del dodecágono regular y el cuadrado de lado igual al radio de la circunferencia circunscrita.**

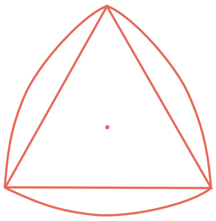


GEO 4. La circunferencia

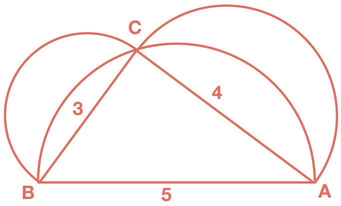
1. **En el dibujo, trazando semicircunferencias con centro los puntos medios de un cuadrado de lado 2 dm, hemos dibujado una flor de cuatro pétalos. ¿Cuál es su área?**



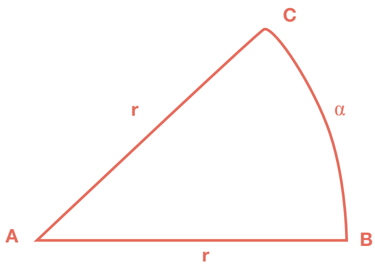
2. **Haciendo centro en los vértices de un triángulo equilátero de lado 2 dm hemos dibujado arcos de vértice a vértice. La curva así obtenida es de anchura constante. ¿Qué área encierra?**



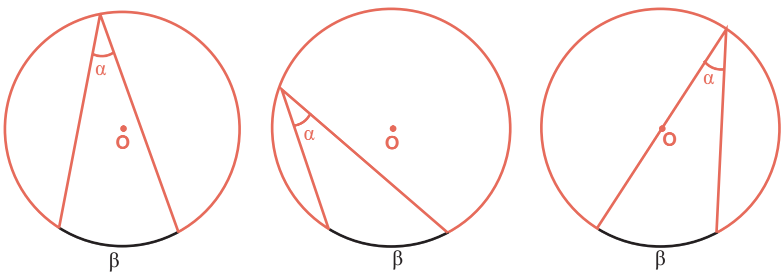
3. **En el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, trazamos semicircunferencias con centro en los puntos medios de los lados como se ve en el dibujo. Las dos lunas formadas son conocidas como lúnulas de Hipócrates. ¿Cuál es la suma de sus áreas?**



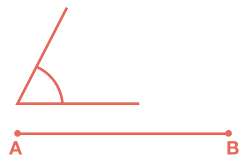
4. **Llamamos radián al ángulo de un sector circular cuyo arco mide lo mismo que el radio. Así la circunferencia mide 2π radianes (es decir, en una circunferencia caben un poco más de 6,28 radios). Sea un sector circular de radio r, ángulo a radianes y perímetro 4 m. Expresa su área en función de r. Razona que el área es máxima cuando $r = 1$.**



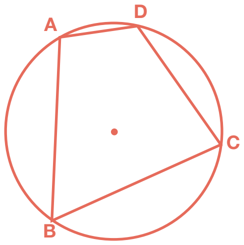
5. **En los tres dibujos podemos ver las diferentes posiciones del centro O de una circunferencia respecto a un ángulo inscrito (dentro, fuera y en un rayo del ángulo). Demuestra en los tres casos que el ángulo inscrito mide la mitad en grados del arco que abarca.**



6. **Construcción del arco capaz**
Halla el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo α.

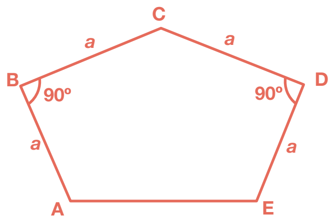


7. Probar que los cuadriláteros convexos inscritos en una circunferencia, son aquellos cuyos ángulos opuestos suman 180º.

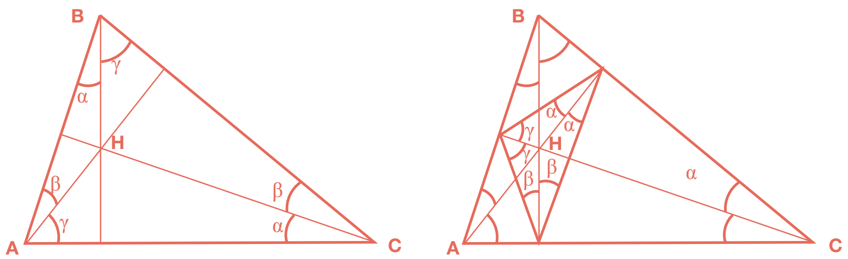


8. Dibuja un pentágono convexo ABCDE de forma que

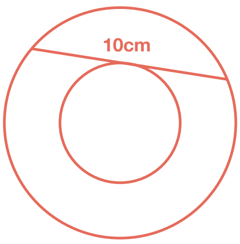
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = a$, y que $\hat{B} = \hat{D} = 90º$.



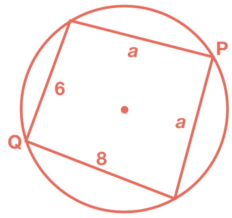
9. En un triángulo acutángulo trazamos las alturas, y marcamos el ortocentro H y los ángulos que forman las alturas con los lados. Con los pies de las alturas construimos el llamado triángulo órtico. Prueba que H es el incentro de este nuevo triángulo (incluso se da la relación de ángulos expresada por los dos dibujos)



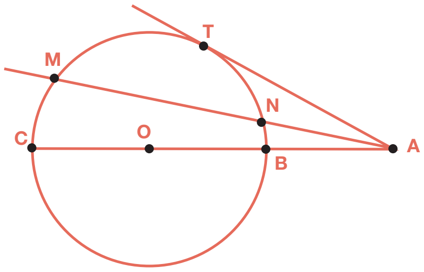
10. En una corona circular, la cuerda de la circunferencia exterior que es tangente a la circunferencia interior mide 10 cm. ¿Cuánto mide el área de la corona circular?

