Las razones trigonométricas

Departamento de Matemáticas. IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

11 de marzo de 2020

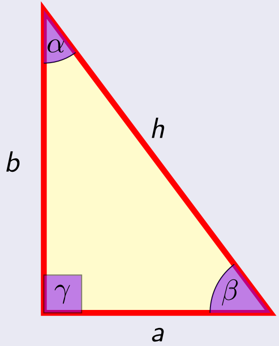
índice de contenidos I

índice de contenidos II

índice de contenidos III

Seno, coseno y tangente de un ángulo α

Definiciones:

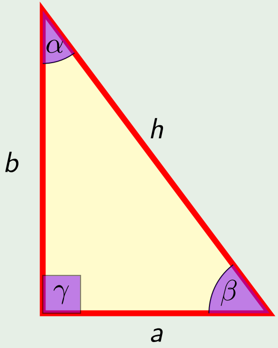


- $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{h}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{h}$
- $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{a}{b}$

- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
- $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Relación entre las tres razones trigonométricas.

Relación entre las tres razones trigonométricas.



$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

- $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\frac{a}{\cancel{h}}}{\frac{b}{\cancel{h}}} = \dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}(\alpha)$

Ecuación fundamental de la trigonometría.

- Aplicando el teorema de Pitágoras:
- $a^2 + b^2 = h^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{h^2} = \dfrac{h^2}{h^2} \Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Expresiones equivalentes de la ecuación fundamental de la trigonometría.

Identidades equivalentes

A partir de las definiciones anteriores podemos obtener las siguientes identidades:

- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

dividiendo entre $\cos^2\alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cancelto{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

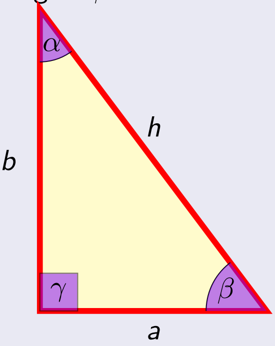
dividiendo entre $\operatorname{sen}^2\alpha$

$$\cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

Las razones trigonométricas del ángulo β.

Razones de β

Si aplicamos la definición de las razones trigonométricas para el ángulo β obtenemos:



- $\text{sen}\,\beta = \dfrac{\text{Cateto opueto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{h} = \cos\alpha$
- $\cos\beta = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{h} = \text{sen}\,\alpha$
- $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$

Ángulos complementarios:

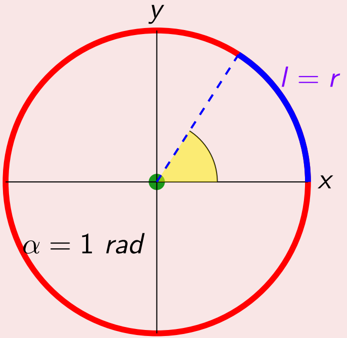
Si $\alpha + \beta = 90^\circ$

- $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$
- $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$
- $\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,\beta$

Definición de radian

Un radian es aquel ángulo cuyo radio es igual a su arco

En la figura se muestra un ángulo de un radian:



Equivalencia entre grados y radianes:

- La longitud de un arco de 180° es: $L = \alpha \cdot r = \pi \cdot r \Rightarrow \pi\ rad = 180^\circ$

Conversiones entre grados y radianes.

Si $\pi\ rad = 180^\circ$, podemos establecer las siguientes relaciones:

- $\alpha_{rad} = \dfrac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$
- $\alpha^\circ = \dfrac{\alpha_{rad} \cdot 180^\circ}{\pi}$

Equivalencias entre grados y radianes para álgunos ángulos.

La siguiente tabla muestra dicha equivalencia

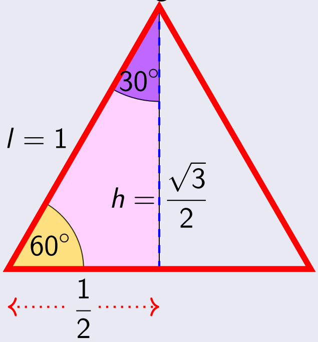
α**(grados)**	α**(radianes)**
1	$\frac{\pi}{180}$
15	$\frac{\pi}{12}$
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
$\approx 57,30$	1

α**(grados)**	α**(radianes)**
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3\pi}{2}$
360	2π

Razones trigonométricas de 30° y 60°

Dichas razones las podemos deducir a partir de un triángulo equilátero de lado 1:

