TEMA 21: FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. FUNCIONES ELEMENTALES: SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

TIEMPO: 78 — 74

Esquema

1) Introducción
    1.1) Geometría Analítica
    1.2) G.A. y Análisis
        1.2.1) Euler - Lagrange - Actualidad
2 Definiciones
    2.1) Función, dominio, imagen, antiimagen, representación cartesiana
3) Operaciones con funciones
    3.1) Suma, producto, potencia, cociente
        3.1.1) Interpretación geométrica
    3.2) Composición de funciones
        3.2.1) Función recíproca
4) Estructura algebraica
    4.1) Suma, producto, operación externa
5) Características de una función
    5.1) Acotación
    5.2) Curvatura
    5.3) Máximo y mínimo
    5.4) Monotonía
    5.5) Periodicidad
    5.6) Puntos de corte con los ejes
    5.7) Signo
    5.8) Simetrías
    5.9) Traslaciones
6) Funciones elementales y situaciones en las que aparecen
    6.1) Primer grado
    6.2) Segundo grado
    6.3) Racionales
    6.4) Valor absoluto
    6.5) Funciones inversas

1) Introducción:

▷ Geometría Analítica: si se tienen en cuenta diversos factores como los avances científicos en Astronomía, Mecánica o Navegación y las necesidades sociales ligadas a nuevos desarrollos industriales y formas de producción, no resulta extraño que a principios del s. XVII (albores de la Revolución Industrial) apareciese una nueva rama de las Matemáticas relacionada con éstos: la Geometría Analítica (posteriormente lo harían el cálculo diferencial e integral).

▷Geometría Analítica y Análisis: los conceptos de variable y función por sí solos no determinan el nacimiento del Análisis. Las ideas que se van acumulando durante el s. XVII sobre el concepto de función irán desde las más simplistas (Napier) hasta los trabajos de Euler, pasando por Newton o Leibniz y consolidarán al Análisis como una rama particular y fundamental de las Matemáticas (la definición actual es del s. XIX y va sufriendo aportes continuamente).

▷ El primer gran tratado sobre funciones fue la obra de Euler. Él las clasificó según fueran pares, impares, unívocas, multiformes, ... y, en general, atendiendo a las propiedades que se conservaban o no después de efectuar una operación dada. Sin embargo, Euler obvió la idea de función como correspondencia para considerarla como combinación de operaciones.

▷ El primer tratado sistemático sobre funciones en Análisis se lo debemos a Lagrange, aunque éste se restringe solamente a las funciones analíticas (aquellas que admiten un desarrollo como serie de potencias).

▷ Pero, a pesar de la utilidad del tratado de Lagrange, la noción de función continuó siendo imprecisa y nuevos problemas aparecieron a lo largo del s. XIX. Gracias a los trabajos de Dirichlet, Weierstrass o Russell se empezó a concretar la naturaleza de las funciones.

▷ En la actualidad las funciones se definen dentro de las relaciones entre conjuntos formando parte de la Teoría de Conjuntos.

▷ También señalaremos que funciones como “la delta de Dirac”, “la escalera del infierno” o la función característica del conjunto ternario de Cantor se han ido incorporando al concepto de función y que la discusión sobre su naturaleza (que excede el contenido de este tema) han ayudado a concretar la noción de función que hoy en día tenemos.

2) Definiciones:

▷**<u>Definición</u>**: llamamos <u>función real de variable real</u> a toda aplicación $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

▷ De la propia definición observamos que cada elemento $a \in A$ tiene una única imagen $f(a) \in \mathbb{R}$

▷**<u>Definición</u>**: llamamos <u>domino de f</u> al conjunto: $D(f) = A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists y = f(x) \in \mathbb{R}\}$

▷**<u>Definición</u>**: llamamos <u>imagen o recorrido de f</u> al conjunto:
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$