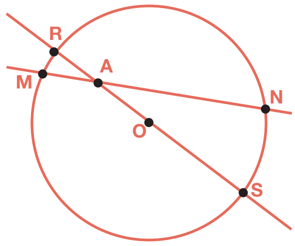


11. El cuadrilátero de la figura está inscrito en una circunferencia y tiene ángulos rectos en P y en Q. Tiene dos lados iguales y los otros dos miden 6 y 8 cm. ¿Cuál es, en cm^2, su área?



12. **Potencia de un punto respecto a una circunferencia**
Desde un punto A exterior a una circunferencia *C*, trazamos una secante que la corta en *M* y *N*, y una tangente en *T* a dicha circunferencia.
Prueba que se tiene la igualdad de producto de distancias: $d(A, N) \cdot d(A, M) = d(A, T)^2$.
Este invariante métrico se conoce como "la potencia de un punto respecto a una circunferencia". Exprésalo en función del radio y la distancia del centro al punto.
El concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia *C* puede ser generalizado para puntos interiores y para puntos de la circunferencia (en estos últimos es natural definir la potencia como 0)
No costará mucho probar que los triángulos *AMR* y *ANS* son semejantes y que por ello $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AR} \cdot \overline{AS}$. Este producto con signo menos es igual a $\overline{OA}^2 - R^2$, y es la potencia de A con respecto a la circunferencia C. Su carácter negativo es interpretado como debido a la distinta orientación de los segmentos AM y AN.





GEO 5. Cuerpos Geométricos

Para la obtención de áreas o volúmenes de figuras semejantes actuaremos cogiendo figuras con medidas lineales cómodas para el cálculo, y luego aplicaremos la razón de semejanza al cuadrado o al cubo según el caso.

1. **Área del triángulo equilátero de lado *l*. Área del hexágono regular de lado *l*.**

2. **Área del octógono regular de lado *l*.**

3. **Área del dodecágono regular de lado *l*.**

4. **Área del triángulo de vértices A(2, 7), B(6, –1) y C(13, 4)**

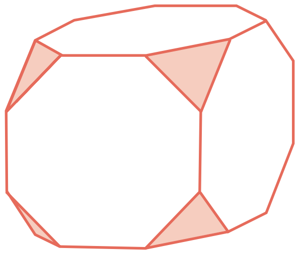
5. **Volumen del tetraedro regular de lado *l*.**

6. **Volumen del octaedro regular de lado *l*.**

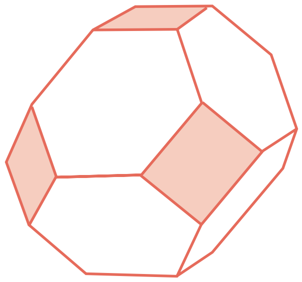
7. **Volúmenes de los sólidos obtenidos al girar el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 alrededor de uno de sus lados.**

8. **Volumen del tetraedro regular truncado de lado *l*.**

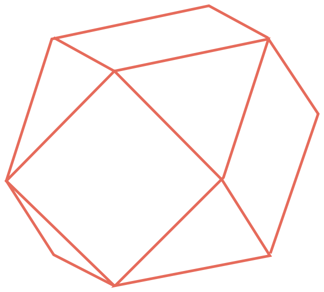
9. **Volumen del cubo truncado de lado *l*.**



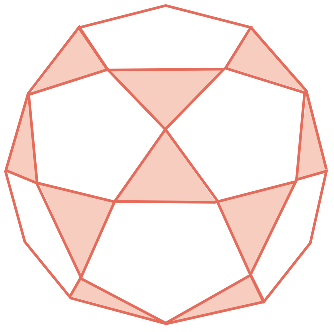
10. **Volumen del octaedro regular truncado de lado *l*.**



11. **Volumen del cuboctaedro de lado *l*.**



12. **Usando la fórmula de Euler y la uniformidad de los vértices, calcula el número de caras (triángulos y pentágonos) el número de vértices y el de aristas del icosidodecaedro.**



Bloque III

PRO 1. Técnicas de recuento. Combinatoria

1. En Julio de 2008 se celebró en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participaron chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 101 países. Si el delegado de cada país da un apretón de manos a los demás delegados, ¿cuántos apretones en total se dieron en la inauguración?

2. Con las letras de la palabra *NADIE* podemos formar 120 palabras (o agrupaciones de cinco letras) utilizando todas sus letras. Si se ordenan alfabéticamente las 120, ¿qué lugar ocupa la palabra *NADIE* en esa relación?

3. Los números combinatorios son los números del triángulo de Pascal. Ello es consecuencia de que el triángulo de números combinatorios de la derecha cumple las dos reglas de formación del triángulo de Pascal:

a) Los extremos de una fila son unos: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

b) Los números del interior se obtienen como suma de los dos inmediatamente superiores:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1} \text{, siendo } 0 \leq k < n.$$

Queremos que demuestres esta última igualdad partiendo de la definición de:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

4. Con los números 1, 2, 3 y 4 formo todos los números posibles de 4 cifras cada uno, por ejemplo, 3214, 1111, 2234 serían algunos. ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

5. Las fórmulas de combinaciones de n elementos tomados de k en k coinciden con las de permutaciones con repetición de n elementos con índices de repetición k y $n-k$. Te pedimos que lo compruebes estableciendo una correspondencia término a término entre las parejas de números diferentes elegidos del 1 al 6 y las claves formadas con dos a´s y cuatro b´s.

6. ¿De cuántas formas puedo repartir 12 caramelos iguales entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

7. Un restaurante ofrece en cada cena tres postres y doble número de primeros platos que de segundos. Cada cena consiste en un primero, un segundo y un postre. ¿Cuál es el menor número de segundos platos que tiene que ofrecer para que un cliente pueda tomar cenas diferentes durante los 365 días de un año?