Aplicando el teorema de pitágoras, deducimos su altura y aplicamos las definiciones de las razones trigonométricas:

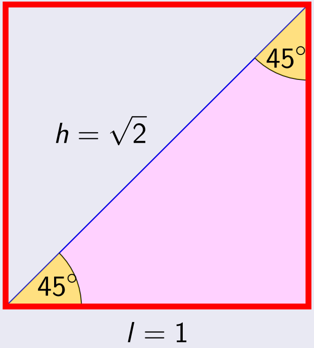


- $\operatorname{sen}(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$
- $\cos(30^\circ) = \operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(30^\circ)}{\cos(30^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\operatorname{tg}(60^\circ) = \operatorname{cotg}(30^\circ) = \sqrt{3}$

Razones trigonométricas de 45°

Estas se pueden hallar a partir de un triángulo rectángulo isósceles de lado 1:

Aplicando el teorema de Pitágoras, su hipotenusa (diagonal del cuadrado) mide $\sqrt{2}$.
Por lo tanto:

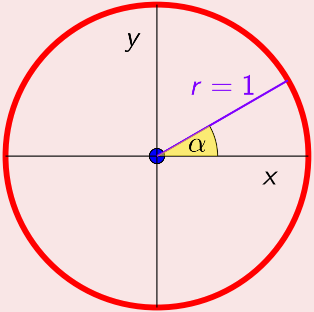


- $\operatorname{sen}(45^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(45^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg}(45^\circ) = \dfrac{\operatorname{sen}(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = 1$

La circunferencia gionométrica

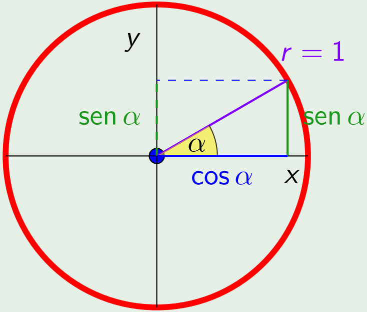
Definición

La circunferencia goniométrica es aquella centrada en el origen cuyo radio es 1.



Razones trigonométricas del primer cuadrante.

A partir de la circunferencia goniométrica obtenemos:

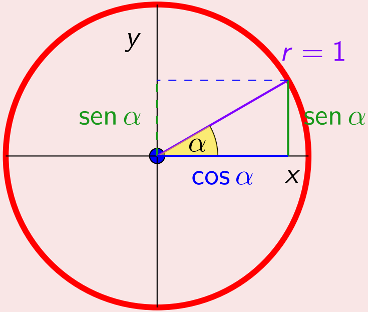


- El seno de un ángulo coincide con la proyección del radio sobre el eje y en dicha circunferencia.
- El coseno de un ángulo coincide con la proyección del radio sobre el eje x en dicha circunferencia.

Razones trigonométricas del primer cuadrante.

Signos de las razones trigonométricas:

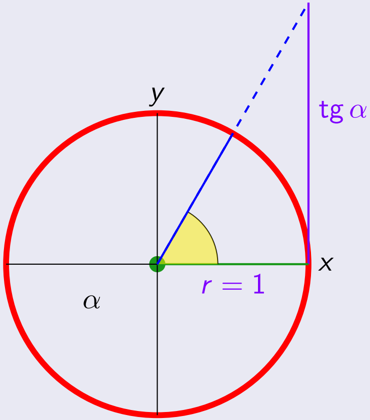
En el primer cuadrante, $0 < \alpha < 90°$, el signo de las razones trigonométricas es:



- $\operatorname{sen}\alpha > 0$
- $\cos\alpha > 0$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} > 0$

Obtención de tg α en la circunferencia goniométrica.

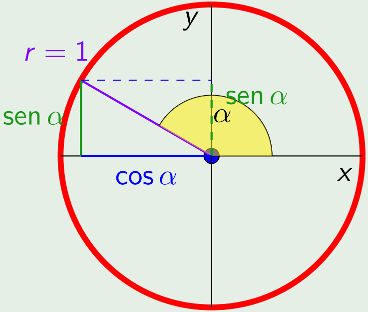
¿ Cómo obtenemos tg α en dicha circunferencia?