▷**<u>Definición</u>**: llamamos <u>antiimagen de $y \in \mathbb{R}$</u> al conjunto $f^{-1}(y) = \{x \in A \text{ tq } f(x) = y\}$

▷ Las funciones reales de variable real las representaremos en $\mathbb{R}^2$ tomando dos rectas perpendiculares entre si y unidades de medida sobre cada una de esas rectas. La variable independiente "x" la representaremos en el eje horizontal o eje de abscisas: $\mathbb{X}$. La variable dependiente $y = f(x)$ en el eje vertical o eje de ordenadas: $\mathbb{Y}$. De esta forma, la pareja ordenada, $(x, f(x))$ nos determina unívocamente puntos en el plano.

3) Operaciones con funciones:

▷*Nota*: para esta sección $A \cap B = D \neq \emptyset$, donde $A = D(f) y B = D(g)$

▷Suma de funciones:

▷ Dadas $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \subseteq\to \mathbb{R}$ definimos $h = f + g : D \to \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

▷ Se define análogo para la diferencia tomando "$-g$"

▷Producto de funciones:

▷ Dadas $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \subseteq\to \mathbb{R}$ definimos $h = (f \cdot g) : D \to \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

▷Cociente de funciones:

▷ Sea $\widehat{D} = D - \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } g(x) = 0\}$ y definimos $h = (f/g) : \widehat{D} \to \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = (f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

▷Potencia de funciones:

▷ Sea $\widehat{D} = D - \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) < 0, f(x) = g(x) = 0\}$ y definimos $h = (f^g) : \widehat{D} \to \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = (f^g)(x) = (f(x))^{g(x)}$$

▷Interpretación geométrica de las operaciones con funciones: de las definiciones que hemos hecho se ve que las operaciones son puntuales (punto a punto) por lo que dadas dos funciones, cuando operemos con ellas, nos fijaremos en sus valores para $x = a \in D$ (o $\widehat{D}$) y los sumamos, restamos, multiplicamos,...

▷Composición de funciones:

▷**Definición**: dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \subseteq\to \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$, llamamos función compuesta de $f(x)$ y $g(x)$ o "f" compuesta con "g" a una nueva función que obtenemos aplicando "g" a las imágenes de "f".

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \text{ dada por } (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

▷ La composición de funciones es asociativa, no es conmutativa en general (es decir, no se cumple siempre la igualdad: $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$) y tiene elemento neutro (la función identidad: $\mathrm{Id}(x) = x$).

▷Función recíproca/inversa:

▷**Definición**: dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ definimos la función recíproca/inversa como $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ a la función que cumple lo siguiente:

$$(f \circ f^{-1})(x) = \mathrm{Id}_{f(A)} = x = (f^{-1} \circ f)(x) = \mathrm{Id}_A(x) = x$$

▷ Para que la definición tenga sentido "f" ha de ser inyectiva (es decir $f(a) = f(b) \longleftrightarrow a = b$). Además, si "$f$" es estrictamente monótona, f^{-1} también tiene esa misma monotonía.

4) Estructura algebraica:

▷**<u>Definición</u>**: llamamos <u>$\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$</u> al conjunto de todas las funciones reales de variable real cuyo dominio es A.

▷ Con la suma de funciones anteriormente definida, $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ es un grupo abeliano, esto es, cumple las propiedades:

a) Asociativa: $(f+g)+h = f+(g+h)$

b) Conmutativa: $f+g = g+f$

c) Elemento neutro: $f+0 = 0+f$, donde $0: A \to \mathbb{R}$, $0(x) = 0$

d) Elemento opuesto: $f+(-f) = (-f)+f = 0$

▷ Si a $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ le añadimos el producto de funciones, obtenemos un anillo abeliano unitario, es decir:

a) Asociativa: $f(gh) = (fg)h$

b) Conmutativa: $fg = gf$

c) Elemento neutro: $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$, donde $1: A \to \mathbb{R}$, $1(x) = 1$