8. El código de cierta caja de seguridad consiste en cuatro dígitos, no necesariamente distintos, y dos letras que tampoco tienen por qué ser distintas. Estos seis caracteres pueden aparecer en cualquier lugar, con la condición de que las letras deben ir siempre juntas. Si podemos elegir entre 26 letras, ¿cuántos códigos válidos hay?

9. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos una que sea 2 ó 3?

10. De los 6300 primeros enteros positivos, ¿cuántos no son múltiplos ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7?

11. En una cuadrícula 5 x 5 seleccionamos tres de los 25 cuadraditos, de forma que no haya dos de ellos que estén en una misma fila o columna. ¿Cuántas elecciones son posibles?

12. En una excursión hay seis turistas y dos guías. Cada turista debe elegir un guía pero cada guía debe tener al menos un turista. ¿Cuántos posibles grupos guía-turista pueden hacerse?

PRO 2. Estadística

1. En un grupo de hombres y mujeres la edad media es 31 años. Si la media de la edad de los hombres es 35 años y la de las mujeres es 25, calcula el cociente entre el número de hombres y el de mujeres.

2. Se consideran los números p, q, r, s y t. La media de p, q y r es 8 y la media de p, q, r, s y t es 7. ¿Cuál es la media de s y t?

3. La edad media de los integrantes de un grupo de *boy-scouts* aumentaría en un año si abandonaran el grupo cinco chicos de 9 años de edad cada uno o si se unieran al grupo cinco chicos de 17 años cada uno. ¿Cuántos chicos componen dicho grupo?

4. **La media aritmética de los nueve números del conjunto {9, 99, 999, …, 999999999} es un número *M* de nueve cifras, todas distintas. ¿Cuál es la cifra que no está en *M*?**

5. **Dados cuatro números, elegimos tres, calculamos su media y a la media de estos tres le sumamos el cuarto número. Como ves, esto lo podemos hacer de cuatro formas, dejando cada vez uno de los números sin elegir. Si obtenemos como resultados 17, 21, 23 y 29, ¿cuál es el mayor de los cuatro números que teníamos?**

6. **En una reunión hay un cierto número de personas. Curiosamente, la media de las edades de esas personas coincide con el número de personas que hay. Entra entonces en la reunión una persona de 29 años y vuelve a coincidir la edad media de las que hay con el número de personas. ¿Cuántas personas había en la reunión al principio?**

7. **El peso medio de las patatas que había en una bolsa subió al doble cuando a las cuatro patatas que había añadimos una patata inmensa. ¿Cuál es el cociente entre el peso de este patatón y la suma de los pesos de las cuatro patatas que había?**

8. **En un centro se hizo la misma prueba del Concurso de Primavera a un pequeño grupo de alumnos de ESO y a todos los de Bachillerato. La media global fue de 84 puntos. Los de ESO, que eran solamente el 10%, obtuvieron todos la misma puntuación y la media de los de Bachillerato fue de 83 puntos. ¿Cuál fue la puntuación de cada estudiante de ESO?**

9. **De una lista de nueve números, sabemos que seis de ellos son 7, 8, 3, 5, 9 y 5. ¿Cuál es el mayor valor posible para la mediana de los nueve?**

10. **La media, mediana, moda (única) y recorrido de un conjunto de ocho enteros son todos iguales a 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en este conjunto?**

11. **En un cierto concurso de problemas de matemáticas, el 10% de los participantes obtuvo 70 puntos, el 25%, 80 puntos, el 20% obtuvo 85 puntos, el 15% obtuvo 90 puntos y el resto de los participantes, obtuvo 95 puntos. ¿Cuál fue la diferencia entre la media y la mediana de las puntuaciones de ese examen?**

12. **Añadimos un número *n* al conjunto {3, 6, 9, 10} formando así un conjunto de cinco elementos. Si la media del conjunto resultante es igual a su mediana, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de *n*?**

PRO 3. Probabilidad

1. **Beatriz escoge al azar dos números distintos del conjunto {8, 9, 10} y los suma. Carlos escoge también al azar otros dos números distintos del conjunto {3, 5, 6} y los multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido por Beatriz sea mayor que el obtenido por Carlos?**

2. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos coincida con el del otro dado?**

3. **Pedro elige al azar dos números distintos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y Quino elige uno del conjunto {1, 2, 3, 4, …, 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Quino sea mayor que la suma de los dos que eligió Pedro?**

4. **¿Cuál es la probabilidad de que un entero del conjunto {1, 2, 3, …, 100} sea divisible por 2 pero que no sea divisible por 3?**

5. **Al lanzar una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras sea mayor que el de cruces?**

6. **Al tirar dos dados usuales de seis caras, ¿cuál es la probabilidad de que haya una diferencia de tres puntos entre los resultados de las dos caras superiores?**

7. **Tenemos dos dados con las caras numeradas de la siguiente forma: 1, 1, 2, 2, 3, 3, en uno de ellos y 4, 4, 5, 5, 6, 6, en el otro. Los lanzamos y sumamos los números obtenidos en la cara superior. ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea impar?**

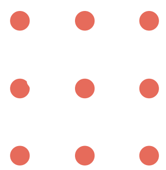
8. **Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos y sólo dos caras seguidas?**

9. **En una bolsa hay dos bolas rojas y dos azules. Se sacan a la vez dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?**

10. Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números obtenidos sean los dígitos de un cuadrado perfecto?

11. Tiramos un dado tres veces. Halla la probabilidad de suma 8 y la probabilidad de suma 12. Busca un razonamiento, que no sea simplemente contando, que nos permita conocer las probabilidades de las distintas sumas.

12. Elegimos al azar tres puntos de los nueve del diagrama que mostramos. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?