- Creamos una recta vertical en $x = 1$
- Prolongamos el segmento radio hasta dicha recta.
- Hemos obtenido un triángulo rectángulo cuyo cateto contiguo es 1.
- El cateto vertical es la tg α

Segundo cuadrante. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

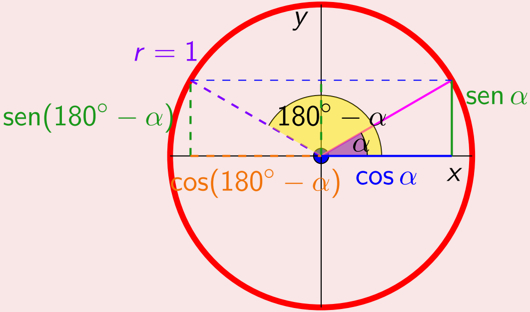
A partir de la circunferencia goniométrica podemos definir las razones trigonométricas:



- $\operatorname{sen}\alpha > 0$
- $\cos\alpha < 0$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} < 0$

Razones trigonométricas de ángulos suplementarios.

A partir de la figura observamos:



- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$
- $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$
- $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180° - \alpha)$

Algunos ejemplos

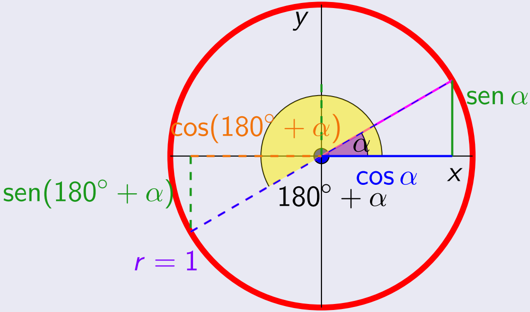
$60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ son suplementarios.

- $\operatorname{sen}(60^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(120^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(60^\circ) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos(120^\circ) = -\dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(120^\circ) = -\sqrt{3}$

Tercer cuadrante. $180° < \alpha < 270°$.

Signos en el tercer cuadrante:

A partir de la figura deducimos:



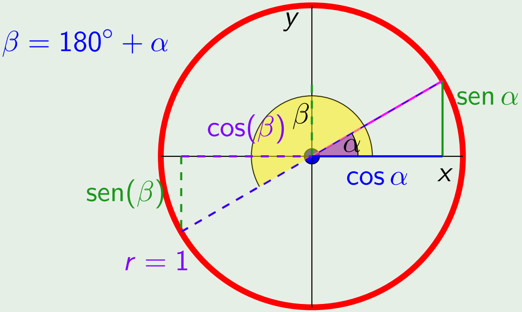
- $\text{sen}\,\alpha < 0$
- $\cos\alpha < 0$
- Si $\text{sen}\,\alpha < 0$ y $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha > 0$

Razones trigonométricas si $\beta = \alpha + 180^\circ$

Relación las razones trigonométricas del primer y tercer cuadrante.

Si $\beta = 180^\circ + \alpha \Rightarrow$

- $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha$
- $\cos\beta = -\cos\alpha$
- $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$



Algunos ejemplos

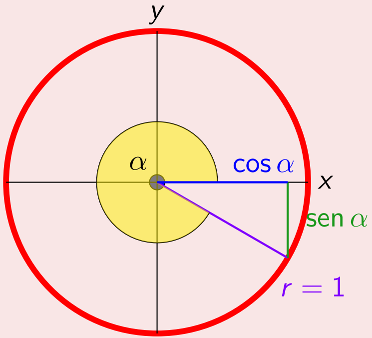
$60° + 180° = 240° \Rightarrow$

- $\text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen}(240°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(60°) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos(240°) = -\dfrac{1}{2}$
- $\text{tg}(60°) = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}(240°) = \sqrt{3}$

Cuarto cuadrante. $270° < \alpha < 360°$.

Signos en el cuarto cuadrante:

A partir de la figura deducimos:



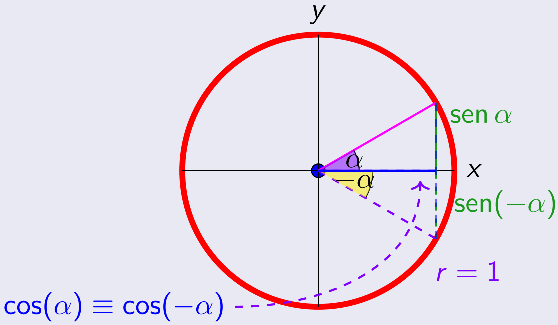
- $\operatorname{sen}\alpha < 0$
- $\cos\alpha > 0$
- Si $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < 0$

Definición de un ángulo negativo

¿Puede un ángulo ser negativo?