▷ Si a $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ le añadimos la operación externa "multiplicar por un escalar", obtenemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es decir, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$:

a) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$

b) $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$

c) $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

d) $1 \cdot f = f$, donde $1 \in \mathbb{R}$

▷ En $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}), \bullet)$ no tiene por qué existir el inverso siempre. Es más, si $\exists x \in A$ tal que $f(x) = 0$, entonces $\nexists f^{-1}$. En caso de existir: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

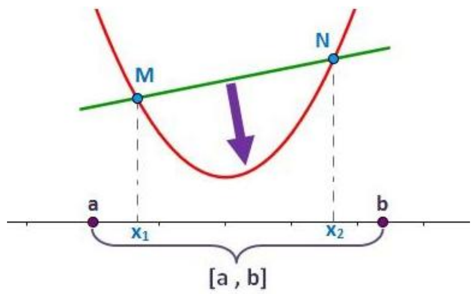
▷*<u>Nota</u>*: no confundir esta inversa para el producto con la inversa para la composición. Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ tiene inversa para el producto pero no para la composición.

5) Características de una función:

▷ **Nota**: podemos estudiar multitud de propiedades de las funciones de variable real, pero no olvidemos que, se supone, este tema va antes que los del cálculo diferencial e integral, por lo que nuestra aproximación será más básica.

▷ 1) Acotación: decimos que "f" está acotada superiormente (inferiormente) si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq M)$ $\forall x \in A$. Llamaremos a M cota superior (inferior). A la menor de las cotas superiores la llamaremos supremo (a la mayor de las cotas inferiores la llamaremos ínfimo). Si el supremo (ínfimo) pertenece a $f(A)$ será el máximo (mínimo) absoluto de la función. Diremos que una función está acotada si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$

▷ 2) Curvatura: sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Diremos que "f" es convexa si se verifica: $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y)$.



Geométricamente la función queda por debajo del segmento que une $f(x)$ con $f(y)$, $\forall x, y \in I$. Una función es cóncava si se da ">" en la desigualdad anterior.

▷ 3) Máximos y mínimos: decimos que la función "f" presenta un máximo (mínimo) relativo en "x_0" si $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$. Cuando podemos quitar el "ε" tenemos un máximo (mínimo) absoluto.

▷ 4) Monotonía: hallar la monotonía es buscar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Decimos que una función es estrictamente creciente en $x_0 \in A$ si se cumple que $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall h \in]0, \varepsilon[$, $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ (análogo para estrictamente decreciente: $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$). Esto nos dice que en puntos muy cercanos a x_0 por la izquierda sus imágenes son menores y lo opuesto para los puntos situados a su derecha. Si se cumple la igualdad en alguna de las desigualdades diremos que la función es creciente (decreciente) y si se dan ambas, que "f" es constante en "x_0".

▷ Equivalentemente, diremos que una función es estrictamente creciente en $]a, b[\leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in]a, b[$ con $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$. Análogo para crecientes y decrecientes. En particular, diremos que una función es estrictamente creciente si se cumple:

$$\forall h > 0 : \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

▷ 5) Periodicidad: una función "f" es periódica de período T cuando $\forall x \in A$ se tiene que $f(x + T) = f(x)$

$\triangleright$ 6) Puntos de corte con los ejes:

- Eje $\mathbb{X}$: es obtener los $x_0 \in A$ de manera que $f(x_0) = 0$, $\{(x_0, 0)\}$
- Eje $\mathbb{Y}$: es obtener el punto $y_0 \in \mathbb{R}$ tales que $f(0) = y_0$, $\{(0, y_0)\}$ (sólo habrá uno como mucho).

$\triangleright$ 7) Signo: determinar el signo de una función es hallar para qué valores de la variable sus imágenes son positivas o negativas. Para ello usaremos los intervalos de continuidad, donde se mantiene el signo, y los puntos de corte con el eje $\mathbb{X}$.

