

Aquí comienza un cuaderno de teoría y ejercicios de la asignatura Matemáticas Análisis y Enfoques del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional.

Este cuaderno consta de diez temas que abarcan las cinco unidades del currículum de la asignatura propuesta por la organización del Bachillerato Internacional.

La teoría escrita es propia. Las investigaciones, los ejercicios y los problemas que aparecen en los diferentes apartados son de elaboración propia en gran parte y se basan el libro de Oxford: Torres Skoumal, M., Harrison, R., Harcet, J., Wathall, J., & Heinrichs, L. (2019). Oxford IB Diploma Programme: IB Mathematics: analysis and approaches, Higher Level, Print and Enhanced Online Course Book Pack. Oxford University Press.

He incluido enlaces a diferentes páginas web para trabajar la mentalidad internacional y la teoría del conocimiento, claves en el Programa del Diploma.

Cada uno de los diez temas está separado en una serie de apartados orientados tanto al nivel medio como al nivel superior. Aquellos apartados que se refieran al nivel superior aparecerán etiquetados como TANS.

Tema 1. Aritmética y Álgebra.

1. Potencias.

- 1.1. Definición de potencia.
- 1.2. Propiedades de las potencias.
- 1.3. Ejercicios de potencias.

2. Logaritmos.

- 2.1. Definición de logaritmo.
- 2.2. Ejercicios de la definición de logaritmo.
- 2.3. Propiedades de los logaritmos.
- 2.4. Logaritmo Neperiano.
- 2.5. Ejercicios de las propiedades de los logaritmos.
- 2.6. Cambio de base de los logaritmos.
- 2.7. Ejercicios de cambio de base de los logaritmos.
- 2.8. Ejercicios de repaso del apartado: Logaritmos.

3. Resolución de ecuaciones exponenciales.

- 3.1. Ecuaciones exponenciales.
- 3.2. Ejercicios de ecuaciones exponenciales.

4. Progresiones.

- 4.1. Definición de sucesión.
- 4.2. Progresiones aritméticas.
 - 4.2.1. Término general.
 - 4.2.2. Ejercicios de progresiones aritméticas.
- 4.3. Progresiones geométricas.
 - 4.3.1. Término general.
 - 4.3.2. Ejercicios de progresiones geométricas.
- 4.4. Suma de una serie.
 - 4.4.1. Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.
 - 4.4.2. Ejercicios de series aritméticas.
 - 4.4.3. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.
 - 4.4.4. Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.
 - 4.4.5. Ejercicios de series geométricas.
- 4.5. Ejercicios de repaso del apartado: Progresiones.
- 4.6. Aplicaciones de las progresiones aritméticas y geométricas.
 - 4.6.1. Capitalización simple y compuesta.
 - 4.6.2. Ejercicios de capitalización simple y compuesta.
 - 4.6.3. Crecimiento de poblaciones.
 - 4.6.4. Ejercicios de crecimiento de poblaciones.

5. Binomio de Newton.

- 5.1. Número Combinatorio.
- 5.2. Ejercicios del número combinatorio.
- 5.3. Combinatoria o Reglas de Conteo (TANS)
 - 5.3.1. Cálculo de Variaciones.
 - 5.3.2. Ejercicios de cálculo de variaciones.
 - 5.3.3. Cálculo de Permutaciones.
 - 5.3.4. Ejercicios de cálculo de permutaciones.
 - 5.3.5. Cálculo de Combinaciones.
 - 5.3.6. Ejercicios de cálculo de combinaciones.
- 5.4. Desarrollo del binomio de Newton.
- 5.5. Ejercicios del binomio de Newton.

- 5.6. Generalización del Binomio de Newton. (TANS)
- 5.7. Ejercicios de generalización del Binomio.
- 5.8. Ejercicios de repaso del apartado: Binomio de Newton.