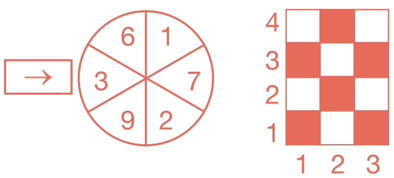
13. Nadal y Federer juegan un partido al mejor de cinco sets, es decir, quien gane tres sets ha ganado el partido. La probabilidad de ganar cada set es $\frac{1}{2}$ para cada jugador y el ganar o no un set no influye en la probabilidad de ganar el siguiente. Si Federer ganó el segundo set y Nadal ganó el partido, ¿cuál es la probabilidad de que Federer ganara también el primer set?

14. Hacemos girar dos veces la ruleta de la figura y apuntamos el número que marca la flecha. Dividimos el primer número entre 4 y el segundo entre 5.

Los restos obtenidos designan, respectivamente, una columna y una fila del tablero de la figura.

¿Cuál es la probabilidad de que el par de restos

designe un cuadrado de color blanco?



15. Elegimos al azar cuatro números, *a*, *b*, *c*, *d*, entre los enteros 1, 2, …, 2010. ¿Cuál es la probabilidad de que *ad* - *bc* sea un número par?

16. Un jugador paga 5 € por participar en el siguiente juego:

Lanza un dado. Si aparece un número impar, ha perdido. Si aparece un número par, vuelve a lanzar el dado. En el caso de que aparezca el mismo número que antes, ha ganado; en cualquier otro caso, ha perdido. ¿Qué probabilidad tiene de ganar? ¿Cuánto debería ganar si el juego es justo?

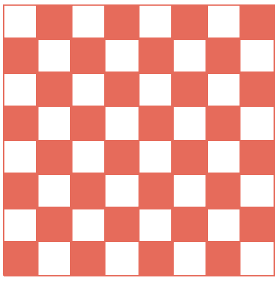
Bloque IV. Enunciados

DEP 1. Paridad

1. **a) ¿Es posible cubrir completamente un tablero de ajedrez de 8 x 8 con piezas de dominó de 1 x 2? ¿Cuántas fichas necesitas?**

b) ¿Y si quitamos las esquinas de una diagonal?

c) Un juego de dos jugadores consiste en ir colocando fichas de dominó sobre el tablero de ajedrez. El primero que no pueda colocar, pierde. En este juego el segundo jugador siempre puede ganar. ¿Cuál es la estrategia ganadora?



2. **a) Un caballo de ajedrez parte de la esquina superior izquierda del tablero de ajedrez (posición a1) y retorna allí después de unos cuantos movimientos. ¿Cómo debe ser el número de movimientos que realiza: par o impar?**

b) ¿Puede un caballo salir de la posición a1 y llegar a la posición h8 (esquina inferior derecha) pasando por todas las casillas exactamente una vez?

3. **a) Colocamos todas las fichas de dominó en fila haciendo coincidir el número de puntos de fichas contiguas. Si en un extremo hay un 5, ¿qué número hay en el otro extremo? ¿Puedes hacerlo colocando fichas dobles en los extremos? ¿Y sólo en un extremo?**

b) De un dominó quitamos la ficha 1-2, ¿es posible formar una cadena con las fichas restantes? ¿Es posible formar una cadena con las fichas restantes de modo que uno de los extremos acabe en 6?

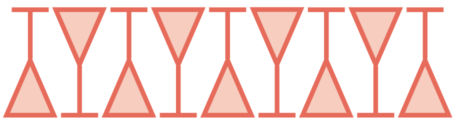
c) De un dominó quitamos las siete fichas que tienen alguna de sus partes blancas. ¿Puedes colocar el resto formando una única cadena?

4. **Tenemos sobre la mesa una hilera de copas.**

Hay 4 boca arriba alternándose con 5 que están boca abajo.

Se trata de ir dando vuelta a las copas, siempre de dos en dos, hasta conseguir que queden 5 boca arriba y 4 boca abajo.

¿Cómo debes hacerlo?



5. a) Completa con los signos + y – para que el resultado sea cero.

b) Un saltamontes está dando saltos, todos sobre una línea recta pero indistintamente hacia la derecha o hacia la izquierda, como le viene en gana. El primer salto es de 1 cm, el segundo de 2, el tercero de 3 y así sucesivamente. ¿Puede llegar al sitio del que partió después de 265 saltos?

a) 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 = 0

6. Busca seis números impares *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* que verifiquen $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$

7. Carmen y sus amigos están sentados alrededor de una mesa redonda. Observan que cada uno tiene a su izquierda y a su derecha dos amigos del mismo sexo. Si hay cinco chicos, ¿cuántas chicas hay?

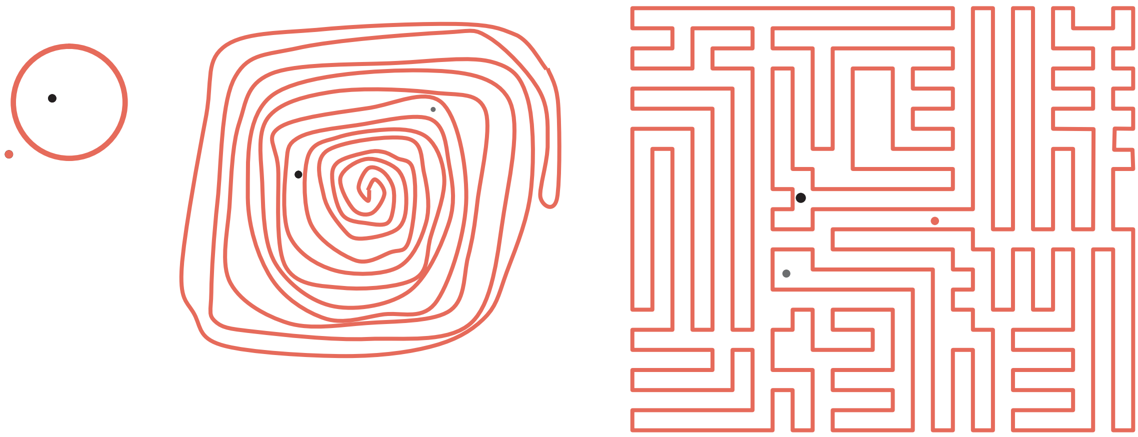
8. Julián tiene 125 monedas de las cuales 62 son falsas y pesan un gramo menos que las auténticas. El peso de cada moneda es un número entero. Julián dispone de una balanza de platillos que indica con total precisión la diferencia de pesos entre los dos platillos. Julián desea saber si una moneda en concreto es verdadera o falsa. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que debe realizar para conseguirlo?