$\triangleright$ 8) Simetrías:

- Decimos que "f" es simétrica respecto al eje $\mathbb{Y}$/es par si se cumple que $\forall x \in A$, $f(x) = f(-x)$
- Decimos que "f" es simétrica respecto al origen/es impar si $\forall x \in A$, $f(x) = -f(-x)$

$\triangleright$ 9) Traslaciones: sea $f(x)$ y consideramos la función $g(x) = f(x+k)$, que corresponderá a la gráfica de $f(x)$ trasladada horizontalmente k unidades a la izquierda si $k > 0$ o a la derecha si $k < 0$. Si tratamos $g(x) = f(x) + k$ su gráfica es igual a la de $f(x)$ trasladada k unidades verticalmente hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$

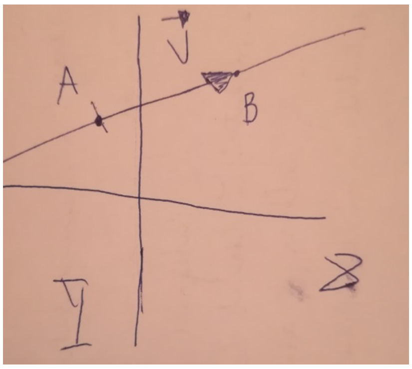
6) Funciones elementales y situaciones en las que aparecen

▷ Funciones polinómicas de primer grado:

▷ Una función polinómica de primer grado es una recta $y = m \cdot x + n$ donde $m \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{R}$

▷**Definición**: al valor "m" se lo conoce como la pendiente de la recta e indica el ángulo con el que incide la recta sobre el eje $\mathbb{X}$ ($\sphericalangle = \arctan(m)$).

▷ Para determinar una recta nos hacen falta dos puntos, un punto y su pendiente, un punto y su vector director. Debido a nuestra elección de "m" no admitimos rectas paralelas a alguno de los ejes. Vamos a deducir la ecuación de la recta a partir de dos puntos.



$r \equiv \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{v}$ con t $\in \mathbb{R}$: **Ecuación vectorial de la recta**

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + v_1 \cdot t \\ y = a_2 + v_2 \cdot t \end{array}\right\} : \ \textbf{Ecuación paramétrica de la recta}$$

$\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$: **Ecuación implícita/continua de la recta**

$y - a_2 = m \cdot (x - a_1)$ con m$=\dfrac{v_2}{v_1}$: **Ecuación punto-pendiente de la recta**

$y = m \cdot x + n$: **Ecuación explícita de la recta**

$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$: **Ecuación normal/general de la recta**

▷ Algunas de las situaciones reales donde nos podemos encontrar funciones polinómicas de primer grado son las siguientes: espacio y tiempo en movimiento uniforme, interés obtenido por un capital fijo y el tiempo depositado, presión y temperatura de un gas a volumen constante, etc.

▷$D(f) = Im(f) = \mathbb{R}$ y si $m > 0$ son crecientes y si $m < 0$ son decrecientes (estrictamente).

▷ <u>Funciones polinómicas de segundo grado:</u>

▷ Una función polinómica de segundo grado es una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz). Todas las parábolas tienen un eje de simetría paralelo al eje $\mathbb{Y}$ y el punto de intersección del eje con la parábola es el vértice de la misma: $v = \dfrac{-b}{2a}$

▷ Si $a > 0$ la parábola es convexa, tiene sus ramas hacia arriba y su vértice es el mínimo de la función. Si $a < 0$ es cóncava, tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es su máximo.

▷ Si $\triangle = b^2 - 4ac > 0$ la parábola corta la eje $\mathbb{X}$ en dos puntos, que vienen dados por la archiconocida fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Si $\triangle = 0$ hay un único punto de corte (que es solución doble). Si $\triangle < 0$ no hay puntos de corte de la parábola con el eje $\mathbb{X}$ (hay dos soluciones complejas conjugadas).