- 6. Demostraciones Matemáticas.
 - 6.1. Tipos de demostraciones matemáticas.
 - 6.1.1. Demostraciones Algebraicas.
 - 6.1.2. Ejercicios de demostraciones algebraicas.
 - 6.1.3. Demostraciones Directas (TANS)
 - 6.1.4. Ejercicios de demostraciones directas (TANS)
 - 6.1.5. Demostraciones por reducción al absurdo o por contradicción (TANS)
 - 6.1.6. Ejercicios de demostraciones por contradicción (TANS)
 - 6.1.7. Demostraciones por inducción (TANS)
 - 6.1.8. Ejercicios de demostraciones por inducción (TANS)
 - 6.1.9. Ejercicios de repaso del apartado: Pruebas matemáticas [TANS]

- 7. Resoluciones de Sistemas de ecuaciones lineales (TANS)
 - 7.1. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
 - 7.1.1. Clasificación de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
 - 7.1.2. Resolución de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
 - 7.2. Ejercicios de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
 - 7.3. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
 - 7.4. Ejercicios de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

- 8. Números complejos (TANS)
 - 8.1. El número imaginario i .
 - 8.2. Los números complejos.
 - 8.2.1. Expresión binómica o cartesiana.
 - 8.2.2. Plano complejo o diagrama de Argand.
 - 8.2.3. Módulo de los números complejos.
 - 8.2.4. Operaciones con números complejos.
 - 8.3. Ejercicios de operaciones con complejos.
 - 8.4. Potencias y raíces de los números complejos.
 - 8.5. Ejercicios de potencias y raíces de complejos en forma cartesiana.
 - 8.6. Ejercicios de repaso del apartado: Números complejos.

- 9. Ejercicios finales del tema 1.
 - 9.1. Ejercicios de repaso del tema 1.
 - 9.2. Autoevaluación del tema 1.

Tema 1. Aritmética y Álgebra.

Conocimientos esenciales.

La aritmética y el álgebra sirven para representar patrones, mostrar equivalencias y hacer generalizaciones, lo que nos permite modelizar situaciones del mundo real. El álgebra constituye una abstracción de los conceptos numéricos y emplea variables que posibilitan la resolución de problemas aritméticos.

Conceptos estudiados en este tema.

Generalización, representación, modelización, equivalencia, patrones, cantidad.

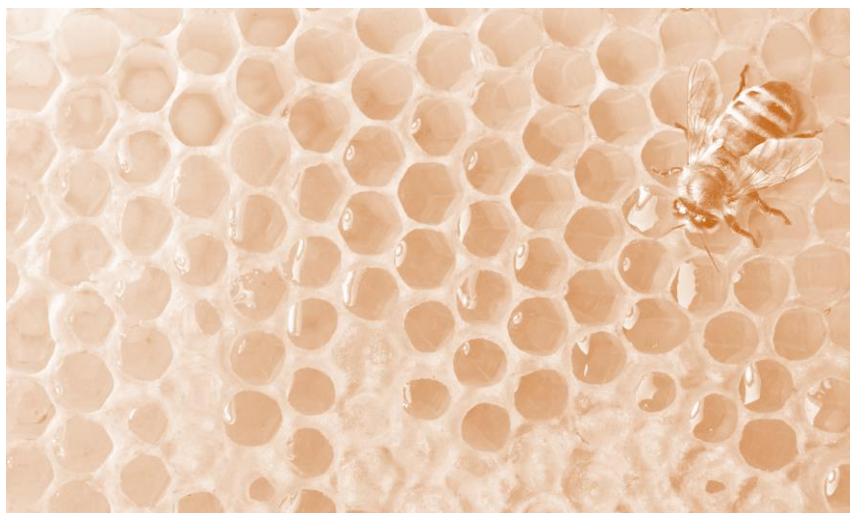
TANS: validez, sistemas.

Conocimientos aprendidos al final del tema.

- Propiedades de las potencias.
- Definición de logaritmo.
- Propiedades de los logaritmos.
- Resolución de ecuaciones exponenciales.
- Reconocer progresiones aritméticas y geométricas.
- Cálculo de términos de una progresión aritmética y geométrica.
- Suma de los n -primeros términos de una serie aritméticas y geométricas.
- Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.
- Aplicación de las series al ámbito financiero. Cálculo de interés compuesto.
- Reglas de Conteo. Cálculo de Variaciones, Permutaciones y Combinaciones. **(TANS)**
- Desarrollo de las potencias de un binomio para potencias naturales.
- Desarrollo de las potencias de un binomio para potencias enteras y racionales. **(TANS)**
- Demostraciones matemáticas. Algebraicas, Directas, por Contradicción, por Inducción. **(TANS)**
- Clasificación y resolución de sistemas de ecuaciones.
- Número imaginario i . **(TANS)**
- Forma cartesiana de los números complejos. **(TANS)**
- Representación de los complejos. **(TANS)**
- Módulo de los números complejos. **(TANS)**
- Operaciones con los números complejos. **(TANS)**



¿Observas patrones en estas imágenes?