9. Escribimos en la pizarra los números del 1 al 185. Cada alumno sale a la pizarra, borra dos números y escribe en su lugar la diferencia entre el mayor y el menor de los números borrados. Se sigue jugando hasta que solo quede un número en la pizarra. ¿Puede ser ese número el cero?

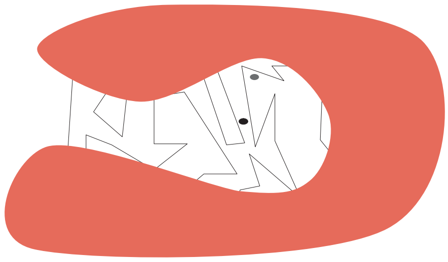
10.

Dentro o fuera

Teorema de Jordan: Una curva cerrada que no se corta a sí misma divide al plano en dentro y fuera. Aunque a veces no es tan fácil saber qué es dentro y qué es fuera. ¿Podrías decir si estos puntos están dentro o fuera de las curvas?



Para terminar de complicar las cosas, mientras estudiaba esta curva se me derramó el café. Ayúdame a decidir si los puntos están dentro o fuera.



11.

El juego de las piedras

Dos jugadores juegan a ir cogiendo alternativamente una o dos piedras de un montón de *N* piedras. Gana el jugador que, cuando ya no queden piedras en la mesa, tenga en su poder un número par de piedras.

Analiza el juego para distintos valores de *N*. ¿Pueden darse empates? ¿En qué casos habrá siempre un único ganador?

Para los casos en que no haya empates, ¿qué jugador ganará y cómo debe jugar?

DEP 2. Principio del palomar

1. **En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que hay dos calcetines del mismo color?**

2. **En un club deportivo se practica fútbol, hockey o baloncesto. Hay 13 equipos en total. Demuestra que hay al menos cinco equipos del mismo deporte.**

3. **Escribimos doce enteros distintos de dos cifras. Demuestra que siempre podremos elegir dos de ellos cuya diferencia sea un número del tipo *aa*.**

4. **Dividimos un cuadrado en nueve cuadraditos iguales. En cada uno de ellos escribimos 1, –1 ó 0. Después sumamos los tres números que hay en cada fila, los tres de cada columna, y los tres de cada una de las dos diagonales. Demuestra que entre estas ocho sumas hay dos que tienen el mismo valor.**

5. **Pintamos 51 puntos en un cuadrado de 1 metro de lado. Demuestra que hay al menos tres puntos que pueden taparse con una ficha cuadrada de 20 cm de lado.**

6. **En un grupo de cinco personas, al menos dos tienen el mismo número de amigos en el grupo. ¿Es cierto? Justifica tu repuesta.**

7. **Varios equipos de fútbol participan en un torneo, en el cual cada uno de ellos debe jugar con cada uno de los restantes exactamente un partido. Demuestra que en cualquier momento del torneo hay dos equipos que han jugado el mismo número de partidos.**

8. **A un congreso asisten 201 científicos de cinco nacionalidades distintas. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que habrá un grupo de cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.**

9. **Se colocan 33 torres sobre un tablero de ajedrez. Demuestra que siempre habrá al menos cinco que no se ataquen mutuamente.**

10. **Consideramos seis puntos sobre una circunferencia. Trazamos todos los segmentos que unen dos de los puntos, coloreándolos en rojo o en azul.**

Demuestra que cualquiera que sea la coloración, siempre se formará un triángulo cuyos lados son los tres del mismo color.

(Este problema se puede enunciar en otros términos: seis personas asisten a una fiesta. Seguro que hay al menos tres que se conocen de antes, o tres que no se conocen).

11. **Matematilandia tiene sólo un aeropuerto, pero tiene quince equipos de fútbol, con 11 jugadores cada uno. Todos ellos tienen que viajar hoy a Madrid, donde se celebra un campeonato, y no han reservado billete. Salen diez vuelos de Matematilandia a Madrid, y cada uno de ellos tiene 15 plazas libres. El jugador Messiov decide viajar en su avioneta particular. Demuestra que al menos un equipo llegará completo a Madrid.**

12. **Demuestra que si elegimos 51 números entre los números 1, 2, 3 ,..., 100 siempre habrá dos al menos que sean primos entre sí.**

DEP 3. Problemas de generalización

1. **Observa la siguiente tabla en la que hemos ido colocando los números siguiendo una espiral: ¿En qué fila quedará colocado el número 400?**

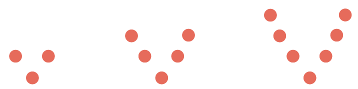
FILA 3	37	38	39	40	41	42	43
FILA 2	36	17	18	19	20	21	44
FILA 1	35	16	5	6	7	22	45
FILA 0	34	15	4	1	8	23	46
FILA –1	33	14	3	2	9	24	47
FILA –2	32	13	12	11	10	25	48
FILA –3	31	30	29	28	27	26	49
FILA –4						51	50

2. **Las siguientes figuras muestran letras (V, W, L y Z) de distinto tamaño construidas siguiendo ciertas pautas con un número entero de puntos. Podemos hablar así de números V, W, L y Z: por ejemplo, 3, 5 y 7 son números V y 5, 9 y 13 son números W.**

Para cada construcción contesta:

Números V

V_1 V_2 V_3



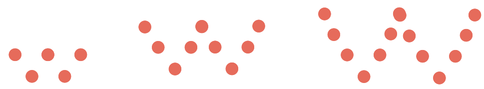
¿Hay números V con 54 puntos?