Se define un ángulo $-\alpha$ como un ángulo α girado en sentido negativo.

Las razones trigonométricas de un ángulo negativo se pueden relacionar con las de un ángulo positivo observando la siguiente figura:



- $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$
- $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$
- $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(-\alpha)$

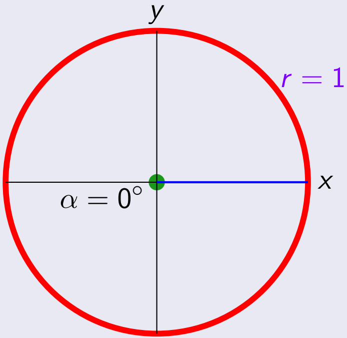
Algunos ejemplos

Razones trigonométricas de $60°$ y $-60°$.

- $\operatorname{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(-60°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(60°) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos(-60°) = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg}(60°) = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(-60°) = -\sqrt{3}$

Razones trigonométricas si $\alpha = 0^\circ$

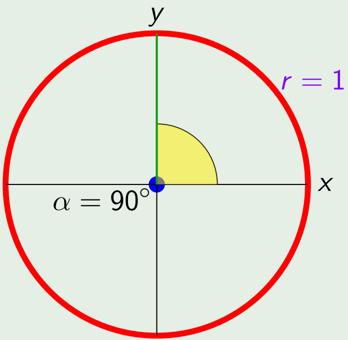
A partir de la figura podemos obtener las razones trigonométricas si $\alpha = 0^\circ$:



- $\operatorname{sen} \alpha = 0$
- $\cos \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{0}{1} = 0$

Razones trigonométricas si $\alpha = 90°$

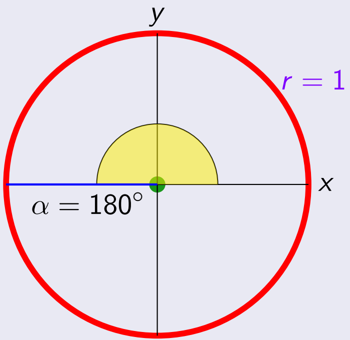
A partir de la figura podemos obtener las razones trigonométricas si $\alpha = 90°$:



- $\text{sen}\,\alpha = 1$
- $\cos\alpha = 0$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \cancel{\dfrac{1}{0}}$ $\nexists$ Importante

Razones trigonométricas si $\alpha = 180^\circ$

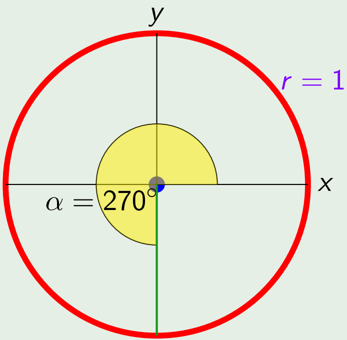
A partir de la figura podemos obtener las razones trigonométricas si $\alpha = 180^\circ$:



- $\operatorname{sen}\alpha = 0$
- $\cos\alpha = -1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0}{-1} = 0$

Razones trigonométricas si $\alpha = 270^\circ$

A partir de la figura podemos obtener las razones trigonométricas si $\alpha = 270^\circ$:



- $\operatorname{sen}\alpha = -1$
- $\cos\alpha = 0$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-1}{\cancel{0}}$ ∄ Importante

¿Puede un ángulo ser mayor que 360°?

Un ángulo puede ser mayor de 360° si incluimos el concepto de *vuelta*.

Así, si un ángulo α es mayor que 360°, sus razones trigonométricas coincidirán con las de un ángulo α' que será equivalente a α una vez que hayamos *eliminado* el número de vueltas completas:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha';\ \cos\alpha = \cos\alpha';\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$$

- Si el ángulo α está expresado en grados:
  - α' será el resto de dividir α entre 360°
- Si el ángulo α está expresado en radianes:
  - α' será el resto de dividir α entre 2π

Las funciones arco

¿Podemos resolver ecuaciones del tipo?

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

definición de las funciones arco

Para resolver dichas ecuaciones se definen las funciones arco:

- $\operatorname{sen}(\alpha) = n \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}(n)$
- $\cos(\alpha) = n \Rightarrow \alpha = \arccos(n)$
- $\operatorname{tg}(\alpha) = n \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}(n)$

La función $\operatorname{arc\,sen}(x)$

Resolución de la ecuación anterior : (1)

Resolvemos la siguiente ecuación

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

¿La solución es correcta?