▷ Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su imagen es $[f(v), \infty[$ si $a > 0$ ($]-\infty, f(v)]$ si $a < 0$). Si $a > 0$ es creciente en $[\dfrac{-b}{2a}, \infty[$ y decreciente en $]-\infty, \dfrac{-b}{2a}]$ (si $a < 0$ ocurre lo contrario).

▷ La parábola tiene la propiedad de que todos los rayos que lleguen a ella paralelos a su eje se reflejan pasando por el foco de la misma. Esta propiedad es clave para la construcción de antenas parabólicas o telescopios reflectores.

Otros ámbitos donde aparecen las parábolas son el movimiento uniformemente acelerado o la energía cinética.

▷ <u>Funciones racionales. Caso particular: hipérbolas:</u>

▷ Son aquellas funciones que vienen dadas como cociente de polinomios: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Su dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo los valores que anulan al denominador.

▷ Como caso particular vamos a considerar aquellas donde numerador y denominador tienen grado uno o el numerador tiene grado cero y no son divisibles entre sí.

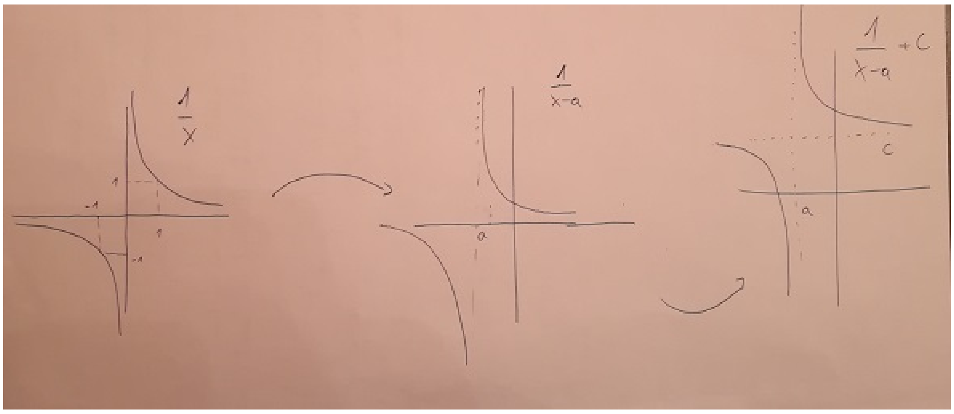
▷ **<u>Definición</u>**: llamamos <u>hipérbola</u> a toda función de la forma $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ y $(cx + d) \nmid (ax + b)$

▷ Las hipérbolas son el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

▷ En el caso especial de $y = \dfrac{k}{x}$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ obtenemos la función de proporcionalidad inversa.

Sus asíntotas son los ejes de coordenadas. Estas funciones aparecen en problemas como: longitud de onda y frecuencia de un sonido, diámetro de un tubo capilar y altura alcanzada por un líquido, etc.

A partir del comportamiento de $y = \dfrac{1}{x}$ conseguimos deducir el comportamiento de la hipérbola general.



▷ <u>Función valor absoluto</u>:

▷ La definimos de la siguiente manera

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

▷ Esta función es siempre positiva, simétrica con respecto al eje $\mathbb{Y}$, $D(f) = \mathbb{R}$, continua en todo punto y derivable en todo su dominio salvo $x = 0$

▷ <u>Funciones inversas</u>:

<u>De rectas</u>: sea $y = m \cdot x + n \Longrightarrow y^{-1} = \dfrac{1}{m}x - \dfrac{n}{m}$

<u>De parábolas</u>: no existen de manera global (pues las parábolas no son inyectivas) pero sí en los intervalos $]-\infty, \dfrac{-b}{2a}]$ y $[\dfrac{-b}{2a}, \infty[$ donde sí lo es. Se despeja de la ecuación y se obtiene el valor.

<u>De hipérbolas</u>: siempre existen y se calculan sustituyendo.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Longrightarrow y^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a}$$