¿Y con 23?

Calcula cuántos puntos tiene V_n.

Números W

W_1 W_2 W_3



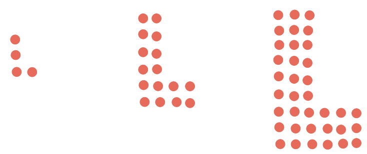
¿Hay números W con 29 puntos?

¿Y con 55?

Calcula cuántos puntos tiene W_n.

Números L

L_1 L_2 L_3



¿Hay números L con 192 puntos?

¿Y con 256?

Calcula cuántos puntos tiene L_n.

Números Z

Z_1 Z_2 Z_3

¿Hay números Z con 33 puntos?

¿Y con 46?

Calcula cuántos puntos tiene Z_n.

3. **a) ¿Cuánto suman los diez primeros números naturales? ¿Y los diez mil primeros números naturales? Encuentra una fórmula para la suma de los *n* primeros números naturales.**

b) ¿Cuánto suman los veinte primeros números impares? ¿Y los cinco mil primeros números impares? Encuentra una fórmula para la suma de los *n* primeros números impares.

4. El 23 de agosto de 2009 fue hallado por un equipo de la Universidad de los Ángeles, California (UCLA) el mayor número primo conocido hasta la fecha: $2^{43112609} - 1$.

Es un primo de Mersenne, esto es, de la forma $2^n - 1$ y tiene 12.978.189 dígitos. ¿En qué cifra acaba?

Dos números primos que son impares consecutivos se denominan *primos gemelos*. Por ejemplo, 11 y 13, 29 y 31 son primos gemelos. La mayor pareja de primos gemelos conocida hasta el momento es

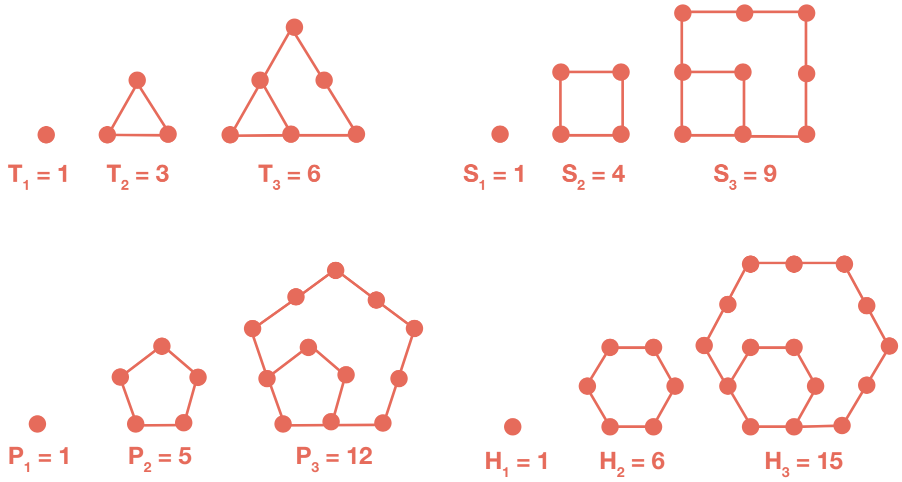
$(65516468355 \cdot 2^{333333} - 1,\ 65516468355 \cdot 2^{333333} + 1)$

¿Puedes decirnos en qué cifra acaban?

5. **Números poligonales**

Algunos números están asociados a polígonos y tienen nombres geométricos:

Aquí tienes representados los números triangulares y los números cuadrados, los pentagonales y los hexagonales.



a) Encuentra una fórmula para S_n.

b) Dibuja una estructura que represente el número cuadrado S_7 como suma de dos números triangulares consecutivos. ¿Cuáles? ¿A qué número cuadrado es igual $T_9 + T_{10}$?, ¿y $T_n + T_{n+1}$?

c) Encuentra una fórmula para T_n.

d) Busca una relación entre los números pentagonales y los triangulares. ¿Sabrías encontrar una fórmula que nos dé un número pentagonal cualquiera?

e) Busca una relación entre los números hexagonales y los triangulares. ¿Sabrías encontrar una fórmula que nos dé un número hexagonal cualquiera?

6. En un bar hay mesitas cuadradas de cuatro plazas. Uniendo tres de ellas en fila pueden sentarse ocho personas. ¿Cuántas personas pueden sentarse si unimos 20 mesas? ¿Cuántas mesas debemos unir para sentar a 19 personas? ¿Y para sentar a 233? Da una fórmula que indique el número de mesas necesarias para que se sienten *N* personas.

7. **Los triángulos de Sierpinski.**

Observa las cuatro figuras que te damos: en la primera, hay un triángulo equilátero rojo. Cada una de las siguientes se obtiene de la anterior repitiendo cierto proceso.

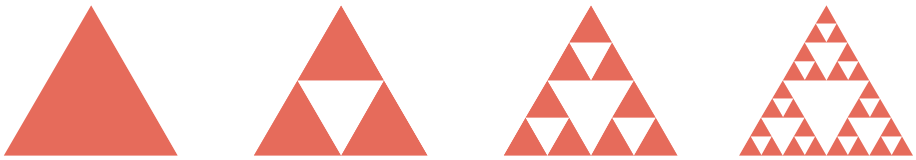
a) ¿Cómo se forma la siguiente figura?

b) Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es 1 u², ¿cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el decimoprimero?

c) ¿Y el área de la parte blanca?

d) ¿Cuántos triángulos de cada color habrá en la figura 1200?

e) Si el perímetro del triángulo grande es 1 u, ¿cuál será el perímetro de la zona roja en la enésima figura?