Número de soluciones de las ecuaciones tipo arco

- La ecuación $\alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)$ tiene dos soluciones en $[0, 2\pi]$
- Sus soluciones son: $\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{6} \\ \alpha_2 = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$
- La ecuación $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(n)$ tiene dos soluciones **suplementarias** si $0 \leq n \leq 1$

La función $\operatorname{arc\,sen}(x)$ (II)

Resolución de la ecuación anterior : (1)

Soluciones según el signo de n en $[0, 2\pi]$

La ecuación $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(n)$ tiene dos soluciones suplementarias. En radianes serán:

- Si $n \in (0,1) \Rightarrow \alpha_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\alpha_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (Cuadrantes 1.º y 2.º)
- Si $n \in (-1,0) \Rightarrow \alpha_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; $\alpha_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ (Cuadrantes 3.º y 4.º)
- Si $n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \pi \end{cases}$; Si $n = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$; Si $n = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$;

La función arc cos(x)

Resolución de $\alpha = \arccos(n)$

Soluciones según el signo de n en $[0, 2\pi]$

La ecuación $\alpha = \arccos(n)$ tiene dos soluciones que suman 2π. En radianes serán:

- Si $n \in (0,1) \Rightarrow \alpha_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\alpha_2 \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ (Cuadrantes 1.º y 4.º)
- Si $n \in (-1,0) \Rightarrow \alpha_1 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$; $\alpha_2 \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ (Cuadrantes 2.º y 3.º)
- Si $n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha_2 = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$; Si $n = 1 \Rightarrow \alpha = 0$; Si $n = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$;

La función arc tg(x)

Resolución de $\alpha = \text{arc tg}(n)$

Soluciones según el signo de n en $[0, 2\pi]$

La ecuación $\alpha = \text{arc cos}(n)$ tiene dos soluciones que difieren π. En radianes serán:

- Si $n > 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\alpha_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ (Cuadrantes 1.º y 3.º)
- Si $n < 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $\alpha_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ (Cuadrantes 2.º y 4.º)
- Si $n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \pi \end{cases}$;

¿Qué solución utilizar?

Si no disponemos de más datos ambas son válidas

Por contra, si sabemos el signo de otra de sus razones trigonométricas podemos determinar su cuadrante:

$\alpha = \operatorname{arc\,sen}(n)$

- $n > 0 \Rightarrow$
  - $\cos\alpha > 0 \Rightarrow 1.^{\text{er}}$
  - $\cos\alpha < 0 \Rightarrow 2.^{\text{o}}$
- $n < 0 \Rightarrow$
  - $\cos\alpha > 0 \Rightarrow 4.^{\text{o}}$
  - $\cos\alpha < 0 \Rightarrow 3.^{\text{er}}$

$\alpha = \arccos(n)$

- $n > 0 \Rightarrow$
  - $\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow 1.^{\text{er}}$
  - $\operatorname{sen}\alpha < 0 \Rightarrow 4.^{\text{o}}$
- $n < 0 \Rightarrow$
  - $\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow 2.^{\text{o}}$
  - $\operatorname{sen}\alpha < 0 \Rightarrow 3.^{\text{er}}$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(n)$

- $n > 0 \Rightarrow$
  - $\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow 1.^{\text{er}}$
  - $\operatorname{sen}\alpha < 0 \Rightarrow 3.^{\text{er}}$
- $n < 0 \Rightarrow$
  - $\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow 2.^{\text{o}}$
  - $\operatorname{sen}\alpha < 0 \Rightarrow 4.^{\text{o}}$

Ejercicio de ejemplo:

Hallar α si sabemos:

- $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$
- $\operatorname{tg}\alpha > 0$

$\Rightarrow$

- Averiguamos su cuadrante:
- $\operatorname{sen}\alpha < 0$; $\operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow$ Tercer cuadrante

Si trabajamos en grados

Utilizando la calculadora:

- $\alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -36,87°$ ✗
- Hallamos su suplementario:
  $\alpha = 180° - (-36,87°) = 216,87°$ ✓

Si trabajamos en radianes

Utilizando la calculadora:

- $\alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -0,64\ rad$ ✗
- Hallamos su suplementario:
  $\alpha = \pi - (-0{,}64) = 3,79\ rad$ ✓