1. Potencias.

1.1. Definición de potencia.

Definición.

La **potenciación** es una multiplicación de un número (factor) por sí mismo varias veces.

La expresión 5^3 , por ejemplo, representa $5 \times 5 \times 5$.

En la **expresión de la potencia** de un número consideramos dos partes:

- **La base**, es el número (factor), distinto de cero, que se multiplica por sí mismo, en el ejemplo: **5**.
- **El exponente**, es el número que indica las veces que la base se multiplica por sí misma, en el ejemplo: **3**.

$$a^b = a \cdot a \cdot a \dots b\text{-veces} \dots a$$



El matemático griego [Euclides](#) usó el término "potencia" para un cuadrado.

1.2. Propiedades de las potencias.

Producto de potencias de la misma base.

Se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$



[Arquímedes](#) descubrió y demostró esta propiedad.

$$a^3 \cdot a^5 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) =$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$$

Entonces:

$$5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$$

$$3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$$



¿Eres capaz de demostrar esta propiedad como lo hizo [Arquímedes](#)?

Entonces:

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

División de potencias de igual base

Se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

Potencia de una potencia

Se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$((a)^b)^c = a^{b \cdot c}$$



Usando las propiedades anteriores es sencillo demostrar esta.

Entonces:

$$((3)^2)^4 = 3^{2 \cdot 4}$$

**Investigación.**

Ya sabéis que cualquier número elevado a cero es igual a 1 pero, qué pasa con cero elevado a cero. Investiga y pon en común la respuesta con tus compañeros de clase.



[¿CUÁNTO ES CERO ELEVADO A CERO? | El vídeo que tu profe de matemáticas ¡no quiere que veas!](#)



Usando las propiedades anteriores es sencillo demostrar esta.

Entonces:

$$3^0 = 1; \left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1; (\sqrt{5})^0 = 1$$

Potencia de exponente cero.

Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1.

$$a^0 = 1$$

Potencia de exponente negativo

Se invierte la base y se cambia el signo del exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \left(\frac{b}{a}\right)^{-c}$$

$$\frac{1}{a^{-b}} = a^b$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$



Usa la propiedad para escribir x^{-p} en términos de x^p .

Entonces:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$$

$$\frac{1}{3^{-4}} = 3^4$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$



El matemático francés [Nicolas Chuquet](#) creó su propia notación para las potencias y probablemente fue el primero en escribir potencias de exponente cero y exponente negativo. Investiga al respecto y pon en común los hallazgos con tus compañeros.



Demuestra la propiedad.

Entonces:

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

Potencia de un producto

Cada factor de la base se eleva al exponente por separado.

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

Potencia de una división

Cada parte de la base se eleva al exponente por separado.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$$



Demuestra la propiedad.

Entonces:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$$



Demuestra la propiedad.

Entonces:

$$\sqrt[5]{7^3} = 7^{3/5}$$

Potencia de exponente fraccionario (raíces de cualquier índice)

Se deja la misma base y se divide el exponente entre el índice de la raíz.

$$\sqrt[c]{a^b} = a^{b/c}$$

TdC. ¿Las matemáticas se inventan o se descubren? El número e , ¿existía antes de que el hombre lo definiese?



1.3. Ejercicios de potencias.

1. Usa las propiedades de las potencias para simplificar al máximo las siguientes expresiones:

a) $x^2 \cdot x^5$

b) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3y^2\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x^4y^5\right)$

d) $\frac{9a^7}{3a^4}$

e) $\frac{2x^3y^5}{4x^2y^3}$

f) $3(x^2y^3)^5$

g) $\sqrt[4]{16x^{-8}}$

h) $\left(\frac{27x^3}{y^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$

2. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $(81)^{\frac{3}{4}}$

b) $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

c) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$