8. **Números de Fibonacci y patrones con ladrillos**

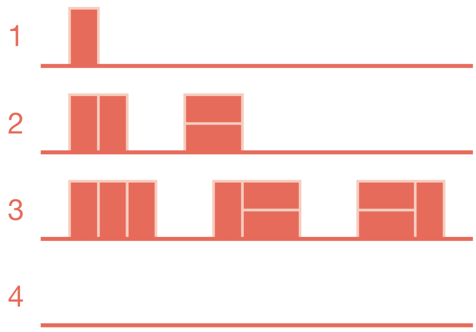
Si queremos construir una pared de dos unidades de alto con ladrillos que miden 2 X 1 unidades, podemos hacerlo de distintas formas según el largo de la pared. Observa la figura:

Si queremos que sea de longitud 1, solo podemos hacerlo de una forma, si la queremos hacer de longitud 2, tenemos dos opciones, …

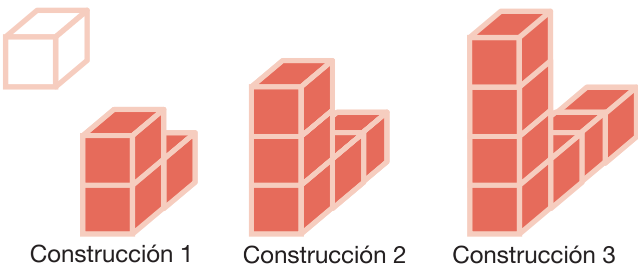
¿Cuántas formas hay de hacer un muro de longitud 4? ¿Y 5?

Halla las formas que hay de construirlo para longitudes de 1 a 10.

Observa los números que obtienes, ¿cómo se forma la sucesión?



9. **Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de L y una vez armadas, pintamos de rojo las caras visibles (las que apoyan en el suelo no son visibles). En la construcción 500, ¿cuántas caras pintaré?**



Bloque I Bloque II Bloque III Bloque IV

10. **El triángulo de Pascal**

Observa la siguiente pirámide.

a) Escribe las dos filas siguientes

b) ¿Cuánto suman los números de la fila *n*?

1	Fila 0
1 1	Fila 1
1 2 1	Fila 2
1 3 3 1	Fila 3
1 4 6 4 1	Fila 4
1 5 10 10 5 1	Fila 5
1 6 15 20 15 6 1	Fila 6

11. **Las torres de Hanoi**

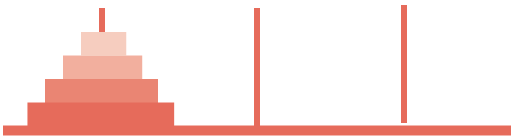
(Puedes jugar online en http://www.aulademate.com/contentid-99.html)

Objetivo: llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.

Reglas del juego:

- **No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.**
- **Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.**

Encuentra una regla que relacione el número de movimientos necesarios para resolver una torre de *n* discos habiendo ya resuelto una torre de *n* – 1 discos. Para ello comienza estudiando las torres más sencillas.



12. **Las ranas saltarinas**

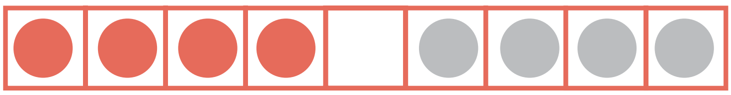
(Puedes jugar online en http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog)

Objetivo: intercambiar la posición de las ranas.

Reglas del juego:

- **Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.**
- **No se puede saltar por encima de más de una rana.**
- **Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.**

¿Cuántos movimientos son necesarios con 4 ranas de cada color? ¿Y con 100?



DEP 4. Sistemas de numeración

A lo largo de la historia el ser humano ha tenido necesidad de contar y de representar de alguna forma las cantidades que contaba. Para pequeñas cantidades podía utilizar marcas en un bastón, nudos en una cuerda, etcétera, pero para cantidades grandes era preciso utilizar otros métodos más sofisticados: los sistemas de numeración.

Todos los sistemas de numeración utilizan símbolos (puntos, rayas, letras, dibujos, guarismos,...) con distintos valores para representar diferentes cantidades. La diferencia entre unos sistemas y otros es la forma en la que se utilizan esos símbolos.

Los sistemas de numeración suelen clasificarse en tres grupos:

Aditivos. Se suman los valores de los símbolos utilizados.
Híbridos. Se combinan el principio aditivo con el multiplicativo.
Posicionales. El valor de los símbolos o cifras depende de su posición.

Como ejemplos de sistemas aditivos tenemos los sistemas de numeración egipcio, azteca, romano y los alfabéticos de los griegos. El chino clásico es un ejemplo de sistema híbrido.

Los babilonios y mayas utilizaron sistemas de numeración posicionales, pero fue la cultura india, antes del siglo VII, la que desarrolló el sistema de numeración tal y como hoy lo conocemos.

En los sistemas de numeración posicional se utilizan diferentes bases, siendo la base 10 la que se utiliza habitualmente. En este sistema decimal se precisan 10 cifras o guarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

En el sistema binario, de base 2, se utilizan dos cifras: 0 y 1. En el octal, de base 8, se utilizan 8 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. En el hexadecimal, de base 16, se utilizan 16 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F.

En los sistemas digitales se emplea el sistema binario debido a su sencillez.
Cualquier número natural escrito en una base k, se puede representar mediante la siguiente expresión polinómica:

$$N = a \cdot k^n + b \cdot k^{n-1} + \ldots + f \cdot k^2 + g \cdot k^1 + h \cdot k^0 = (ab \ldots fgh)_{(k}$$

Así, por ejemplo, el número 32058 escrito en base 10 es:

$$32058_{(10} = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8 = 30000 + 2000 + 50 + 8$$

El número $31014_{(5}$ que está escrito en base 5, es igual a:

$$31\,014_{(5} = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4$$

que escrito en base 10 (nuestra base habitual) sería:

$$3 \cdot 625 + 1 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 = 1875 + 125 + 5 + 4 = 2009$$

Siendo *k* la base del sistema de numeración, se cumplirá que k >1, y las cifras *a*, *b*,…, *f*, *g*, *h* corresponden a los números naturales 0, 1, 2,… menores que *k*.

