1. **a)** $\displaystyle\int \frac{3x^4-2x+\sqrt{x}+1}{x^2}dx=\int\left(3x^2-\frac{2}{x}+x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2}\right)dx=x^3-2\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-1}}dx=2\sqrt{x^2+3x-1}+C$

2. **a)** $\displaystyle I=\int\left(x^2-1\right)e^{2x-1}dx\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-1\Rightarrow f'(x)=2x \\ g'(x)=e^{2x-1}\Rightarrow g(x)=\int e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}\end{array}\right\}\Rightarrow I=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x-1}-\int xe^{2x-1}dx$

Se aplica de nuevo la integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=e^{2x-1}\Rightarrow g(x)=\int e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \int xe^{2x-1}dx=\frac{x}{2}e^{2x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x-1}dx=\frac{x}{2}e^{2x-1}-\frac{1}{4}e^{2x-1}$$

$$I=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x-1}-\frac{x}{2}e^{2x-1}+\frac{1}{4}e^{2x-1}+C=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2x-1}+C$$

b) $\displaystyle I=\int\frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}dx$. Haciendo el cambio indicado: $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t^2=x-1\Rightarrow 2tdt=dx$

$$I=\int\frac{t}{1+t}2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=t^2-2t+2\ln(1+t)=x-1-2\sqrt{x-1}+2\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)+C$$

c) Las raíces del denominador son x = 1 y x = –3.

$$\frac{x-2}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{x^2+2x-3}$$

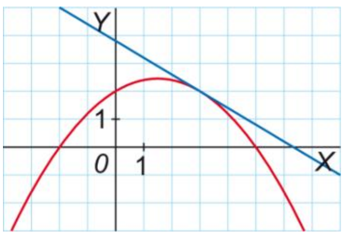
Dando valores a x: $\begin{cases} x=1, & -1=4A \\ x=-3, & -5=-4B\end{cases}\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{4};\ B=\frac{5}{4}$

Por tanto, $\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^2+x-12}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{5}{4}}{x+3}\right)dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x+3}dx=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{5}{4}\ln|x+3|+C$

d) $\displaystyle\int\frac{2}{x\ln x}dx=2\ln|\ln x|+C$

3. **a)** Puntos de corte: x = –2, x = 1, .x = 3

Posición curva: En $[-2,1]$, $f(x)<0$, mientras que en $[1,3]$, $f(x)\geq 0$



$$A=-\int_{-2}^{1}\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx+\int_{1}^{3}\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx=$$

$$=-\left(-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg]_{-2}^{1}+\left(-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg]_{1}^{3}=$$

$$=-\left(\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-6\right)-\left(-4-\frac{16}{3}+10+12\right)\right)+\left(-\frac{81}{4}+18+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-4-\frac{16}{3}+10+12\right)=\frac{63}{4}+\frac{16}{3}=\frac{253}{12}\ \text{u}^2$$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3}\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx=\left(-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg]_{-2}^{3}=\left(-\frac{81}{4}+18+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-6\right)=-\frac{125}{12}$

c) Al calcular el área de la función cambiamos el signo de la integral definida entre [-2,1], puesto que la función es negativa. Cuando calculamos la integral definida este signo no se cambia.

4. Puntos de corte: $x = -1$, $x = 0$, .$x = 2$

Posición curvas: En $[1,0]$, $g(x) \geq f(x)$, mientras que en $[0,2]$, $f(x) \geq g(x)$

Área: $\int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(-x^3 + x^2 + 2x)dx = \left[\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\right]_{-1}^{0} + \left[\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right)\right]_{0}^{2} =$

$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) - 0 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$ u^2

5. Ecuación recta tangente: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{19}{5}$

En la figura aparece representada la curva y la tangente.

La recta tangente corta al eje X en $x = \frac{19}{3}$.

El área pedida puede calcularse como la suma de las áreas de los recintos R_1 y R_2.

Área R_1: $\int_{3}^{5}\left(\left(-\frac{3}{5}x + \frac{19}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 2\right)\right)dx = \int_{3}^{5}\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{5}\right)dx = \left[\left(\frac{x^3}{15} - \frac{3x^2}{5} + \frac{9x}{5}\right)\right]_{3}^{5} =$

$= \left(\frac{25}{3} - 15 + 9\right) - \left(\frac{27}{15} - \frac{54}{10} + \frac{27}{5}\right) = \frac{7}{3} - \frac{9}{5} = \frac{8}{15}$ u^2

Área R_2: $\int_{5}^{\frac{19}{3}}\left(\left(-\frac{3}{5}x + \frac{19}{5}\right)\right)dx = \left[\left(-\frac{3x^2}{10} + \frac{19x}{5}\right)\right]_{5}^{\frac{19}{3}} = \left(-\frac{361}{30} + \frac{361}{15}\right) - \left(-\frac{15}{2} + 19\right) = \frac{181}{15} - \frac{23}{2} = \frac{17}{30}$ u^2

Área: $\frac{8}{15} + \frac{17}{30} = \frac{11}{10}$ u^2