1. **El sistema de numeración griego**

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

1 5 10 50 100 500 1000 5000 10000

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10, 100 y 1.000 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (*pente*), diez (*deka*), cien (*hekaton*) y mil (*khiloi*). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico. Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo.

Por ejemplo, el número 3737 en el sistema de numeración griego es:

3000 + 500 + 200 + 30 + 5 + 2 = 3737

a) Escribe las siguientes cantidades en el sistema de numeración griego: 973, 2011, 27 548.

b) Expresa en este sistema de numeración los años de los siguientes acontecimientos históricos y el tiempo que transcurrió entre ambos:

El descubrimiento de América y la Revolución francesa.

2. **El sistema de numeración romano**

Es un sistema aditivo pero que también utiliza una notación substractiva. Para efectuar sumas y restas en este sistema es preciso eliminar la notación substractiva, para agregar (en el caso de la suma) o suprimir (en el caso de la resta) los símbolos de los operandos. Posteriormente se reducen los símbolos necesarios y si es preciso se vuelve a utilizar la notación substractiva.

Así por ejemplo para efectuar la suma 119 + 44 + 83, es decir, CXIX + XLIV + LXXXIII se procede de la siguiente manera:

Paso	Descripción	Ejemplo
1	**Eliminar la notación substractiva.**	CXIX + XLIV + LXXXIII ⟶ CXVIIII + XXXXIIII + LXXXIII
2	Concatenar los términos.	CXVIIIIXXXXIIIILXXXIII
3	Ordenar los numerales de mayor a menor.	CLXXXXXXXXVIIIIIIIIIII
4	Simplificar el resultado reduciendo símbolos.	CLLXXXVVVI ⟶ CCXXXXVI
5	Añadir notación substractiva	CCXXXXVI ⟶ CCXLVI
6	Solución.	CCXLVI

Y para efectuar la resta 116 – 24, es decir, CXVI – XXIV, se procede así:

Paso	Descripción	Ejemplo
1	Eliminar la notación substractiva.	CXVI – XXIV ⟶ CXVI - XXIIII
2	Eliminar los numerales comunes entre los términos.	CXVI – XXIIII ⟶ CV – XIII
3	Expandir los numerales del primer término hasta que aparezcan elementos del segundo.	CV – XIII ⟶ LLIIIII – XIII ⟶ LXXXXXIIIII – XIII
4	Repetir los pasos 2 y 3 hasta que el segundo término quede vacío.	LXXXXXIIIII – XIII ⟶ LXXXXII
5	Añadir notación substractiva.	LXXXXII ⟶ XCII
6	Solución.	XCII

Efectúa las siguientes operaciones con números romanos y comprueba después el resultado utilizando nuestro sistema de numeración decimal.

a) CDLXXIV + CCCXLVII + CCXCIX

b) CXLIV – LXXXIV

3. **Problemas aparentemente absurdos.**

a) La mitad de doce es siete.

b) El doble de 3 es 11.

c) Si 4 + 4 = 12 entonces 3 x 5 es igual a…

d) Si 8 x 8 = 54 entonces 4 x 5 es igual a…

e) Estas dos multiplicaciones son feas:

6 x 2 A 7 = F E A y 7 F 5 x 2 = F E A

Estos problemas no son tan absurdos como parecen: resulta que utilizan distintos sistemas de numeración en los que son perfectamente lógicos.

Averigua en cada uno de ellos el sistema en el que la respuesta tiene sentido.

4. **Una pareja de novios escribe sus edades una a continuación de la otra, formando un número de 4 cifras que resulta ser un cuadrado perfecto, k^2. Once años más tarde repiten la operación, en el mismo orden, y ahora les vuelve a resultar otro número de 4 cifras, cuadrado de otro entero once unidades mayor que el entero k de la vez anterior. ¿Qué edad tenía cada uno de ellos cuando formaron el número k^2?**

5. **El número secreto de la nueva tarjeta de crédito de Javier tiene 4 dígitos, y está formado por dos números de dos cifras, ordenados de mayor a menor.**

Estos son los dos únicos números de dos cifras que son iguales a la suma del cuadrado de la cifra de las decenas y el cubo de la cifra de las unidades.

¿Cuál es el número secreto de la tarjeta de Javier?

6. **La expresión $abc_{(4}$ representa a un número de tres cifras escrito en base 4. Si se verifica que $abc_{(4}$ es el doble de $bca_{(4}$, calcula todas las posibilidades de los dígitos a, b y c y expresa esos números en la base decimal.**

7. **Los primeros 2010 enteros se han escrito en base 3. ¿Cuántos de ellos son capicúas?**

8. **El número 1089 es tal que si lo multiplicamos por 9 se obtiene el número 9801. Observa que ambos números tienen los mismos dígitos pero su orden está invertido. Averigua qué número de cinco cifras tiene esta misma propiedad, es decir, que al multiplicarlo por 9 se obtiene un número que contiene las mismas cifras en orden inverso.**

9. **Los números de la siguiente suma están escritos en un sistema de numeración de base n) y cada letra representa un dígito. Letras distintas representan dígitos distintos. Determina a qué digito corresponde cada letra. ¿Existe alguna base para la que no tenga solución?**

$$\begin{array}{r} ABC \\ AB \\ +\quad A \\ \hline 300 \end{array}$$

10. **Un grupo de alumnos no tiene profesor y, aprovechando el momento, uno de los alumnos escribe en la pizarra un número de 6 cifras. Cuando llega el profesor de guardia, borra la primera cifra de la izquierda y la escribe al final del número, quedando así un número que es el triple del que había escrito el alumno.**

¿Qué número había escrito el alumno en la pizarra?

Si hubiera más de una posibilidad calcúlalas todas.